Examen EA. 12/05/2017. Solución

Parte I: anillos.

1º Teoría

2º @ Hemos demostrado en un ejercicio que si $mcd(a,b)=1$ entonces

$\mathbb{Z}_{ab}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$

y que un isomorfismo entre los dos anillos es

$$f: \mathbb{Z}_{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$$
$$[x]_{ab} \longmapsto ([x]_a, [x]_b).$$

Por tanto, como $mcd(4,5)=1$ tenemos que $A=\mathbb{Z}_{20}$ y $B=\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ son isomorfos y la función f antes descrita es un isomorfismo entre ellos.

Por otro lado el número de elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{20}$ es $\varphi(20)=\varphi(4)\varphi(5)=2\cdot 4=8$

El número de elementos invertibles de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$ es el número de invertibles de $\mathbb{Z}_2$ (hay 1) por el número de invertibles de $\mathbb{Z}_{10}$ (hay 4)

Por tanto hay 4 elementos invertibles en C.

Luego A y C no son isomorfos

Como A y B son isomorfos, C tampoco puede ser isomorfo a B

b) Sabemos, por un ejercicio de clase, que los ideales de $\mathbb{Z}_n$ son los ideales principales generados por los divisores de n y el ideal $\{0\}$. Por tanto los ~~divisores~~ ideales de $\mathbb{Z}_{20}$ son:

NOTACIÓN: Omitimos $[\cdot]_{20}$

$\{0\} = (20)$

$(1) = \mathbb{Z}_{20}$

$(2) = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$

$(4) = \{0,4,8,12,16\}$

$(5) = \{0,5,10,15\}$

$(10) = \{0,10\}$

De estos $\mathbb{Z}_{20}$ no es maximal ni primo porque el total no se incluye en estas definiciones.

$\{0\}$ no es primo porque $\underset{\{0\}}{\underset{\not\in}{2}} \cdot \underset{\{0\}}{\underset{\not\in}{10}} = 20 = \underset{\{0\}}{\underset{\in}{0}}$.

(4) no es primo porque $\underset{(4)}{\underset{\not\in}{2}} \cdot \underset{(4)}{\underset{\not\in}{2}} = \underset{(4)}{\underset{\in}{4}}$

(10) no es primo porque $\underset{(10)}{\underset{\not\in}{2}} \cdot \underset{(10)}{\underset{\not\in}{5}} = \underset{(10)}{\underset{\in}{10}}$

Como $\mathbb{Z}_{20}$ es un a.c.c.u, al no ser primos estos ideales, tampoco pueden ser maximales.

(2) es maximal porque no está contenido en ningún otro ideal salvo él mismo y el total.

Lo mismo pasa con (5)

Como son maximales, también son primos.

3º a) f bien definida:

$$[a]_{20} = [b]_{20} \Rightarrow a-b = 20k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a-6b = 120 \cdot k = 10 \cdot 12 \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a-6b \text{ múltiblo de } 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [6a]_{10} = [6b]_{10} \Rightarrow f([a]_{20}) = f([b]_{20})$$

b) f homomorfismo: respeta la suma:

$$f([a]_{20}+[b]_{20}) = f([a+b]_{20}) = [6a+6b]_{10}$$

$$= [6a]_{10} + [6b]_{10} = f([a]_{20}) + f([b]_{20})$$

Respeta producto:

$$f([a]_{20} \cdot [b]_{20}) = f([a \cdot b]_{20}) =$$

$$= [6ab]_{10}$$

$$f([a]_{20}) \cdot f([b]_{20}) = [6a]_{10}[6b]_{10} = [36ab]_{10} =$$

$$= [6ab]_{10}$$ COINCIDEN ✓

(c) $f([a]_{20}) = [0]_{10} \iff [6a]_{10} = [0]_{10} \iff$

$\iff$ a es múltiplo de 5.

Por tanto $\ker f = \{[0]_{20}, [5]_{20}, [10]_{20}, [15]_{20}\}$

Todos los elementos de $\operatorname{Im} f$ tienen que ser clases de números pares, ya que $[6a]_{10}$ tiene que ser la clase de un número par.

Por tanto $\operatorname{Im} f \subseteq \underbrace{\{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}}_{\text{¡¡}P\text{ NOTACIÓN.}}$

$$[0]_{20} \xmapsto{f} [6\cdot 0]_{10} = [0]_{10}$$
$$[2]_{20} \longmapsto [6\cdot 2]_{10} = [2]_{10}$$
$$[4]_{20} \longmapsto [6\cdot 4]_{10} = [4]_{10}$$
$$[6]_{20} \longmapsto [6\cdot 6]_{10} = [6]_{10}$$
$$[8]_{20} \longmapsto [6\cdot 8]_{10} = [8]_{10}$$

luego $\operatorname{Im} f = P$

(d) f no es inyectiva porque $\ker f \neq \{[0]_{20}\}$
f no es suprayectiva porque $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{Z}_{10}$.

(e) NOTACIÓN: En este apartado omito $[\cdot]_{20}$ para referirme a los elementos de $\mathbb{Z}_{20}$.

Hemos visto que $\ker f = \{0, 5, 10, 15\}$.

Las clases que forman $A/\ker f$ son

$0 + \ker f = \ker f = \{0, 5, 10, 15\}$
$1 + \ker f = \{1, 6, 11, 16\}$
$2 + \ker f = \{2, 7, 12, 17\}$
$3 + \ker f = \{3, 8, 13, 18\}$.
$4 + \ker f = \{4, 9, 14, 19\}$.

(f) El 1er teorema de isomorfía (uno de sus corolarios) dice que

$$g: A/\ker f \longrightarrow \operatorname{Im} f = P$$
$$a + \ker f \longmapsto f(a) = [6a]_{10}$$

es un isomorfismo de anillos.

Luego $C = P = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ es isomorfo a $A/\ker f$.

C tiene unidad ya que $A/\ker f$ la tiene: $1 + \ker f$. De hecho la unidad de C es $[6]_{10}$.

C es subanillo de B por ser $\operatorname{Im} f$.

Parte II: grupos.

4º Teoría.

5º a) $|\mathbb{Z}_{21}^*| = \varphi(21) = \varphi(3)\varphi(7) = 2\cdot 6 = 12$

Pero $\mathbb{Z}_{21}^*$ no puede ser cíclico porque en el enunciado nos dicen que el orden máximo de sus elementos es 6.

Como $\mathbb{Z}_{12}$ es cíclico, $\mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_{21}^*$ no pueden ser isomorfos.

b) A_4 no es abeliano. Veámoslo.

$\sigma = (1\,2\,3) \in A_4$

$\tau = (1\,2)(3\,4) \in A_4$

$\sigma\tau = (1\,2\,3)(1\,2)(3\,4) = (1\,3\,4)$

$\tau\sigma = (1\,2)(3\,4)(1\,2\,3) = (2\,4\,3)$

Sin embargo $\mathbb{Z}_{21}^*$ es abeliano (el producto en $\mathbb{Z}_{21}$ es conmutativo).

Por tanto A_4 y $\mathbb{Z}_{21}^*$ no pueden ser isomorfos.

c) G es abeliano, por tanto todo subgrupo es normal.

d) $H = \langle 8 \rangle = \{1, 8\}$ (porque $8^2 = 64 = 1$ mod 21.)

Por el teorema de Lagrange G/H tiene

$$\frac{|G|}{|H|} = \frac{12}{2} = 6 \text{ elementos.}$$

Las clases que forman G/H son:

$1 \cdot H = H = \{1, 8\}$ NOTACIÓN: Omitimos $[\cdot]_{21}$

$2 \cdot H = \{2, 16\}$

$4 \cdot H = \{4, 32\} = \{4, 11\}$

$5 \cdot H = \{5, 40\} = \{5, 19\}$

$10 \cdot H = \{10, 80\} = \{10, 17\}$

$13 H = \{13, 13 \cdot 8\} = \{13, 104\} = \{13, 20\}$

Y están agotados todos los elementos de $\mathbb{Z}_{21}^*$.

e) Vamos a ver que G/H es cíclico.

$(5H)^2 = 25H = 4H \neq 1H$

$(5H)^3 = (4H)(5H) = 20H \neq 1H$

Como $5H$ no tiene orden 2 ni 3, por Lagrange tiene que tener orden 6, por tanto G/H es cíclico, así que será isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ que también lo es.

Para construir un isomorfismo, tenemos en cuenta que $z = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ genera R_6.

Por tanto la función

$$f : G/H \longrightarrow R_6$$
$$(\sigma H)^j \longmapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{6}}\right)^j$$
$$j = 0,1,2,3,4,5$$

es un isomorfismo de grupos, ya que lleva ~~a~~ a un generador del primero a un generador del segundo y transforma sus potencias de forma consistente.

6º a) Vamos a calcular σH, $H\sigma$

$$\sigma H = \{\sigma, \sigma^5, \sigma\tau, \sigma\tau\sigma^4\}$$
$$H\sigma = \{\sigma, \sigma^5, \tau\sigma, \tau\sigma^5\}$$

Por la regla que conocemos de ejercicios

$$\sigma^{8-a}\tau = \tau\sigma^a$$

Usando esto tenemos

$$\sigma H = \{\sigma, \sigma^5, \tau\sigma^7, \underset{\tau\sigma^3}{\underset{\parallel}{\tau\sigma^{11}}}\}$$

Como $H\sigma = \{\sigma, \sigma^5, \tau\sigma, \tau\sigma^5\}$

vemos que $\sigma H \neq H\sigma$ ya que los dos primeros elementos cocinciden pero los dos últimos son distintos (se puede ver por cancelación).

b) Vamos a calcular órbita de 1.

$id(1) = 1$

$\sigma^4(1) = 5$

$\tau(1) = 1$

$\tau\sigma^4(1) = \tau(5) = 5$

luego $O(1) = \{1, 5\} = O(5)$

Por ser clases de equivalencia.

Además hemos visto que $Stab_1 = \{id, \tau\}$.

Por el teorema de la órbita-estabilizador

$$|Stab_5| = \frac{|H|}{|O(5)|} = \frac{4}{2} = 2$$

Como $\tau(5) = 5 \Rightarrow Stab_5 = \{id, \tau\}$

Vamos a calcular la órbita de 3

$id(3) = 3$

$\tau(3) = 7$

$\sigma^4(3) = 7$

$\tau\sigma^4(3) = \tau(7) = 3$

luego $o(3) = \{3, 7\} = o(7)$

Además $Stab_3 = \{id, \tau\sigma^4\}$

Por tma. órb-stab $|Stab_7| = \frac{4}{2} = 2$

Como $\tau\sigma^4(7) = 7$

$Stab_7 = \{id, \tau\sigma^4\}$

Por último vamos a calcular la órbita de 2.

$id(2) = 2$

$\sigma^4(2) = 6$

$\tau(2) = 8$

$\tau\sigma^4(2) = \tau(6) = 4$

luego $o(2) = \{2, 4, 6, 8\} = o(4) = o(6) = o(8)$

Por tma. órb.-stab. todos estos estabilizadores tienen un solo elemento.

luego $Stab_2 = Stab_4 = Stab_6 = Stab_8 = \{id\}$