COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean los puntos $\mathbf{p}_0 = (0,1)$, $\mathbf{p}_1 = (1,-1)$, $\mathbf{p}_2 = (2,1)$. ¿Son una referencia afín? En caso de que lo sean, determine las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ del punto $(-1,3)$ respecto a esta referencia.

   Solución:

2. (1 punto) Sea $\mathbf{v} = (1,-1,-1)\times(2,-1,0)$, es decir, es el producto vectorial de $(1,-1,-1)$ y $(2,-1,0)$. Determine $\mathbf{v}$. ¿Es perpendicular al vector $\mathbf{u} = (2,-1,0)$?

   Solución:

3. (1 punto) Determine el vector tangente y la recta tangente, en $t = 0$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \; z(t) = e^{t^2}.$$

Solución:

4. (1 punto) Escriba la ecuación de una curva $\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ que sea regular, y con $\mathbf{x}(0) = (1,0,2)$ y cuya velocidad no sea un vector constante. Compruebe que es así.

   Nota: Muchas curvas polinómicas, con al menos una componente de grado 2, lo cumplen.

   Solución:

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 + 2t - 1, t^2 + 1\right).$$

   a) Estudie si es una curva regular y si tiene puntos múltiples.

   b) Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(t)$.

   c) Determine el centro de curvatura en $\mathbf{x}(0)$. Escriba la ecuación de la circunferencia osculadora en $\mathbf{x}(0)$

   Nota: Cada apartado vale 1 punto.

6. (3 puntos) Considere la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(-\frac{1}{2}\cos(2u), \frac{1}{2}\text{sen}\,(2u), -v\right), \quad u, v \in [0, 2\pi].$$

   Compruebe que la parametrización es regular y determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $u_0 = 0, u_1 = \pi, v_0 = 0$ y $v_1 = \pi$.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k\left(t\right)=\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\left(\frac{d^{2}\mathbf{x}}{dt^{2}}\right)\right)\frac{1}{\left\|d\mathbf{x}/dt\right\|^{3}}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k\left(x,y\right)=\frac{\left(-f_{y},f_{x}\right)H\left(f\right)\left(-f_{y},f_{x}\right)^{t}}{\left\|\nabla f\right\|^{3}}.$$

Curvas en el espacio:

$$\begin{aligned}k\left(t\right)&=\frac{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|^{3}},\\ \tau\left(t\right)&=-\frac{\det\left(\mathbf{x}'\left(t\right),\mathbf{x}''\left(t\right),\mathbf{x}'''\left(t\right)\right)}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|^{2}}.\end{aligned}$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$\begin{aligned}E=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u},\quad F=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v},\quad G=\mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v}.\\ e=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu},\quad f=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv},\quad g=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}.\end{aligned}$$

Curvaturas:

$$\begin{aligned}K&=\frac{eg-f^{2}}{EG-F^{2}},\\ H&=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^{2}\right)}.\end{aligned}$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^{2}\left(EG-F^{2}\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^{2}+eg=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$\left(eF-fE\right)\left(du\right)^{2}+\left(eG-gE\right)dudv+\left(fG-gF\right)\left(dv\right)^{2}=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e\left(du\right)^{2}+2fdudv+g\left(dv\right)^{2}=0.$$