FINAL GRUPOS. 13/05/2015. EA. SOLUCIÓN

1º/ ~~En los apuntes de teoría.~~

2º/ a) Supongamos $x \in A^* \Rightarrow \exists y \in A$ t.q. $xy = yx = 1_A$

Sabemos que y es único. $\underbrace{y}_{\text{NOTACIÓN}} = x^{-1}$

Veamos que $f(x^{-1})$ es el inverso de $f(x)$

$$f(x)\cdot f(x^{-1}) \underset{\substack{f \text{ homomorfismo} \\ \text{de anillos}}}{=} f(x\cdot x^{-1}) = f(1_A) \underset{\substack{f \text{ isomorfismo} \\ \text{de anillos.}}}{=} 1_B$$

Análogamente

$$f(x^{-1})\cdot f(x) = f(x^{-1}\cdot x) = f(1_A) = 1_B$$

Luego $f(x)$ es invertible, esto es $f(x) \in B^*$

b) Tenemos que ver que $g: A^* \longrightarrow B^*$, $x \longmapsto g(x) = f(x)$

es isomorfismo de grupos, donde la operación es la multiplicación.

① Veamos que g homomorfismo:

Dados $x, y \in A^*$

$$g(xy) \underset{\text{def}}{=} f(xy) \underset{\substack{f \text{ homomorfismo} \\ \text{de anillos}}}{=} f(x)\cdot f(y) \underset{\text{def}}{=} g(x)\cdot g(y)$$

② Veamos g inyectiva:

$$g(x) = g(y) \underset{def}{\Longrightarrow} f(x) = f(y) \underset{f \text{ inyectiva}}{\Longrightarrow} x = y$$ ✓

③ Veamos g suprayectiva.

Sea $b \in B^*$. Como f es isomorfismo, en particular es suprayectiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, a \in A$ t.q. $f(a) = b$.

Necesitamos ver que $a \in A^*$

Como f isomorfismo, $\exists f^{-1}$ que también es isomorfismo

$$f(a) = b \Rightarrow a = f^{-1}(b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } b \in B^* \\ f^{-1}: B \to A \text{ isomorfismo} \end{array}\right\} \underset{\text{apartado a)}}{\Longrightarrow} a \in A^*$$

Luego $g(a) = f(a) = b$

con lo que hemos visto g suprayectiva. ✓

3º/ Sabemos que A_4 tiene $\frac{4!}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$ elementos

e es par (ya que $e = (12)(12)$)
Todo ciclo de longitud 3 será par, ya que
$$(a\ b\ c) = (a\ c)(a\ b)$$
Encontrémoslos todos:

$(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2\ 4)$, $(1\ 3\ 4)$, $(2\ 3\ 4)$
$(1\ 3\ 2)$, $(1\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 3)$, $(2\ 4\ 3)$

Por último, el producto de 2 ciclos disjuntos de longitud 2 también es par:

$(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$

Ya hemos encontrado 12 elementos, por tanto tenemos todos los elementos de A_4.

Los grupos cíclicos serán los generados por cada uno de los elementos, teniendo en cuenta que los generados por los ciclos de longitud 3 tienen 3 elementos:

$H_1 = \langle e \rangle = \{e\}$
$H_2 = \langle (123) \rangle = \{e, (123), (132)\} = \langle (132) \rangle$
$H_3 = \langle (124) \rangle = \{e, (124), (142)\} = \langle (142) \rangle$
$H_4 = \langle (134) \rangle = \{e, (134), (143)\} = \langle (143) \rangle$
$H_5 = \langle (234) \rangle = \{e, (234), (243)\} = \langle (243) \rangle$
$H_6 = \langle (12)(34) \rangle = \{e, (12)(34)\}$
$H_7 = \langle (13)(24) \rangle = \{e, (13)(24)\}$
$H_8 = \langle (14)(23) \rangle = \{e, (14)(23)\}$

Luego hay 8 subgrupos cíclicos.

4º/ a) FALSO

En S_3, $\sigma_1 = (12)$, $\sigma_2 = (13)$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = (12)(13) = (132)$$

$$ord(\sigma_1 \circ \sigma_2) = 3 \neq mcm(o(\sigma_1), o(\sigma_2)) = mcm(2,2) = 2$$

b) FALSO

Por el teorema de la órbita/estabilizador sabemos

$$|G| = |orb(a)| \cdot |Stab(a)| \quad \forall a \in X$$

luego $|orb(a)|$ divide a $|G|$.

Así que es imposible $|orb(a)| = 5$, $|G| = 9$

c) VERDADERO

$$|G| = |D_8| \cdot |\mathbb{Z}_2| = 16 \cdot 2 = 32$$

Para contar los elementos de H tenemos que ver

$$(\underbrace{\sigma^i}_{8 \text{ opciones}}, \underbrace{y}_{2 \text{ opciones}}) \ / \ i = 0, 1, \ldots, 7, \ y \in \mathbb{Z}_2$$

luego $|H| = 8 \cdot 2 = 16$

Por tanto $[G:H] = |G|/|H| = 32/16 = 2$

Y sabemos que todo subgrupo de índice 2 es normal.

$f: G \to H$ homomorfismo de grupos

1/ $\operatorname{Ker} f \overset{\text{def}}{=} \{ a \in G \,/\, f(a) = e_H \}$

Prop Ker f es subgrupo normal de G.

Demo Ker f es subgrupo de G:

① $a, b \in \operatorname{Ker} f$

$$f(a \cdot b) \underset{f \text{ homom.}}{=} f(a) \cdot f(b) = e_H \cdot e_H = e_H \Rightarrow a \cdot b \in \operatorname{Ker} f \quad ✓$$

② $f(e_G) \underset{f \text{ homom.}}{=} e_H \Rightarrow e_G \in \operatorname{Ker} f$ ✓

③ $a \in \operatorname{Ker} f$

$$f(a^{-1}) \underset{f \text{ homom}}{=} (f(a))^{-1} = (e_H)^{-1} = e_H \Rightarrow a^{-1} \in \operatorname{Ker} f \quad ✓$$

Para ver que $\operatorname{Ker} f \triangleleft G$ veamos que $\forall a \in G$

$a \operatorname{Ker} f a^{-1} \subseteq \operatorname{Ker} f$

Sea $b \in \operatorname{Ker} f$; $f(a \cdot b a^{-1}) \underset{f \text{ homon}}{=} f(a) \cdot f(b) \cdot f(a^{-1}) =$

$$\underset{b \in \operatorname{Ker} f}{=} f(a) \cdot e_H (f(a))^{-1} = f(a) \cdot (f(a))^{-1} = e_H$$

$$\Rightarrow a \cdot b a^{-1} \in \operatorname{Ker} f \quad ✓$$

1er tma isomorfía (enunciado)

$f: G \longrightarrow H$ homomorfismo supráyectivo de grupos

$$\Rightarrow \quad G/_{\operatorname{Ker} f} \cong H$$

Demo Definimos la aplicación
$$g: G/_{\operatorname{Ker} f} \longrightarrow H$$
$$a \cdot \operatorname{Ker} f \longmapsto f(a)$$

* Veamos que g está bien definida:

Supongamos $a \cdot \operatorname{Ker} f = b \cdot \operatorname{Ker} f \Rightarrow a^{-1} b \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(a^{-1}b) = e_H \Rightarrow (f(a))^{-1} \cdot f(b) = e_H \Rightarrow f(b) = f(a)$$

* Veamos que g es homomorfismo:

Sean $a \operatorname{Ker} f, b \operatorname{Ker} f \in G/\operatorname{Ker} f$

$$g((a \operatorname{Ker} f)(b \operatorname{Ker} f)) \underset{\substack{\text{mult.} \\ \text{en } G/\operatorname{Ker} f}}{=} g((ab) \operatorname{Ker} f) \underset{\text{def de } g}{=} f(ab) =$$

$$= f(a) f(b) = g(a \operatorname{Ker} f) g(b \operatorname{Ker} f)$$

* Veamos que g es inyectiva:

$$g(a \operatorname{Ker} f) = e_H \Rightarrow f(a) = e_H \Rightarrow a \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot \operatorname{Ker} f = e_G \cdot \operatorname{Ker} f \Rightarrow a \cdot \operatorname{Ker} f = e_{G/\operatorname{Ker} f}$$

* Veamos que g es supráyectiva:

Sea $h \in H$. Como f es supráyectiva, $\exists a \in G$ t.q. $f(a) = h \Rightarrow g(a \operatorname{Ker} f) = h$.

Por tanto g es isomorfismo de grupos