

1. Sea R el conjunto de todos los números reales.
Consideremos en R la topología:

$$T_{CN} = \{ R, \emptyset \} \cup \{ A \subset R \mid R - A \text{ es numerable} \},$$

es decir, la topología de los complementos numerables.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ la sucesión de números reales definida, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, mediante

$$x_{2n} = \frac{1}{n},$$

$$x_{2n-1} = 3 - \frac{1}{n},$$

donde $\mathbb{Z}^+$ es el conjunto de los números enteros positivos.

Estudiar si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es convergente en (R, T_{CN}) .

Justifique razonadamente las respuestas.

2. Sea (R, T) el espacio topológico definido por el conjunto R de los números reales y la topología $T = T(B)$, engendrada por la base

$$B = \{ [a, b) \mid a, b \in R, a < b \};$$

sea $(R \times R, S)$, con $S = T(C)$, topología engendrada por la base

$$C = \{ [a, b) \times [c, d) \mid a, b, c, d \in R, a < b, c < d \};$$

sea $Y = \{ (x, y) \in R \times R \mid x = y \} \subset R \times R$, sea S_Y la topología de Y relativa de la topología S de $R \times R$, y sea $f : (R, T) \rightarrow (Y, S_Y)$ la aplicación definida mediante $f(x) = (x, x)$, para todo $x \in R$.

Estudiar si f es un homeomorfismo de (R, T) sobre (Y, S_Y) .

Justifique razonadamente las respuestas.

3. Sea (X, T) el espacio topológico definido por

$$X = \{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \} \cup \{ (x, y) \in R^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1 \},$$

y T es la topología de X relativa de la topología usual de R^2 , siendo R el conjunto de los números reales.

Estudiar si el espacio topológico (X, T) es conexo.

Justifique razonadamente las respuestas.

Nota 1: Cada problema se puntuará sobre 10 puntos, y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.

Nota 2: Material autorizado: Ninguno.