

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado (se sugiere hacerlo en folio aparte y luego pasarlo). Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Defina isometría.

Solución:

2. (1 punto) Estudie si la curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\sin t, t^2)$ es regular. Determine sus puntos múltiples, si los tiene.

Solución:

3. (1 punto) Determine la envolvente de la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje OX , dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = (\lambda + \cos t, \sin t).$$

Solución:

4. (1 punto) Determine si la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sin u, \cos(uv), \tan v) \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

tiene una parametrización regular.

Solución:

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea, para $t \in [-2, 2]$, C la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2 - 1, 2t + 1).$$

- a) Estudie si es una curva regular.
- b) Determine el triedro de Frenet en $\mathbf{x}(0)$.
- c) Determine las ecuaciones del plano rectificante y de la recta binormal por $\mathbf{x}(0)$.

Nota: Cada apartado vale 1 punto.

6. (3 puntos) Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Determine los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en la elipse dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$$

en el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 1)$.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2(EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0.$$