COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + \cos(y^4) - 1$. ¿Se puede expresar la variable x en función de y?

   Solución:

2. (1 punto) Escriba los polinomios de Bernstein $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ y $B_3^2(t)$.

   Solución:

3. (1 punto) Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (1, 3t^3, t^2 + t - 1)$ en cualquier punto $\mathbf{x}(t)$, con el vector $(1, 1, -1)$. Es suficiente con dar la expresión de su coseno.

   Solución:

4. (1 punto) Sea $\mathbf{x} : (-2, 2) \to \mathbb{R}^3$ la curva de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t).$$

Determine la ecuación del plano normal a la curva en $\mathbf{x}(\pi)$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 - 3t - 1, t^2 - 1).$$

a) (1 punto) Escríbase como una curva de Bézier considerando $t \in [0, 1]$.

b) (1 punto) Estudie si es una curva regular para $t \in \mathbb{R}$. Estudie si tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determínelos, en caso de que los tenga.

c) (1 punto) Determine la recta tangente y la recta normal en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$..

6. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v).$$

Determínense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en cada una de las siguientes curvas contenidas en él, en el punto que se indica.

a) (1 punto) En el punto $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 0)$ de la recta dada por $\mathbf{x}(s) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}, s\right)$.

b) (1 punto) En el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 1)$ de la circunferencia dada por $\mathbf{x}(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s$

c) (1 punto) En el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$ de la hélice dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k\left(t\right)=\det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\left(\frac{d^{2}\mathbf{x}}{dt^{2}}\right)\right)\frac{1}{\left\|d\mathbf{x}/dt\right\|^{3}}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k\left(x,y\right)=\frac{\left(-f_{y},f_{x}\right)H\left(f\right)\left(-f_{y},f_{x}\right)^{t}}{\left\|\nabla f\right\|^{3}}.$$

Curvas en el espacio:

$$k\left(t\right)=\frac{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|^{3}},\quad\tau\left(t\right)=-\frac{\det\left(\mathbf{x}'\left(t\right),\mathbf{x}''\left(t\right),\mathbf{x}'''\left(t\right)\right)}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|^{2}}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{array}{lll}E=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{u}, & F=\mathbf{x}_{u}\cdot\mathbf{x}_{v}, & G=\mathbf{x}_{v}\cdot\mathbf{x}_{v}.\\ e=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uu}, & f=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv}, & g=\mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv}.\end{array}$$

Curvaturas:

$$K=\frac{eg-f^{2}}{EG-F^{2}},\quad H=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2\left(EG-F^{2}\right)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^{2}\left(EG-F^{2}\right)-\left(Eg-2Ff+Ge\right)k-f^{2}+eg=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$\left(eF-fE\right)\left(du\right)^{2}+\left(eG-gE\right)dudv+\left(fG-gF\right)\left(dv\right)^{2}=0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e\left(du\right)^{2}+2fdudv+g\left(dv\right)^{2}=0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\left(\begin{array}{cc}E & F\\ F & G\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}u''\\ v''\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\left(u'\right)^{2}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{u}+2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{u}+\left(v'\right)^{2}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{u}\\ \left(u'\right)^{2}\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{v}+2u'v'\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{v}+\left(v'\right)^{2}\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{v}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right).$$