

COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado (se sugiere hacerlo en folio aparte y luego pasarlo). Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = (|x| + y, e^{xy})$$

Estudie si f tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$ y determínelas si existen.

Solución:

2. (1 punto) Sea la curva definida por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, e^t t^2)$$

si $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Estudie en qué puntos es regular.

Solución:

3. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio r , definida por la ecuación, para $t \in [0, \pi]$, por

$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, \pi/3)$.

Solución:

4. (1 punto) Sea, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a, b]}$$

una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas. Defina su envolvente.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$.

- a) (1 punto) Escriba su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0, 1]$.
- b) (1 punto) Determine el triedro de Frenet de esta curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.
- c) (1 punto) Determine la ecuación del plano rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$

6. Sea S la parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 parametrizada por

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$.

- a) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.
- b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
- c) (0.75 puntos) Determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
- d) (0.75 puntos) A partir del valor anterior, razone cuál es el área de la esfera.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x, y) = \frac{(-f_y, f_x) H(f) (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2(EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0.$$