FINAL ANILLOS. 13/05/2015. EA. SOLUCIÓN

1º/ En los apuntes de teoría.

2º/ a) FALSO. Contraejemplo

$A=\mathbb{Z}$ es a.c.c.u.

$I=(0)$ es ideal de A

I es primo, ya que $x\cdot y\in I \Rightarrow x\cdot y=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ó} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in I \\ \text{ó} \\ y\in I \end{cases}$$

I no es maximal, ya que $(0)\subsetneq(2)\subsetneq\mathbb{Z}$

b) FALSO.

Sabemos por teoría que si A es a.c.c.u. (y en este caso lo es), se cumple

$$\underbrace{A/I}_{\text{dominio de integridad}} \Leftrightarrow I \text{ primo.}$$

En este caso I no es primo, ya que $x^2\in I=(x^2)$

Sin embargo $x^2=x\cdot x$ y no se cumple $x\in I$ (ya que no es múltiplo de x^2).

Por tanto A/I no es D.I.

c) FALSO

Tomamos $a=b=+1$ y vemos que falla la multiplicación

$$f(a\cdot b)=f(1\cdot 1)=f(1)=-1 \quad \times$$

$$f(a)\cdot f(b)=f(1)\cdot f(1)=(-1)(-1)=1$$

luego f no es homomorfismo de anillos.

$p(x) = x^2+2x+5$ en $\mathbb{R}[x]$

2

3º/ a) $x^2+2x+5=0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow p(x) \text{ no tiene raíces en } \mathbb{R}.$$

Como $p(x)$ es de grado 2 $\Rightarrow$ $p(x)$ IRREDUCIBLE

b) $p(x) = x^3+x^2+x+i$ en $\mathbb{C}[x]$

Por el teorema fundamental del álgebra $p(x)$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$, por tanto un factor de grado 1 $\Rightarrow$ $p(x)$ REDUCIBLE

c) $p(x) = x^4+x+1$ en $\mathbb{Z}_2[x]$

$p(0) = 1$
$p(1) = 3 = 1$ en $\mathbb{Z}_2$ $\Rightarrow$ $p(x)$ no tiene raíces en $\mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow$ $p(x)$ no puede tener factores de grado 1 ó 3.

Veamos si $p(x)$ puede descomponer en producto de factores de grado 2.

$$x^4+x+1 = (x^2+ax+b)\cdot(x^2+cx+d)$$

Como el término independiente es igual al ~~bd~~ producto $b\cdot d$ y esto tiene que ser igual a 1

$\Rightarrow$ $b=d=1$

$$x^4+x+1 = (x^2+ax+1)(x^2+cx+1) =$$

$$= x^4+(a+c)x^3+(1+ac+1)x^2+(a+c)\cdot x+1$$

$\Rightarrow$ $a+c=0$
$1+ac+1=0$ IMPOSIBLE.
$a+c=1$

Luego $p(x)$ no descompone en factores de grado 2

$\Rightarrow$ $p(x)$ IRREDUCIBLE

d) Aplicamos el criterio modular con $p=2$

$$p(x) = 3x^4 + 7x + 5$$

Reduciendo mod 2

$$\bar{p}(x) = [3]_2 x^4 + [7]_2 x + [5]_2 =$$

$$= [1]_2 x^4 + [1]_2 x + [1]_2$$

En el apartado c) vimos que este polinomio es irreducible sobre $\mathbb{Z}_2[x]$.

Por el criterio modular $p(x)$ IRREDUCIBLE en $\mathbb{Q}[x]$

4º/ a) Sabemos por teoría, dado que $\mathbb{Z}_2[x]$ a.c.c.u,

$$A/I \text{ cuerpo} \Leftrightarrow \underset{(p(x))}{\underset{\parallel}{I}} \text{ maximal} \Leftrightarrow p(x) \text{ irreducible}$$

$$x^2+1 = (x+1)(x+1) \text{ en } \mathbb{Z}_2[x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A/I \text{ no es cuerpo.}$$

b) Consideramos los polinomios

$$q(x) = x^2$$

$$r(x) = 1$$

$$q(x) - r(x) = x^2 - 1 \underset{\text{en } \mathbb{Z}_2}{=} x^2+1 \in (x^2+1)$$

Luego en A/I $\quad [x^2] = [1]$

Calculamos $[x^3] = [x^2][x] = [x]$

$$[x^4] = [x^3]\cdot[x] = [x][x] = [1]$$

$\vdots$

En general $\quad [x^n] = \begin{cases} [1] & \text{si } n \text{ par} \\ [x] & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$

Por tanto si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{Z}_2$

$$[f(x)] = \sum_{i=0}^{n} a_i [x^i] = b + c \cdot [x] =$$

$$= [b + cx]$$

Hemos visto que las potencias ≥ 2 son la misma clase que $[1]$ o $[x]$

Luego todo polinomio tiene un representante de grado ≤ 1.

Las 4 clases: $[0], [1], [x], [x+1]$ son todas distintas entre sí, ya que es imposible que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de x^2+1. Por tanto A/I tiene 4 elementos

$$A/I = \{[0], [1], [x], [x+1]\}$$

c) Todo elemento de A/I se puede escribir como $[a+bx]$.

Fórmula para la <u>suma</u>

$$[a+bx] + [c+dx] = [(a+c) + (b+d)x]$$

Fórmula para el <u>producto</u>

$$[a+bx] \cdot [c+dx] = [(a+c) + (ad+bc)x + (b+d)x^2] =$$

$$= [(a+c+b+d) + (ad+bc)x]$$

$[x^2] = [1]$