

1º a) Supongamos que a ~~no~~ es divisor de cero $\Rightarrow$

$$\exists b \in A, b \neq 0 \text{ t.q. } a \cdot b = 0$$

Como a es invertible, por hipótesis, $\exists a^{-1} \in A$

Multiplicando por a^{-1} :

$$a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow b = 0 \quad ! \quad (\text{contradicción})$$

luego a no es divisor de cero.

VERDADERO

b) FALSO $A = \mathbb{Z}$

$a = 2$ no es invertible y no es divisor de cero.

c) VERDADERO

A cuerpo $\Rightarrow$ todo elemento $\neq 0$ es invertible $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ no hay divisores de cero $\Rightarrow A$ dominio de integridad

a)

d) FALSO $A = \mathbb{Z}$ es dominio de integridad pero no cuerpo.

e) VERDADERO

$$a^3 \text{ invertible} \Rightarrow \exists b \in A \text{ t.q. } a^3 \cdot b = 1; b \cdot a^3 = 1$$

$$\Rightarrow a \cdot (a^2 \cdot b) = 1; (b \cdot a^2) \cdot a = 1 \Rightarrow a \text{ invertible.}$$

f) a, b invertibles

$$(a \cdot b)(b^{-1} a^{-1}) = 1 \quad ? \Rightarrow a \text{ t invertible}$$

$$(b^{-1} a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = 1 \quad \downarrow$$

VERDADERO

g) FALSO $A = \mathbb{Z}$; $a = 1, b = -1$ invertibles

$$a + b = 1 + (-1) = 0 \text{ no invertible.}$$

2º a) I no es ideal primo de $\mathbb{Z}$ porque FALSO
 $4 \in I$; $4 = 2 \cdot 2$, $2 \notin I$

b) I no es ideal maximal de $\mathbb{Z}$ porque
 si fuera maximal, por ser $\mathbb{Z}$ a.c.c.u., FALSO
 I tendría que ser primo (falso por a))

c) FALSO
 $2 \in I$
 $\frac{1}{2} \in A = \mathbb{Q}$ $2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \notin I$

d) ~~VERDADERO~~ FALSO
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \det(B) = 0 \Rightarrow A, B \in I$
 $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A+B) \neq 0 \Rightarrow A+B \notin I$
 I no es subanillo, por tanto no es ideal

e) $\mathbb{Z}_{10}$ no es cuerpo:

$$2, 5 \in \mathbb{Z}_{10}; 2, 5 \neq 0; 2 \cdot 5 = 10 = 0$$

FALSO

3º a) $p(1) = 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 = 0 \Rightarrow$
 1 es raíz de p

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 6 & 5=0 \end{array}$$

$$p(x) = (x-1) \underbrace{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)}$$

$$q(2) = 8 + 12 + 4 + 1 = 25 = 0 \Rightarrow 2 \text{ raíz de } q$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\
 2 \overline{) \quad 2 \quad 0 \quad 4} \\
 \underline{1 \quad 5 \quad 2 \quad 5=0} \\
 0
 \end{array}$$

$$q(x) = (x-2) \underbrace{(x^2+2)}_{r(x)}$$

$$r(0) = 2$$

$$r(1) = 3$$

$$r(2) = 6 = 1$$

$$r(3) = 11 = 1$$

$$r(4) = 18 = 3$$

r no tiene raíces y es de grado 2 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow r$ irreducible.

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x^2+2)$$

$\uparrow \uparrow$
 irreducibles por ser de grado 1.

b) $p(x)$ cumple el criterio de Eisenstein con $p=2$
 $\Rightarrow p(x)$ irreducible.

$$c) \quad x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$$

$\uparrow$
 dif. cuadrados.

$x^2 + 2$ no tiene raíces en $\mathbb{R}$, luego

tampoco en $\mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + 2$ irreducible

$x^2 - 2$ irreducible por el criterio de Eisenstein con $p=2$.

$$d) \quad x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x^2 + 2)$$

$\uparrow \uparrow$
 irred. por ser de grado 1

$x^2 + 2$ irred. porque tiene grado 2 y no tiene raíces en $\mathbb{Q}$.