Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

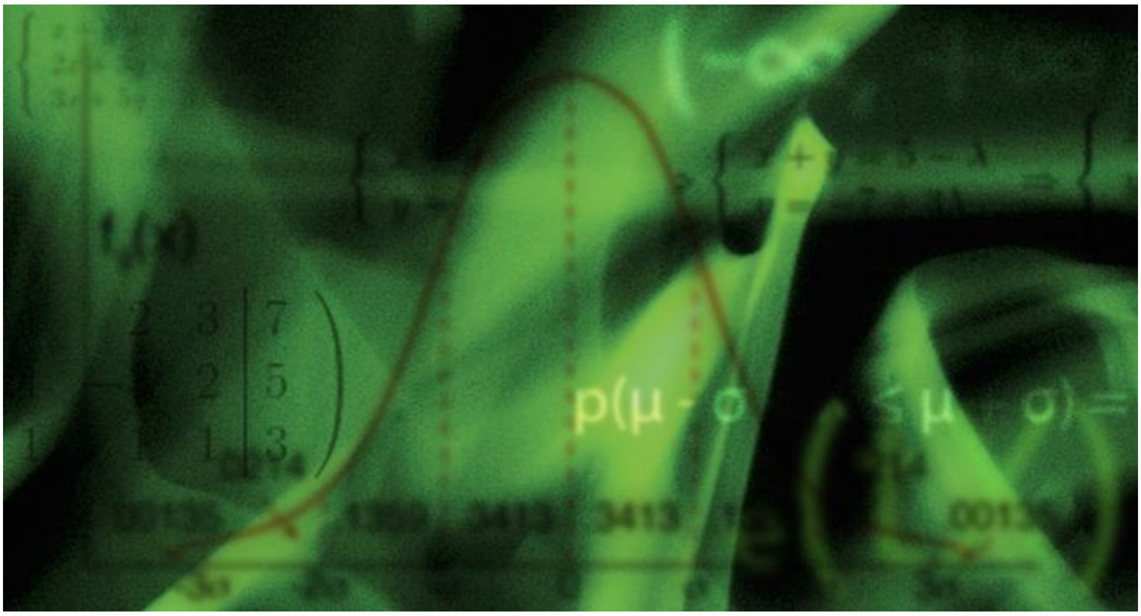
Índice

Presentación

Introducimos en este tema un nuevo método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales denominado **Método de Gauss** consistente en la búsqueda de un sistema equivalente triangular que facilite los cálculos.

Veremos cómo el sistema equivalente encontrado nos permite, también, la **discusión del sistema**.

Una de las principales ventajas de éste método es que se puede aplicar con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas.



Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen como un elemento esencial del que trata el Álgebra lineal y cómo resolverlos ha sido uno de los problemas fundamentales en la historia.

Uno de los métodos de resolución de **sistemas de ecuaciones lineales** más importante es el método de eliminación de Gauss.

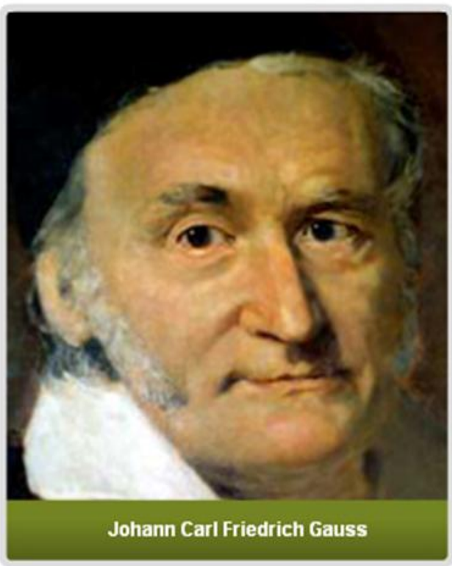
Este método **consiste en transformar el sistema en un sistema equivalente** obtenido mediante operaciones elementales.

De las muchas aportaciones de **Johann Carl Friedrich Gauss**, podemos destacar la construcción de un polígono regular de 17 lados con regla y compás, así como una solución algebraica al problema de construir con regla y compás cualquier polígono regular de *n* lados.

En su tesis doctoral demostró el Teorema fundamental del álgebra en el que se demuestra que toda ecuación algebraica con coeficientes complejos tiene soluciones complejas.

Otras aportaciones importantes se relacionan con la Teoría de números y la Astronomía calculando de forma precisa la órbita de varios cuerpos celestes.

Denominado “el príncipe de las matemáticas”, Gauss ha contribuido de forma decisiva en el desarrollo de esta ciencia.



Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Es uno de los matemáticos con más influencia de la historia. Sus aportaciones se extienden además a los campos de la física y la astronomía.

Desde pequeño destacó por sus habilidades matemáticas y para los idiomas y consiguió que gracias al Duque de Brunswick, una ayuda económica para estudiar en la Universidad de Göttingen.

Sistemas equivalentes

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el **mismo conjunto de soluciones**. Para trasforma un sistema en un equivalente podemos realizar las siguientes **operaciones**:

Ten en cuenta que un sistema de ecuaciones lineales **puede escribirse en forma matricial** como *AX=B*.

Por lo tanto, es posible trasformar el sistema en otro sistema equivalente trasformando mediante operaciones elementales su matriz. Es importante que las **trasformaciones de la matriz se realicen sobre la matriz ampliada** puesto que si únicamente operamos en la matriz de coeficientes no realizaríamos dichas transformaciones en todo el sistema.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Intercambio de posición

Intercambiar la posición de dos ecuaciones del sistema.

$$\cdot$$

Multiplicación

Multiplicar cualquiera de las ecuaciones del sistema por un escalar distinto de cero.

$$+ \qquad -$$

Añadir y suprimir

Añadir o suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las que había.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ & - & 5y & - & z & = & -2 \\ & & & - & 9z & = & -18 \end{array}\right.$$

Sustituir un elemento por otro

Sustituir una ecuación del sistema por el resultado de sumarle otra multiplicada por un número distinto de cero.

Otra observación importante que debes recordar es que las **operaciones** la realizaremos **únicamente entre filas** y no con las columnas, ya que si hiciésemos eso mezclaríamos los coeficientes de las incógnitas unos con otros, no obteniendo en ese caso un sistema equivalente al dado.

Método de Gauss

El **método de resolución de Gauss** consiste, tal y como hemos comentado, en **transformar el sistema inicial en un equivalente** que sea más sencillo.

En particular, dado un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas se trata de obtener un sistema equivalente cuya primera ecuación mantenga las n incógnitas, la segunda *n-1*, la tercera *n-2*, y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación que tendrá una sola incógnita. Hecho esto, resolvemos la última ecuación, a continuación la penúltima, y así hasta llegar a la primera. Es decir, el método de Gauss consiste en **triangular la matriz ampliada**.

Este método se denomina también **método de eliminación**, pues se trata de ir eliminando las incógnitas de forma escalonada, de manera que al final en la última ecuación únicamente quede una incógnita en la penúltima dos, en la siguiente tres, etc. En dichas matrices es posible trazar una escalera descendente debajo de los términos no nulos de cada fila, de forma que cada peldaño tiene altura uno y debajo del escalón los elementos son todos nulos.

Es importante observar que el proceso de aplicar el método de eliminación de Gauss no es único, sin embargo **las soluciones obtenidas deben ser las mismas**.

Ejemplo de aplicación del método de Gauss

Realizaremos el siguiente **ejemplo de aplicación del método de Gauss**:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Calculamos la matriz de **coeficientes** y la matriz **ampliada**:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Mediante las trasformaciones descritas en cada paso trasformamos el sistema en otro equivalente que sea escalonado.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \underset{F_3=5F_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right)$$

Volvemos a escribir el sistema a partir de la matriz transformada, obteniendo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ & - & 5y & - & z & = & -2 \\ & & & - & 9z & = & -18 \end{array}\right.$$

Para resolver el sistema lo podemos hacer de abajo a arriba, es decir, sustituyendo el valor de las incógnitas en las ecuaciones anteriores. De la última ecuación obtenemos que *z=2*, sustituyendo en la anterior podemos sacar el valor de *y* de forma que *-5y=-2+2* es decir, *y=0*. Por último sustituyendo en la primera ecuación ambos valores obtenemos que *x=1*.

La **solución** del sistema es, por lo tanto, ***x=1, y=0, z=2***.

Discusión del sistema

Como sabemos la discusión del sistema (en virtud del Teorema de Rouche-Frobenius) requiere el **cálculo de los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada**. Puesto que hemos definido el rango de una matriz como el número de filas (o columnas) linealmente independientes, una vez que hemos escalonado la matriz ampliada (y por tanto la de coeficientes, por estar contenida en ella), podemos calcular rápidamente los rangos de dichas matrices y por lo tanto conocer el carácter del sistema.

En la siguiente tabla mostramos, mediante algunos ejemplos, qué situaciones podemos encontrarnos para cada caso:

Tipo de sistema /Matriz	Matriz de coeficientes	Matriz
S. Compatible determinado rgA=rgA*=n. incógnitas	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$
S. Compatible indeterminado rgA=rgA*<n. incógnita	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
S. Incompatible $rgA \neq rgA^*$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Ejemplos de la aplicación de la discusión del sistema

Veamos algún ejemplo de aplicación de la discusión anterior.

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+3y-z=3 \\ 3x+5y-3z=1 \end{cases}$$

Trasformamos su matriz ampliada (y la de coeficientes) mediante operaciones elementales, en una **matriz escalonada**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -6 & -14 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el rango de la ampliada coindice con el rango de la matriz de coeficientes y es 2, pero el número de incógnitas es 3, por lo que es sistema es **compatible indeterminado** (depende de un parámetro). Si tomamos la variable *z* como parámetro, el sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+\lambda=5 \\ y-3\lambda=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5-\lambda \\ y=-7+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12-4\lambda \\ y=-7+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Ejemplo de aplicación del sistema

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

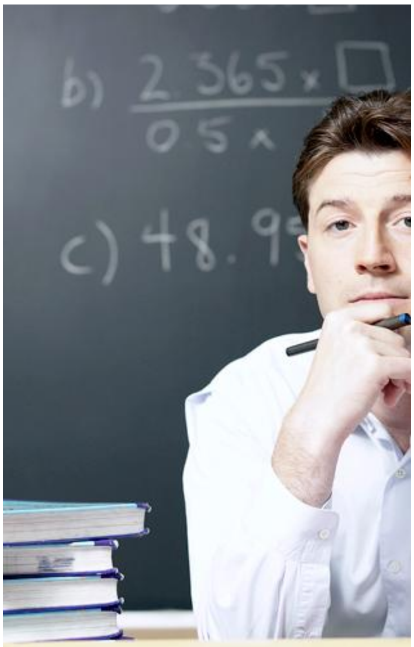
Trasformamos su matriz ampliada (y la de coeficientes) mediante operaciones elementales, en una matriz escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Observemos la matriz escalonada, si nos fijamos en la última fila vemos que en la matriz de coeficientes tiene rango 2, pero la matriz ampliada tiene rango 3, por lo tanto **el sistema es incompatible y no tiene solución**.

Observaciones

Realizaremos algunas observaciones a tener en cuenta sobre el método de Gauss:



- El método es aplicable a cualquier sistema de ecuaciones lineales independientemente del número de ecuaciones y de incógnitas.
- Recuerda que al operar con la matriz conseguimos una notación abreviada del sistema quedándonos con los coeficientes y términos independientes. La posición de los elementos en la matriz es la que nos determina la incógnita a la que acompaña y la ecuación a la que pertenece.
- Una de las ventajas de éste método es que permite discutir y resolver mediante los mismos cálculos. Al escalonar la matriz, obtenemos un sistema equivalente con una matriz simplificada. Podemos estudiar el rango de las matrices de forma sencilla y una vez discutido el sistema resolver, si es posible, sustituyendo de abajo a arriba.
- Es importante recordar que las operaciones elementales que se puede realizar en la matriz son sólo entre las filas y no entre las columnas, pues la matriz es la representación del sistema y si operamos entre columnas cambiamos el sistema a otro que no es equivalente.
- Recuerda que no existe una única forma de llegar a una matriz escalonada. Según las operaciones que realices llegarás a una u otra matriz. Sin embargo la solución no puede ser distinta si utilizas unas operaciones u otras.

Resumen

Hemos presentado un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales basado en la búsqueda de un sistema equivalente escalonado. Este método recibe el nombre de **Método de eliminación de Gauss**.

El método es aplicable a cualquier sistema de ecuaciones lineales independientemente del número de ecuaciones y de incógnitas que tenga. Para aplicarlo debemos escribir la matriz ampliada y realizar operaciones elementales en la matriz hasta llegar a una **matriz escalonada**.

Discutiremos el sistema equivalente calculando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada y comparándolos con el número de incógnitas. En virtud del **Teorema de Rouche-Frobenius** podremos decir si el sistema tiene o no solución y si esa solución es única.

Una vez discutido el sistema, la solución es sencilla. Debemos comenzar por la última ecuación del sistema equivalente escalonado calculando el valor de la incógnita e iremos sustituyendo en las ecuaciones anteriores hasta conseguir la **solución de todas las variables**.