1. (3 puntos)
En el conjunto Z de los números enteros, definimos la topología

$$T \;=\; \{\; Z,\; \varnothing \;\} \;\cup\; \{\; G_n \mid n \;\in\; Z \;\},$$

siendo, para cada $n \;\in\; Z$,

$$G_n \;=\; \{\; x \;\in\; Z \mid x \;\geq\; n \;\}.$$

Estudie si el espacio topológico $(Z,\; T)$ es de Hausdorff.
Justifique su respuesta.

2. (4 puntos)
En el conjunto R de los números reales, consideremos la topología

$T \;=\; T(B)$ generada por la base

$$B \;=\; \{\; [a,\; b) \mid a,\; b \;\in\; R,\; a \;<\; b \;\}.$$

(a) Estudie si $(R,\; T(B))$ es compacto.

(b) Sea $f \;:\; (R,\; T(B)) \;\longrightarrow\; (R,\; T(B))$ la aplicación definida, para cada $x \;\in\; R$, mediante

$$f(x) \;=\; 2x.$$

Estudie si $f \;:\; (R,\; T(B)) \;\longrightarrow\; (R,\; T(B))$ es una aplicación continua.

Justifique sus respuestas.

3. (3 puntos)

Se considera, en el espacio topológico $(R^2,\; T_u^2)$, el subconjunto

$$X \;=\; \bigcup_{\;q \;\in\; Q,\; q \;>\; 0} \;\{\; (x,\; y) \;\in\; R^2 \mid x^2 \;+\; y^2 \;=\; q^2 \;\}.$$

Estudie si el espacio topológico $(X,\; T)$ es conexo, siendo $T \;=\; (T_u^2)_X$ la topología de X relativa de la topología usual de R^2.

Justifique su respuesta.