1. (3 puntos)
En el conjunto R de los números reales, definimos la topología T mediante

$$T = \{ R, \varnothing \} \cup \{ (a, \longrightarrow) \mid a \in R \},$$

siendo, para cada $a \in R$,

$$(a, \longrightarrow) = \{ x \in R \mid x > a \}.$$

Estudie si el espacio (R, T) cumple el Primer Axioma de Numerabilidad. Justifique su respuesta.

2. (4 puntos)
Estudie si es compacto el espacio topológico producto

$$(R, T) \times ([0, 1], T'),$$

siendo R el conjunto de los números reales, T la topología de los complementos finitos en R, es decir,

$$T = \{ R, \varnothing \} \cup \{ M \subset R \mid R - M \text{ es finito} \},$$

T' la topología en $[0, 1]$ relativa de la topología $T(B)$ en R cuya base es

$$B = \{ [a, b) \mid a, b \in R, a < b \}.$$

Justifique su respuesta.

3. (3 puntos)

En el espacio topológico (R^2, T_u^2) consideramos los subconjuntos

$$A_n = \{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = n^2 \}, \text{ para cada } n \in Z, n > 0,$$

$$B = \{ (x, x) \in R^2 \mid x \in R , x \geq 0 \},$$

$$X = (\bigcup_{n \in Z, n > 0} A_n) \cup B.$$

Estudie si el espacio topológico (X, T) es conexo, siendo $T = (T_u^2)_X$ la topología de X relativa de la topología usual de R^2.

Justifique su respuesta.