

1. En (R^3, T_u^3) , se considera el subconjunto

$$X = \{ (x, y, x^2 + y^2) \mid x \in R, y \in R, x^2 + y^2 \leq 1 \}.$$

Estudiar si el espacio topológico $(X, (T_u^3)_X)$ es *contractible*.

Justifique sus respuestas.

2. Un grupo abeliano G está determinado por el conjunto de generadores $\{ a, b \}$ y por el sistema completo de relaciones

$$\begin{aligned} 2a + 5b &= 0, \\ 5a - 3b &= 0. \end{aligned}$$

Se pide:

a) Determinar el *número de Betti* y los *coeficientes de torsión* de G .

b) Estudiar si G es un *grupo abeliano libre*.

c) Determinar el *subgrupo de torsión* de G .

d) Estudiar si G es un *conjunto finito*.

e) Determinar *todos los subgrupos* de G .

Justifique sus respuestas.

3. En (R^2, T_u^2) , sean

$$\begin{aligned} C &= \{ (x, y) \in R^2 \mid (x + 2)^2 + y^2 = 1 \}, \\ D &= \{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}, \\ E &= \{ (x, y) \in R^2 \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1 \}, \\ X &= C \cup D \cup E. \end{aligned}$$

a) *Triangular* X , es decir, obtener un complejo simplicial geométrico orientado K tal que

$(X, (T_u^2)_X)$ sea *homeomorfo* al poliedro geométrico $(\mid K \mid, (T_u^2)_{\mid K \mid})$.

b) *Determinar los grupos de homología simplicial* $H_1(K)$ y $H_2(K)$.

c) *Estudiar si el espacio topológico* $(X, (T_u^2)_X)$ *es contractible*.

Justifique sus respuestas.

Nota 1: Cada problema se calificará sobre 10 puntos y después se calculará la media aritmética de las tres calificaciones así obtenidas.

Nota 2: Material autorizado: Ninguno.