EA. Grado en Matemáticas. 12 de mayo de 2017.

Parte I: anillos.

---

1. (3 puntos) Sean K un cuerpo $A = K[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en K.

   a) (1 punto) Define polinomio irreducible en A. Incluye las definiciones de que un polinomio divida a otro y de que dos polinomios sean asociados.

   b) (1 punto) Demuestra que un polinomio es invertible en A si y solo si es un polinomio constante distinto de cero.

   c) (1 punto) Enuncia el criterio de Eisenstein y el criterio modular para la divisibilidad de polinomios.

2. (3 puntos) Considera los anillos $A = \mathbb{Z}_{20}$, $B = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ y $C = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$.

   a) (1,5 puntos) Para cada dos de estos anillos, determina si son isomorfos. En caso negativo, justifica tu respuesta y en caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre ellos.

   b) (1,5 puntos) Encuentra todos los ideales de A. Di cuáles de ellos son primos y cuáles no. Di cuáles son maximales y cuáles no. Justifica tus respuestas.

   Nota: Puedes usar libremente resultados que hayamos visto en teoría o en ejercicios (mencionando qué resultado estás usando).

3. (4 puntos + Extra: 1 punto) Considera los anillos $A = \mathbb{Z}_{20}$ y $B = \mathbb{Z}_{10}$ y la función $f : A \longrightarrow B$ definida como $f([a]_{20}) = [6a]_{10}$.

   a) (0,5 puntos) Demuestra que f está bien definida.

   b) (1 punto) Demuestra que f es un homomorfismo de anillos.

   c) (1 punto) Halla $Ker(f)$ e $Im(f)$.

   d) (0,5 puntos) Determina si f es inyectiva y si es suprayectiva.

   e) (1 punto) Construye explícitamente el cociente $A/Ker(f)$, hallando las clases de equivalencia que lo forman y los elementos que forman cada una de dichas clases.

   f) (Extra: 1 punto) Usa el primer teorema de isomorfía para encontrar un subanillo C de B al que sea isomorfo $A/Ker(f)$. Escribe explícitamente el isomorfismo. ¿Tiene unidad C?

Parte II: grupos.

---

4. (3 puntos) Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfía para grupos. Incluye la demostración de que si $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos entonces $Ker(f)$ es subgrupo de G y además es normal.

5. (4 puntos + Extra: 1 punto) Consideramos el grupo multiplicativo $G = \mathbb{Z}_{21}^*$. Se sabe que en G el máximo de los órdenes de los elementos es 6 (este hecho es parte del enunciado, se da por supuesto y no es necesario demostrarlo).

   a) (1 punto) ¿Es G isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}_{12}$? En caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre los dos grupos, en caso negativo justifica tu respuesta.

   b) (1 punto) ¿Es G isomorfo al grupo alternado A_4? En caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre los dos grupos, en caso negativo justifica tu respuesta.

   c) (0,5 puntos) Consideramos $H =< 8 >$ como subgrupo de G. Demuestra, **sin hacer operaciones**, que H es subgrupo normal de G.

   d) (1,5 puntos) Construye explícitamente el cociente G/H, diciendo cuántos elementos tiene y hallando todas las clases de equivalencia y los elementos de G que constituyen cada una de esas clases.

   e) (Extra: 1 punto) Sea $R_6 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^6 = 1\}$ el grupo multiplicativo formado por las raíces sextas de la unidad. ¿Es G/H isomorfo a R_6? En caso afirmativo construye explícitamente un isomorfismo entre los dos grupos, en caso negativo justifica tu respuesta.

6. (3 puntos) Sean $G = D_8$ y $H = \{id, \sigma^4, \tau, \tau\sigma^4\}$, donde $\sigma = (12345678)$ y $\tau = (28)(37)(46)$. Se da por supuesto que H es un subgrupo de G.

   a) (1 punto) Demuestra que H no es normal en G.

   b) (2 puntos) Considera la acción natural de H sobre $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (cada permutación es una función de B en B, esta es la acción que se está considerando). Halla razonadamente las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B bajo esta acción.