# Construcción de Diagramas de Bode asintóticos

**Universidad Rey Juan Carlos**

**Área de Tecnología Electrónica**

Joaquín Vaquero López

**ÍNDICE**



## 1 INTRODUCCIÓN

El objeto del presente documento es el de dar unas normas prácticas para la construcción de Diagramas de Bode de la función de transferencia de un sistema lineal partiendo de su expresión factorizada en términos simples, es decir, descompuesta en productos de polos y ceros.

Un caso concreto de sistema lineal, a modo de ejemplo, puede ser un amplificador realizado con transistores, y la función de transferencia a representar sería la expresión de la ganancia del amplificador teniendo en cuenta las frecuencias de corte inferior y superior. Para bajas frecuencias son los condensadores de acoplo de señales de entrada y salida o de acoplo entre etapas (para amplificadores de varias etapas) y de desacoplo de resistencias los que determinan los polos y ceros a bajas frecuencias. Para altas frecuencias son las capacidades parásitas base-emisor (o puerta-fuente) y base-colector (o puerta-drenador) las que determinan los polos y ceros a altas frecuencias.

Existe mucha y muy buena bibliografía sobre el estudio de la respuesta en frecuencia (o análisis frecuencial) de sistemas lineales. A modo de ejemplo se incluyen las siguientes referencias disponibles en la biblioteca de la URJC:

- *Ingeniería de Control Moderna* (Modern Control Engineering ), Autor: Katsuhiko Ogata, Ed. Pearson. Contiene un desarrollo teórico y práctico completo sobre la respuesta en frecuencia y sus distintas formas de representarla, entre ellas los Diagramas de Bode.
- *Control de sistemas continuos. Problemas resueltos*, Autor: Antonio Barrientos, Ed. McGarw Hill.

  Libro de problemas muy práctico y en cada capítulo incluye una pequeña introducción teórica. En el Cap. 7 se encuentra cómo realizar un Diagrama de Bode asintótico. Este documento sigue la metodología ahí expuesta.
- *Circuitos electrónicos análisis, diseño y simulación*, Autor: N. R. Malik, Ed. Pearson.

  Libro de electrónica en el que se incluye un método práctico para la construcción de Diagramas de Bode asintóticos, así como una pequeña introducción.

## 2 DIAGRAMAS DE BODE

Los Diagramas de Bode son una forma de representar gráficamente la respuesta en frecuencia de un sistema lineal, invariante y estable, en régimen permanente que es excitado con una señal senoidal de amplitud constante y frecuencia variable (de 0 a ∞). La respuesta en frecuencia de este tipo de sistemas en régimen permanente viene dada por otra señal senoidal de igual frecuencia en todo momento a la frecuencia de la señal de entrada, pero de amplitud y fase distintas y dependientes ambas de la frecuencia.

Es decir, si la entrada al sistema es una función tipo:

$$x(t) = R \cdot sen(\omega t)$$

La salida será del tipo:

$$y(t) = A(j\omega) \cdot sen(\omega t + \theta)$$

Los valores de la **amplitud** de la salida se representan en un diagrama de módulos, en el que en el eje de abscisas se representa la frecuencia en escala logarítmica (habitualmente en rad/s) y en ordenadas se representa el módulo en decibelios, $20 \cdot \log(|\mathrm{A}|)$. La amplitud representa el **módulo de la ganancia** (módulo del valor de salida del sistema dividido entre valor de entrada al sistema) de la función de transferencia del sistema en función de la frecuencia.

Las pendientes de los diagramas de módulos se describen habitualmente en dB/década. Una década es un factor que multiplica por 10, por lo que cada vez que el módulo se multiplica/divide por 10, la ganancia en dB aumenta/disminuye 20dB:

Si la ganancia es $\mathrm{A[dB]} = 20 \cdot \log(|\mathrm{A}|)$ y se multiplica el módulo por 10, se obtiene:

$$A'[dB] = 20 \cdot \log(10 \cdot |A|) = 20 \cdot \log(|A|) + 20 \cdot \log(10) = A[dB] + 20[dB]$$

*Nota 1.- Las pendientes de los diagramas módulos también pueden describirse en dB/octava. Una octava es un factor que multiplica por 2, por lo que cada vez que el módulo se multiplica/divide por 2, la ganancia en dB aumenta/disminuye aproximadamente 6dB:*

*Si la ganancia es $A[dB] = 20 \cdot log(|A|)$ y multiplico el módulo por 2, se obtiene:*

$$A'[dB] = 20 \cdot log(2 \cdot |A|) = 20 \cdot log(|A|) + 20 \cdot log(2) \approx A[dB] + 6[dB]$$

*Nota 2.- El Belio (o Bell) se define como una figura adimensional para expresar la ganancia de potencia de un sistema.*

$$Ganancia\ de\ potencia\ A[B] = log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$$

*Es más habitual emplear el decibelio, que se define como:*

$$Ganancia\ de\ potencia\ A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$$

*donde $P_s$ es la potencia de salida y $P_e$ es la potencia de entrada. El uso de los decibelios permite manejar grandes ganancias de potencias con pequeños números expresados en decibelios. Además, cuando hay varias etapas seguidas cada una con una ganancia de potencia, la ganancia total es la suma de las ganancias de cada etapa expresada en decibelios, lo que simplifica los cálculos.*

*La potencia está relaciona con la tensión o la corriente a través de la impedancia, por lo que se puede expresar la ganancia de potencia como:*

$$Ganancia\ de\ potencia\ A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{V_s{}^2/R_s}{V_e{}^2/R_e}\right)$$

$$Ganancia\ de\ potencia\ A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{R_s \cdot I_s{}^2}{R_e \cdot I_e{}^2}\right)$$

***Únicamente** si las impedancias de entrada, $R_e$, y de salida, $R_s$, del sistema son iguales, se puede expresar la ganancia de potencia como:*

$$Ganancia\ de\ potencia\ A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{V_s{}^2}{V_e{}^2}\right) = 20 \cdot log\left(\frac{V_s}{V_e}\right)$$

$$Ganancia\ de\ potencia\ A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{I_s{}^2}{I_e{}^2}\right) = 20 \cdot log\left(\frac{I_s}{I_e}\right)$$

*Sin embargo, por analogía, es habitual expresar la **ganancia de tensión o de corriente** del sistema como:*

$$Ganancia\ de\ tensión\ A[dB] = 20 \cdot log\left(\frac{V_s}{V_e}\right);\ Ganancia\ de\ corriente\ A[dB] = 20 \cdot log\left(\frac{I_s}{I_e}\right)$$

Se denomina **frecuencia de corte** a aquella frecuencia en la que la potencia de la señal de salida $P_s$ es la mitad de la potencia de la señal de entrada $P_e$.

Expresada en decibelios se obtendría,

$$A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10 \cdot log\left(\frac{\frac{P_e}{2}}{P_e}\right) = 10 \cdot log\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot (log(1) - log(2))$$

$$A[dB] = -10 \cdot log(2) = -3{,}01dB \approx -3dB$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte es aquella frecuencia en que la ganancia es -3$dB$, o *"ha caído"* 3$dB$. Sin embargo, por analogía, es habitual expresar la frecuencia de corte de la ganancia de tensión o de corriente del sistema de la misma manera:

$$A[dB] = 20 \cdot log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = -3{,}01dB;\ \ log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \frac{-3{,}01}{20} = -0{,}15$$

$$alog(-0{,}15) = 0{,}71 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, para la corriente o la tensión, la frecuencia de corte es cuando la relación entre el módulo de la tensión (o corriente) de salida y la de entrada es:

$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Los valores de la **fase** se representan en un diagrama de fases, en el que en el eje de abscisas se representa la frecuencia en escala logarítmica (habitualmente en rad/s) y en ordenadas se representa la fase en grados. La fase representa el desfase entre la señal de entrada y la señal de salida del sistema, en función de la frecuencia.

Las pendientes de los diagramas fase se describen habitualmente en º/década.

La ventaja de este método es que se transforman productos y cocientes de números complejos en sumas (con su signo) de logaritmos de módulos y en sumas (con su signo) de argumentos.

Se parte de la función de transferencia del sistema (por ejemplo, ganancia de un amplificador) **factorizada** en términos simples (es decir, conociendo los polos y ceros de la ganancia, tanto a frecuencias bajas como altas). Los distintos tipos de términos, su representación gráfica y numérica tanto de la amplitud o módulo de la función de transferencia (ganancia) como de la fase de la misma se deducen a continuación y encuentran resumidos en la Tabla I.

a) Términos constantes K:

$A[dB] = 20 \cdot \log(K)$

$\psi(\omega) = 0º \qquad \forall\, K > 0$

$\psi(\omega) = -180º \quad \forall\, K > 0$

b) Polos y ceros en el origen $s^{\pm n} = j\omega^{\pm n}$:

$A(\omega)[dB] = 20 \cdot \log\left(\sqrt{\omega^{\pm 2n}}\right) = \pm n \cdot 20 \cdot \log(\omega)$, varía ±20dB por cada década que varía $\omega$

$\psi(\omega) = \arctan\dfrac{\omega}{0} = \pm n \cdot 90º$

c) Términos de primer orden $(s + a)^{\pm n} = (j\omega + a)^{\pm n}$:

$A(\omega)[dB] = 20 \cdot \log\left(\sqrt{a^2 + \omega^2}^{\pm n}\right) = \pm n \cdot 20 \cdot \log\left(\sqrt{a^2 + \omega^2}\right)$

Asintóticamente:

$\pm n \cdot 20 \cdot \log\ (a) \qquad \forall\ \omega \in (0, a)$

$\pm n \cdot 20 \cdot \left[\log\ (a) + \log\ \sqrt{2}\right] \qquad \forall\ \omega = a$, hay ±3dB más que antes.

$\pm n \cdot 20 \cdot \log\ (\omega) \qquad \forall\ \omega \in (a, \infty)$, varía ±20dB por cada década que varía ω.

$\psi(\omega) = \pm n \arctan\dfrac{\omega}{a}$

Asintóticamente:

$\psi(\omega) = 0º \qquad \forall\ \omega \in (0, a/10)$

$\psi(\omega) = \pm n \cdot 45º/dec \qquad \forall\ \omega \in (a/10\,, 10a)$

$\psi(\omega) = \pm n \cdot 90º \qquad \forall\ \omega \in (10a, \infty)$

d) Términos de segundo orden $(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)^{\pm 1}=((j\omega)^2+2\xi\omega_n j\omega+\omega_n^2)^{\pm 1}$:

$$A(\omega)[dB]=20\cdot\log\left(\sqrt{[{\omega_n}^2-\omega^2]^2+(2\xi\omega_n\omega)^2}\right)$$

Asintóticamente:

$\pm 20\cdot\log\ ({\omega_n}^2)$ $\quad\forall\ \omega\in(0,\omega_n)$

$\pm 20\cdot\log\ (2\xi{\omega_n}^2)\approx\pm 20\cdot\log\ ({\omega_n}^2)$ $\quad\forall\ \omega=\omega_n$, hay una sobreoscilación en $\omega_r$ de valor $M_r$*.

$\pm 20\cdot\log\ (\omega^2)=\pm 40\cdot\log\ (\omega)$ $\quad\forall\ \omega\in(\omega_n,\infty)$, varía ±40dB por cada década que varía $\omega$.

*siendo $\omega_r=\omega_n\cdot\sqrt{1-2\xi^2}\quad\forall\ \xi\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\quad\forall\ \xi\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\psi(\omega)=\pm\arctan\left[\frac{2\xi\omega_n\omega}{{\omega_n}^2-\omega^2}\right]$$

Asintóticamente:

$\psi(\omega)=0º$ $\quad\forall\ \omega\in(0,\omega_n/10)$

$\psi(\omega)=\pm 90º/dec$ $\quad\forall\ \omega\in(\omega_n/10\,,10\omega_n)$

$\psi(\omega)=\pm 180º$ $\quad\forall\ \omega\in(10\omega_n,\infty)$

La fase también depende de la amortiguación $\xi$.

e) Retardos puros $e^{-sT}=e^{-j\omega T}$:

$A(\omega)[dB]=0dB$

$\psi(\omega)=\omega T rad=-57{,}3\cdot\omega Tº$

## 3 MÉTODO PRÁCTICO DE CONSTRUCCION DE DIAGRAMAS DE BODE

a) Expresar la función de transferencia en términos simples (factorizarla).

Ejemplo: Función de transferencia $A(s)=\frac{3\cdot(s+1)}{s+2}$

b) Para el diagrama de módulos se construye una tabla donde las columnas representen las frecuencias a las que hay un cambio de pendiente y las filas los distintos términos. Se rellena con la aportación de cada término a la pendiente en múltiplo de 20dB/dec.

| Frecuencias vs. términos | | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 0 |
| $s+1$ | 0 | 1 | 1 |
| $1/(s+2)$ | 0 | 0 | -1 |
| Total | 0 | 1 | 0 |

c) Se calcula un punto de referencia para comenzar a dibujar.

A bajas frecuencias:

$$A_{\omega\to 0}[dB] = 20\log\frac{3\cdot(0+1)}{0+2} = 3{,}52dB$$

A altas frecuencias:

$$A_{\omega\to\infty}[dB] = 20\log(3) + 20\log(\frac{\infty}{\infty}) = 20\log(3) = 9{,}5dB$$

d) Para el diagrama de fases se construye una tabla donde las columnas representen las frecuencias a las que hay un cambio de pendiente y las filas los distintos términos. Se rellena con la aportación de cada término a la pendiente en múltiplo de 45º/dec.

| Frecuencias vs. términos | | 0,1 | 0,2 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s+1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $1/(s+2)$ | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| Total | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

e) Se calcula un punto de referencia para comenzar a dibujar.

A bajas frecuencias:

$$\psi_{\omega\to 0} = \left(n_{z-origen} - n_{p-origen}\right)\cdot 90º - \psi(K)$$

*Nota.- En sistemas de fase no mínima (algún polo o cero en el semiplano complejo positivo, hay que añadir un término, resultando* $\psi_{\omega\to 0} = \left(n_{z-origen} - n_{p-origen}\right)\cdot 90º - \psi(K) + 180º\cdot n_{z-positivos}$

A altas frecuencias y a modo de comprobación:

$$\psi_{\omega\to\infty} = \left(n_z - n_p\right)\cdot 90º - \psi(K)$$

*Nota.- En sistemas de fase no mínima (algún polo o cero en el semiplano complejo positivo, hay que añadir un término, resultando* $\psi_{\omega\to\infty} = \left(n_z - n_p\right)\cdot 90º - \psi(K) - 90º\cdot n_{z-positivos}$

f) Se dibuja los diagramas a partir de los datos anteriores.

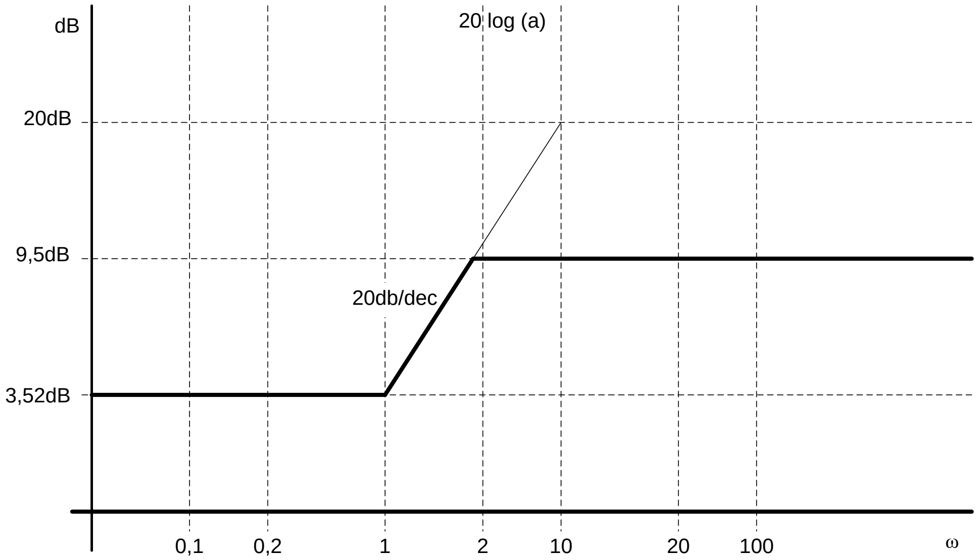



**Diagrama de Bode asintótico. Módulo**

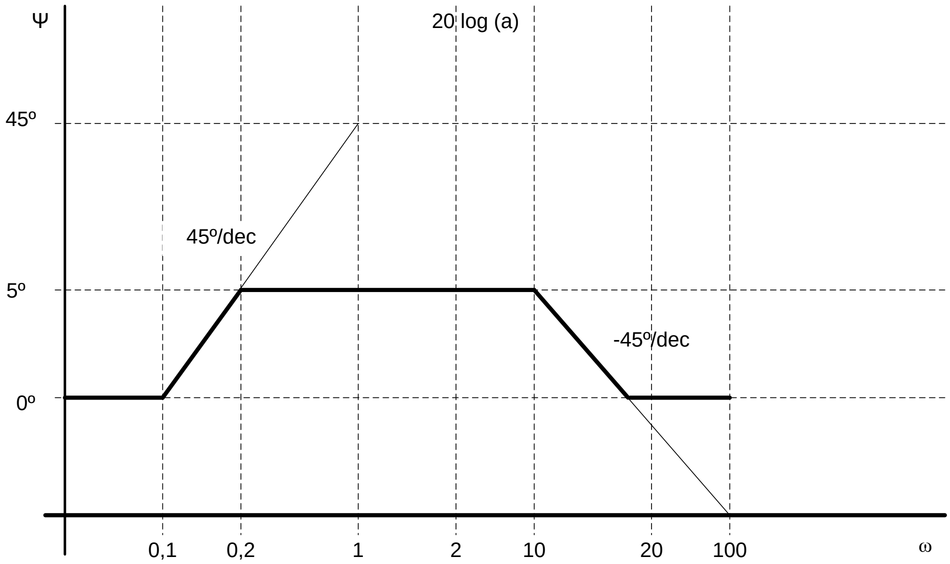
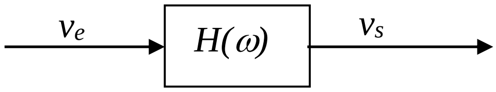



**Diagrama de Bode asintótico. Fase**

# ANEXO A: Módulo y fase de la función de transferencia de un circuito.

## a) Medida del módulo y fase de la función de transferencia de un circuito.

En general cualquier circuito en régimen senoidal se puede estudiar como una “caja negra” caracterizada por una función de transferencia $H(\omega)$ compleja, es decir $H(\omega)$ es un número complejo que depende de $\omega$.




Si tenemos una onda senoidal de entrada $v_e$, con frecuencia $\omega_0$, la salida del sistema viene dada por

$$v_s(\omega_0) = H(\omega_0)\, v_e(\omega_0)$$

Para medir el módulo y la fase de esta función de transferencia a una frecuencia $\omega$ determinada, bastará con visualizar en un osciloscopio las formas de onda de $v_e$ y $v_s$. El módulo de $H(\omega)$ se halla dividiendo la amplitud de la onda de salida entre la amplitud de la onda de entrada, es decir:

$$|H(\omega)| = \frac{|v_s(\omega)|}{|v_e(\omega)|}$$

Para medir el desfase en radianes o en grados es necesario leer el desfase en la escala de tiempo de un osciloscopio y después convertir los segundos a radianes o grados. Se debe recordar que un periodo $T$ (segundos) de una onda de una determinada frecuencia $\left(f = \frac{1}{T}\right)$ son $2\pi$ radianes, por lo que un tiempo de desfase $t$ (distancia en segundos entre dos máximos o dos mínimos) equivale a $x$ radianes o grados:

$$x_{rad} = \frac{2\pi}{T} t\, ; \quad x_{grados} = \frac{360^{o}}{T} t$$

En la siguiente figura se puede ver un ejemplo que ilustra lo anterior.

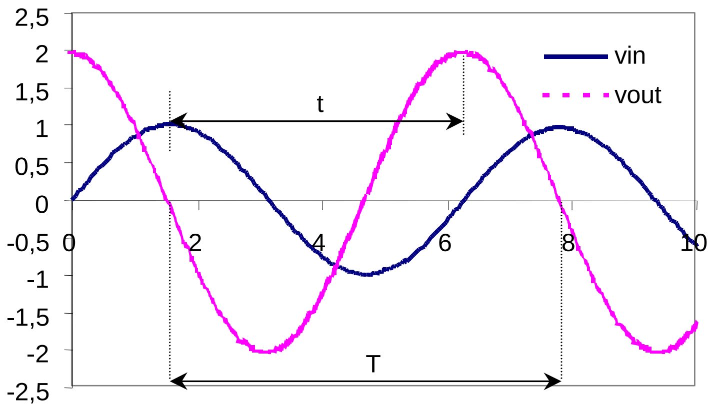



**Figura A.1**

En esta figura el módulo de la función de transferencia es 2 y el desfase es 90º.

### b) Cálculo del módulo y fase de la función de transferencia.

Mediante operaciones habituales de los números complejos, si se tiene una función de transferencia compleja *H(ω)* expresada como el cociente de dos números complejos, el módulo de dicha función será el cociente de los módulos de dichos números complejos y la fase será la diferencia entre la fase del numerador y la del denominador, es decir si

$$H(\omega) = \frac{a + jb}{c + jd}$$

entonces, el módulo de *H(ω)* es

$$|H(\omega)| = \frac{|a + jb|}{|c + jd|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

y la fase de *H(ω)* es

$$fase(H(\omega)) = fase(a + jb) - fase(c + jd) = arctg\left(\frac{b}{a}\right) - arctg\left(\frac{d}{c}\right)$$

### c) Cálculo de la frecuencia de corte.

Como se ha explicado anteriormente, se denomina **frecuencia de corte** a aquella frecuencia en la que la potencia de la señal de salida $P_s$ es la mitad de la potencia de la señal de entrada $P_e$.

Expresada en decibelios se obtendría,

$$A[dB] = 10 \cdot log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10 \cdot log\left(\frac{\frac{P_e}{2}}{P_e}\right) = 10 \cdot log\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \cdot (log(1) - log(2))$$

$$A[dB] = -10 \cdot log(2) = -3{,}01dB \approx -3dB$$

Por lo tanto, la frecuencia de corte es aquella frecuencia en que la ganancia es -3*dB*, o *"ha caído"* 3*dB*. Sin embargo, por analogía, es habitual expresar la frecuencia de corte de la ganancia de tensión o de corriente del sistema de la misma manera:

$$A[dB] = 20 \cdot log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = -3{,}01dB; \; log\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = \frac{-3{,}01}{20} = -0{,}15$$

$$alog(-0{,}15) = 0{,}71 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, para la corriente o la tensión, la frecuencia de corte es cuando la relación entre el módulo de la tensión (o corriente) de salida y la de entrada es:

$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|a + jb|}{|c + jd|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

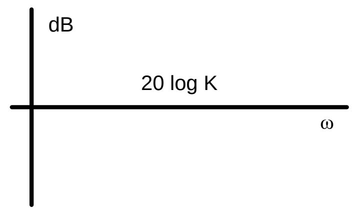
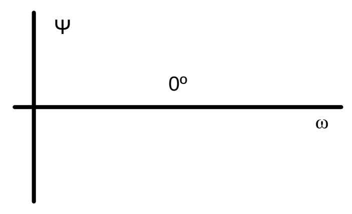
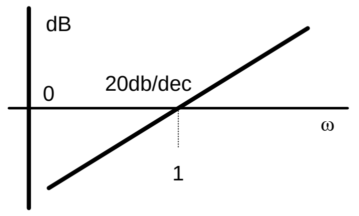
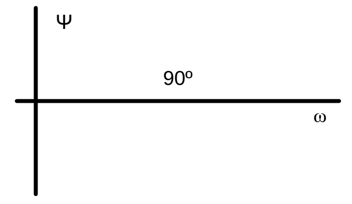
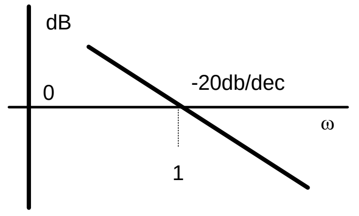
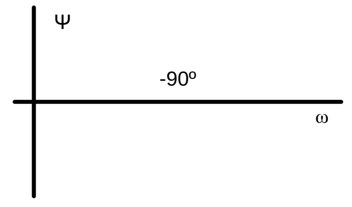
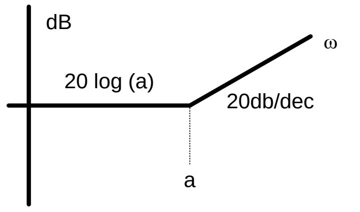
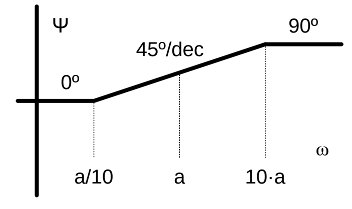
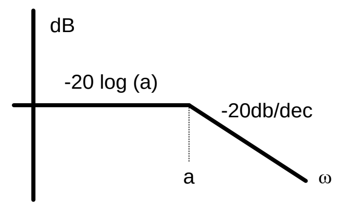
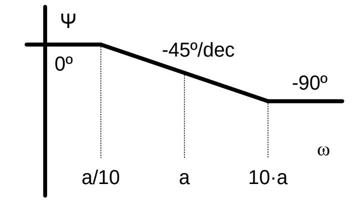
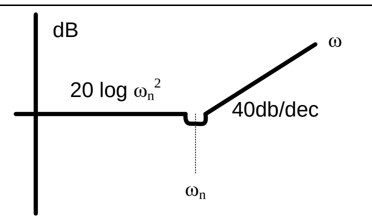
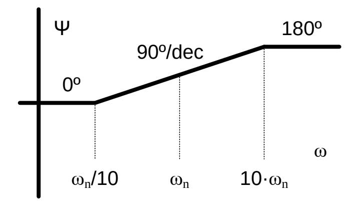
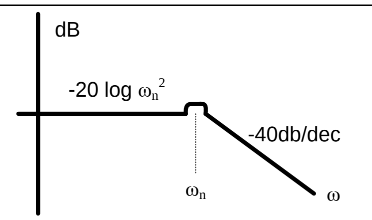
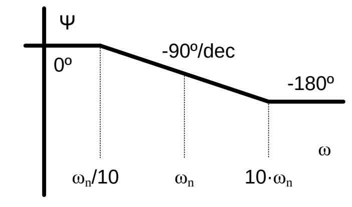
| **Términos** | **A = 20log \|A(jω)\|** | **Comentarios** | **φ = arg[A(jω)]** | **Comentarios** | **Otros** |
|---|---|---|---|---|---|
| Ganancia<br>K |  | Valor constante<br>$20 \cdot \log(K)$ |  | Valor constante<br>0º | Si K < 0<br>Fase = 180º |
| Cero en el origen<br>$s^n$ |  | Pendiente 20dB/dec<br>$A = 0[dB]$ en $\omega = 1$ |  | Valor constante<br>90º | Si $n$ > 1 la fase y la amplitud se multiplican por $n$ para todos los casos. |
| Polo en el origen<br>$1/s^n$ |  | Pendiente -20dB/dec<br>$A = 0[dB]$ en $\omega = 1$ |  | Valor constante<br>-90º | |
| Cero simple<br>$(s+a)^n$ |  | $20 \cdot \log\ (a) \quad \forall\ \omega \le a$<br>Pendiente 20dB/dec $\forall\ \omega > a$ |  | $(0, a/10)$ 0º<br>$(a/10\,,10a)$ 45º/dec<br>$(10a, \infty)$ 90º | Para $\omega = a$<br>$\psi = 45º$ |
| Polo simple<br>$1/(s+a)^n$ |  | $-20 \cdot \log\ (a) \quad \forall\ \omega \le a$<br>Pendiente -20dB/dec $\forall\ \omega > a$ |  | $(0, a/10)$ 0º<br>$(a/10\,,10a)$ $-$ 45º/dec<br>$(10a, \infty)$ $-$ 90º | Para $\omega = a$<br>$\psi = -45º$ |
| Cero complejo conjugado<br>$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ |  | $20 \cdot \log\ \omega_n^2 \quad \forall\ \omega \le \omega_n$<br>Pendiente 40dB/dec $\forall\ \omega > \omega_n$ |  | $(0, \omega_n/10)$ 0º<br>$(\omega_n/10\,,10\omega_n)$ 90º/dec<br>$(10\omega_n, \infty)$ 180º | Siendo $(s+a)^2 + b^2$ con amort. $\xi = tan\frac{b}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2}$:<br>- La frec. de resonancia<br>$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$<br>- El pico de res. en dB<br>$M_r = \dfrac{1}{2\xi\omega_n^2 \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$ |
| Polo complejo conjugado<br>$1/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$ |  | $-20 \cdot \log\ \omega_n^2 \quad \forall\ \omega \le \omega_n$<br>Pendiente -40dB/dec $\forall\ \omega > \omega_n$ |  | $(0, \omega_n/10)$ 0º<br>$(\omega_n/10\,,10\omega_n)$ $-$ 90º/dec<br>$(10\omega_n, \infty)$ $-$ 180º | |

**Tabla I. Aportación de pendiente de cada término en el diagrama de Módulos y en le de Argumentos.**