

1. Sea (X, T) el espacio topológico definido mediante

$$X = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$T = \{\emptyset, \{0\}, \{3\}, \{0, 3\}, \{0, 1, 2\}, X\}.$$

Estudiar si el espacio topológico (X, T) es *regular*.

Justifique sus respuestas.

2. Sea X el conjunto

$$X = R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}.$$

Para cada $b \in R$, sea A_b la recta

$$A_b = \{(x, y) \in R^2 \mid y = b\},$$

y sea V_b el conjunto que contiene a un único punto $V_b = \{(0, b)\}$.

Sea T la topología en el conjunto X cuya base es

$$B = \{A_b \mid b \in R\} \cup \{V_b \mid b \in R\}.$$

Estudiar si el espacio topológico (X, T) es *separable* (se trata de una propiedad de numerabilidad), y si (X, T) cumple el *Segundo Axioma de Numerabilidad*.

Justifique sus respuestas.

3. Sea f la aplicación del conjunto

$$R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$$

en el espacio topológico (R, T_u) , definida, para cada $(x, y) \in R^2$, mediante

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

y sea T la topología en R^2 inicial para la aplicación $f : R^2 \rightarrow (R, T_u)$.

Se pide:

a) Estudiar si (R^2, T) es *compacto*.

b) Estudiar si (R^2, T) es *conexo por caminos*.

Justifique sus respuestas.

Nota 1: Cada problema se calificará sobre 10 puntos y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.

Nota 2: Material autorizado: Ninguno.