COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0,\infty)\times[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^4 + 2$. ¿Se puede expresar una de las variables en función de la otra?

   Solución:

2. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\alpha(t) = (t, t^3, t^2)$ con el vector $(1, 0, -1)$. Con determinar su coseno es suficiente.

   Solución:

3. (1 punto) Determine si la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^4 - t^2, t^2 - 2t, 2t^2\right)$$

   tiene puntos múltiples.

   Solución:

4. (1 punto) ¿Cuál es la expresión de una superficie de Bézier dada por la malla de control $\{\mathbf{b}_{ij}\}$?

   Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 - t, t^2 + t).$$

   a) (1 punto) Escríbase como una curva de Bézier considerando $t \in [0,1]$.

   b) (1 punto) Estudie si es una curva regular para $t \in \mathbb{R}$. Estudie si tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determínelos, en caso de que los tenga.

   c) (1 punto) Determine la recta tangente y la recta normal en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

6. Sea S la superficie $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 - u^4 + v^6)$ donde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y sea C la curva dada por $\mathbf{x}(t) = (t, 0, t^2 - t^4)$.

   a) (0.75 puntos) Determine el vector normal a la superficie en un punto genérico $\mathbf{x}(u,v)$.

   b) (0.75 puntos) Determine una base del plano tangente y de la recta normal a S en $\mathbf{x}(0,0)$.

   c) (0.75 puntos) Determine el vector curvatura en $\mathbf{x}(0,0) \in C$.

   d) (0.75 puntos) Determine los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en $\mathbf{x}(0,0)$ para la curva C.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right) \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{array}{l} E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \\ e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{array}$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\,k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\,du\,dv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g(dv)^2 = 0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\ (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$