1. (**2 puntos**)

a) Definición de espacio topológico *compacto.*

b) Definición de espacio topológico *conexo.*

2.

a) El espacio topológico *producto*

$$(\mathbb{R}, T_u) \times (\mathbb{R}, T_u) = (\mathbb{R}^2, T_u^2).$$

¿es conexo?

Justifique su respuesta.

b) *El subconjunto*

$$\mathbb{S}^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

del espacio topológico $(\mathbb{R}, T_u) \times (\mathbb{R}, T_u) = (\mathbb{R}^2, T_u^2)$,
¿es conexo?

Justifique su respuesta.

(**4 puntos**)

3. Sean $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de todos los números enteros positivos, $p, q \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^+$, con $p \neq q$, $X = \mathbb{Z}^+ \cup \{ p \} \cup \{ q \}$, X subconjunto de $\mathbb{R}$,

$$T = \{ A \subset X \mid A \subset \mathbb{Z}^+ \} \cup$$
$$\{ A \subset X \mid p \in A \text{ y } X - A \text{ es finito} \} \cup$$
$$\{ A \subset X \mid q \in A \text{ y } X - A \text{ es finito} \}.$$

Admitimos que T es una *topología* en el conjunto X.
Estudiar si el espacio topológico (X, T) *es compacto.*
Justifique su respuesta.
(**4 puntos**)