EXAMEN EA. ANILLOS. MAYO 2016. SOLUCIÓN

1º a) y b) en los apuntes de teoría.

c) Se demostró en teoría que los ideales de $\mathbb{Z}$ son todos los de la forma

$$m\mathbb{Z} = \{ m \cdot a \,/\, a \in \mathbb{Z} \}$$

donde $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$.

Nótese que esto incluye el ideal $\{0\}$, cuando $m=0$ y el total $\mathbb{Z}$, cuando $m=1$.

El total $\mathbb{Z}$ no es maximal ni primo porque el total se excluye de estas dos definiciones.

El ideal $\{0\}$ es primo pero no maximal, ya que

$\mathbb{Z}/\{0\} \cong \mathbb{Z}$ que es D.I. pero no cuerpo.

Para el resto de los casos ($m \geq 2$) se tiene que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ y sabemos que

$\mathbb{Z}_m$ cuerpo $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_m$ D.I. $\Leftrightarrow$ m primo.

Por tanto

$m\mathbb{Z}$ maximal $\Leftrightarrow$ $m\mathbb{Z}$ primo $\Leftrightarrow$ m primo.

2º a) FALSO

$x^{20}+2$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$ ya que todo polinomio de grado ≥ 2 lo es.

b) FALSO

$x^{20}+2$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$ ya que todo polinomio de grado ≥ 3 lo es.

c) VERDADERO

Podemos aplicar el criterio de Eisenstein con $p=2$, que implica que $x^{20}+2$ es irreducible.

d) FALSO

$(1)^{20}+2 = 1+2 = 0 \mod 3$

luego $x^{20}+2$ tiene a 1 como raíz, por tanto $x-1$ divide a $x^{20}+2$, con lo cual es reducible.

e) FALSO

Todo isomorfismo de anillos $f: A \longrightarrow B$ cumple que $f(1_A) = 1_B$.

En este caso $f([1]_4) = [3]_4 \neq [1]_4$.

luego f no puede ser isomorfismo.

f) VERDADERO

Veamos que f es biyectiva: se cumple

$$f(f(a+bi)) = f(a-bi) = a+bi$$

$\Rightarrow f \circ f = id_{\mathbb{C}} \Rightarrow f$ tiene inversa $\Rightarrow f$ biyectiva.

f respeta la suma:

$$f((a+bi)+(c+di)) = f((a+c)+i(b+d)) =$$
$$= (a+c) - i(b+d) = (a-ib)+(c-id) =$$
$$= f(a+bi) + f(c+di)$$

f respeta el producto:

$$f((a+bi)(c+di)) = f(ac+adi+bci-bd) =$$
$$= (ac-bd)-(ad+bc)i$$
$$f(a+bi)\cdot f(c+di) = (a-bi)(c-di) =$$
$$= ac-adi-bci-bd = (ac-bd)-(ad+bc)i$$

Se ha obtenido el mismo resultado, luego f respeta el producto.

Por tanto f es isomorfismo de anillos.

3º a) Veamos que $\underbrace{x^2+1}_{p(x)}$ es ~~irreducible~~ reducible sobre $\mathbb{Z}_5[x]$

$p(0)=1$
$p(1)=2$
$p(2)=0 \Rightarrow 2$ es raíz de $p \Rightarrow p$ reducible

Sabemos por teoría que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces

$$\mathbb{K}[x]/(p(x)) \text{ cuerpo} \Leftrightarrow p(x) \text{ irreducible.}$$

Por tanto A/I <u>NO</u> es cuerpo

(el enunciado es erróneo).

b) En el cociente $A/_I$ tenemos que

$$[x^2+1]_I = [0]_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [1]_I = [-x^2]_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [1]_I = [x]_I[-x]_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ([x]_I)^{-1} = [-x]_I$$

c) Veamos que se puede encontrar un representante de cualquier elemento del cociente de modo que ese representante tenga grado ≤ 1.
Usamos el teorema de la división en $\mathbb{Z}_5[x]$ (podemos hacerlo porque $\mathbb{Z}_5$ es cuerpo).
Si $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$, entonces $\exists\, q(x), r(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ tales que

$$f(x) = (x^2+1)\cdot q(x) + r(x) \quad \text{con} \begin{cases} gr(r(x)) \leq 1 \\ \text{ó} \\ r(x) = 0. \end{cases}$$

$$[f(x)]_I = \underbrace{[x^2+1]_I}_{\substack{\parallel \\ [0]_I}}[q(x)]_I + [r(x)]_I = [r(x)]_I$$

luego $r(x)$, de grado ≤ 1 ó nulo es representante de $[f(x)]_I$. Por tanto

$$A/_I = \{ [a+bx]_I \,/\, a,b \in \mathbb{Z}_5[x] \}$$

Todas estas clases son distintas entre sí y que la resta de dos polinomios de grado ≤ 1 sólo puede ser multiplo de x^2+1 si los 2 polinomios son iguales.

Como hay 5 opciones para el coeficiente a y otras 5 para b, tenemos que

A/I tiene $5^2 = 25$ elementos.