1. Sea R el conjunto de todos los números reales.

Consideremos en R las dos topologías:

$$T_{CF} = \{ R, \varnothing \} \cup \{ M \subset R \mid R - M \text{ es finito} \},$$

$$T_{CN} = \{ R, \varnothing \} \cup \{ A \subset R \mid R - A \text{ es numerable} \},$$

es decir, la topología de los complementos finitos y la topología de los complementos numerables.

Sea $\{ x_n \}_{n \in Z^+}$ la sucesión de números reales definida, para todo $n \in Z^+$, mediante

$$x_{2n} = 1,$$

$$x_{2n-1} = 2.$$

Estudiar si la sucesión $\{ x_n \}_{n \in Z^+}$ es convergente en (R, T_{CF}).
Estudiar si la sucesión $\{ x_n \}_{n \in Z^+}$ es convergente en (R, T_{CN}).

Justifique razonadamente las respuestas.

2. Sea R el conjunto de los números reales, T_u la topología usual de R, $T_D = \{ M \mid M \subset R \}$ la topología discreta de R, $T_I = \{ R, \varnothing \}$ la topología trivial o indiscreta de R.
Estudiar la conexión y la conexión por caminos de cada uno de los espacios topológicos productos siguientes:

$$(R, T_u) \times (R, T_D), \; (R, T_u) \times (R, T_I), \; (R, T_D) \times (R, T_I).$$

Justifique razonadamente las respuestas.

3. Sean Z^+ el conjunto de todos los números enteros positivos, $p, q \in R - Z^+$, con $p \neq q$, $X = Z^+ \cup \{ p \} \cup \{ q \}$, subconjunto de R,

$$T = \{ A \subset X \mid A \subset Z^+ \} \cup$$
$$\{ A \subset X \mid p \in A \text{ y } X - A \text{ es finito} \} \cup$$
$$\{ A \subset X \mid q \in A \text{ y } X - A \text{ es finito} \}.$$

Admitimos que T es una topología en el conjunto X.
Demostrar que el espacio topológico (X, T) *es compacto*.

Justifique razonadamente las respuestas.

Nota: Cada problema se puntuará sobre 10 *puntos, y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.*