COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado (se sugiere hacerlo en folio aparte y luego pasarlo). Desarrolle la solución a los ejercicios 5 y 6 en otra hoja de examen, en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - y^5 - 1$. En la ecuación $f(x, y) = 0$, ¿se puede expresar la variable x en función de y?

   Solución:

2. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0, 0)$ y de radio r, definida por la ecuación, para $t \in [0, \pi]$, por

$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t).$$

   Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, \pi/3)$.

   Solución:

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, \cos t, t^4 - 2t^2 + 2\right).$$

   Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

Solución:

4. (1 punto) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas en el espacio.
   Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = t \operatorname{sen}^2 t.$$

   a) (1 punto) Determine sus puntos múltiples, si existen.
   b) (1 punto) Determine el vector tangente y el vector normal en un punto (x_0, y_0).
   c) (1 punto) Determine la curvatura en un punto (x_0, y_0).

6. Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u^2 - v^2, u^2 + v^2, v\right)$$

   en $D = (0, 2) \times (0, 2)$.

   a) (1.5 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.
   b) (1.5 puntos) Clasifique sus puntos.

Curvas

Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$
$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies

Formas fundamentales:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$
$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}.$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\, k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\, dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f\, dudv + g(dv)^2 = 0.$$