

1º En los apuntes de teoría.

2º a) VERDADERO

Veamos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ es cíclico:

$g = ([1]_2, [1]_3)$ tiene orden 6, ya que

$$2g = ([0]_2, [2]_3) \neq ([0]_2, [0]_3)$$

$$3g = ([1]_2, [0]_3) \neq ([0]_2, [0]_3)$$

y por el teorema de Lagrange su orden tiene que dividir a 6, luego es 6.

Sabemos que todos los grupos cíclicos ^{del mismo orden} son isomorfos, luego $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$

b) FALSO

Veamos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ no tiene elementos de orden 8:

Para cualquier $g = ([a]_2, [b]_4) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ se cumple

$$4g = ([4a]_2, [4b]_4) = ([0]_2, [0]_4)$$

luego el orden de g no puede ser 8.

Como $\mathbb{Z}_8$ sí tiene elementos de orden 8 (es cíclico), $\mathbb{Z}_8 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

c) VERDADERO : En $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$

$$3^2 = 9 \neq 1 \Rightarrow \text{ord}(3) \neq 2 \Rightarrow \text{ord}(3) = 4$$

TMA. LAGRANGE

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{10}^* \text{ es cíclico} \Rightarrow \mathbb{Z}_{10}^* \cong \mathbb{Z}_4$$

(porque todos los grupos cíclicos del mismo orden son isomorfos).

d) FALSO

$\mathbb{Z}_{16}^*$ es abeliano y D_4 no lo es

(por ejemplo, $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$
 $\tau_d = (2\ 4)$)

$$\sigma \circ \tau_d = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)$$

$$\tau_d \circ \sigma = (2\ 4)(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(2\ 3) \quad).$$

3º a) G tiene 12 elementos

σ tiene orden 2 $\Rightarrow \langle \sigma \rangle = K$ tiene 6 elementos.

$$\text{Por tanto } [G:K] = \frac{\text{ord}(G)}{\text{ord}(K)} = \frac{12}{6} = 2$$

$\Rightarrow K$ es normal en G . (todo subgrupo de índice 2 es normal)
teorema

b) El número de elementos de G/K es igual al índice, por tanto hay dos elementos.
Son las dos clases de equivalencia:

$$e \cdot K = K = \{ \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, e \}$$

$$\tau_a \cdot K = \{ \tau_{14}, \tau_{25}, \tau_{36}, \tau_a, \tau_b, \tau_c \}$$

c) σ^3 tiene orden 2 $\Rightarrow H = \langle \sigma^3 \rangle = \{ e, \sigma^3 \}$
(calculamos las clases de equivalencia por derecha e izquierda:

$$eH = \{ e, \sigma^3 \}$$

$$He = \{ \cancel{\sigma^3}, e, \sigma^3 \} \quad \text{COINCIDEN}$$

$$\sigma H = \{\sigma, \sigma^4\}$$

$$H\sigma = \{\sigma, \sigma^4\} \supset \text{COINCIDENT}$$

$$\sigma^2 H = \{\sigma^2, \sigma^5\}$$

$$H\sigma^2 = \{\sigma^2, \sigma^5\} \supset \text{COINCIDENT}$$

$$\tau_{14} H = \{\tau_{14}, \tau_{14} \sigma^3\} = \{\tau_{14}, (26)(35)(14)(25)(36)\} =$$

$$= \{\tau_{14}, (14)(23)(56)\} = \{\tau_{14}, \tau_b\}$$

$$H \cdot \tau_{14} = \{\tau_{14}, \sigma^3 \tau_{14}\} = \{\tau_{14}, (24)(25)(36)(26)(35)\} =$$

$$= \{\tau_{14}, (14)(23)(56)\} = \{\tau_{14}, \tau_b\}$$

COINCIDENT

$$\tau_{25} H = \{\tau_{25}, \tau_{25} \sigma^3\} = \dots = \{\tau_{25}, \tau_c\}$$

$$H \tau_{25} = \{\tau_{25}, \sigma^3 \tau_{25}\} = \dots = \{\tau_{25}, \tau_c\} \supset \text{COINCIDENT}$$

Como ya hemos cubierto 10 de los 12 elementos de G , las otras 2 clases tienen que coincidir, luego

$$\tau_{36} H = H \tau_{36} = \{\tau_{36}, \tau_a\}$$

Por tanto $H \triangleleft G$.

d) Hemos visto que G/H tiene 6 elementos (en el apartado anterior).

$$eH, \sigma H, \sigma^2 H, \tau_{14} H, \tau_{25} H, \tau_{36} H.$$

e) + f)

⊗ eH es el neutro y siempre tiene orden 1.
Su inverso es el mismo:

$$(eH)^{-1} = eH.$$

$$\textcircled{*} (\sigma H)^2 = \sigma^2 H \neq eH$$

$$(\sigma H)^3 = \sigma^3 H = eH \Rightarrow \text{ord}(\sigma H) = 3$$

$$(\sigma H)^{-1} = \sigma^{-1} \cdot H = \sigma^2 H = \sigma^2 H.$$

$$\textcircled{*} (\sigma^2 H)^2 = \sigma^4 H = \sigma H \neq eH$$

$$(\sigma^2 H)^3 = \sigma^6 H = eH \Rightarrow \text{ord}(\sigma^2 H) = 3$$

$$(\sigma^2 H)^{-1} = (\sigma^2)^{-1} H = \sigma^4 H = \sigma H$$

$$\textcircled{*} (\tau_{14} H)^2 = \tau_{14}^2 H = eH$$

$$\text{ luego } \text{ord}(\tau_{14} H) = 2 \Rightarrow (\tau_{14} H)^{-1} = \tau_{14} H$$

$$\textcircled{*} (\tau_{25} H)^2 = \tau_{25}^2 H = eH$$

$$\text{ luego } \text{ord}(\tau_{25} H) = 2 \Rightarrow (\tau_{25} H)^{-1} = \tau_{25} H$$

$$\textcircled{*} (\tau_{36} H)^2 = \tau_{36}^2 H = eH$$

$$\text{ luego } \text{ord}(\tau_{36} H) = 2 \Rightarrow (\tau_{36} H)^{-1} = \tau_{36} H.$$