EXAMEN E.A. PARCIAL ANILLOS. 18/03/2015. 1

SOLUCIÓN

1º/ En los apuntes de clase.

2º/ Consideramos la función

$$f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x) \longmapsto f(p(x)) := p(1)$$

Veamos que f cumple las hipótesis del primer teorema de isomorfía.

Veamos que f es supreayectiva:

Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera. Elegimos el polinomio constante $p(x) = a$. Si calculamos $f(p(x)) = p(1) = a$. Luego f es supreayectiva.

Veamos que f es homomorfismo de anillos:

Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ cualesquiera.

Sea $s(x) = p(x) + q(x)$

$f(s(x)) = s(1)$

$f(p(x)) + f(q(x)) = p(1) + q(1)$

Los dos números anteriores son iguales, ya que se obtiene el mismo resultado al sumar dos polinomios y luego evaluar en un punto que al evaluar en ese punto ambos polinomios y luego sumar los resultados.

La multiplicación es análoga cambiando el signo $+$ por el signo $\cdot$.

Por el 1^er teorema de isomorfía sabemos que

$$\mathbb{R}[x] / \ker f \cong \mathbb{R}$$

Veamos que $\ker f = (x-1)$

$\supseteq]$ Si $p(x) \in (x-1) \Rightarrow \exists q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$p(x) = (x-1) \cdot q(x) \Rightarrow p(1) = (1-1) \cdot q(1) = 0$

$\Rightarrow f(p(x)) = p(1) = 0 \Rightarrow p(x) \in \ker f$

$\subseteq]$ Si $p(x) \in \ker f \Rightarrow f(p(x)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(1) = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $p(x) \Rightarrow$

$\underset{\text{TEORÍA}}{\Rightarrow} t(x) = x-1$ divide a $p(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(x) \in (x-1)$

Obs: Esto último también puede justificarse usando la división euclídea en $\mathbb{R}[x]$.

Por tanto $\mathbb{R}[x] / (x-1) \cong \mathbb{R}$

El teorema de isomorfía nos dice que la aplicación

$$g : \mathbb{R}[x] / (x-1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x) + (x-1) \longmapsto f(p(x)) = p(1)$$

es un isomorfismo. Por tanto este es un isomorfismo explícito entre los dos anillos.

3º/ Sabemos que en un cociente

$[0] = 0_K$, $[1] = 1_K$.

También sabemos que

$0_K \cdot a = 0_K \quad \forall a \in K$

$1_K \cdot a = a \quad \forall a \in K$

También sabemos que K es cuerpo (lo dice el enunciado), por tanto el producto es conmutativo.

Todo esto permite rellenar las dos primeras filas y columnas de la tabla de multiplicar de K.

Faltan por calcular los productos

$[x] \cdot [x] = [x^2] = [x+1]$

$x^2 - (x+1) = x^2 + x + 1 \in I$

Estamos con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$

$[x+1][x+1] = [x^2 + x + x + 1] = [x^2+1] = [x]$

$x^2+1 - x = x^2 + 1 + x \in I$

$[x][x+1] = [x+1][x] = [x^2+x] = [1]$

$x^2+x-1 = x^2+x+1 \in I$

	$[0]$	$[1]$	$[x]$	$[x+1]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[x]$	$[x+1]$
$[x]$	$[0]$	$[x]$	$[x+1]$	$[1]$
$[x+1]$	$[0]$	$[x+1]$	$[1]$	$[x]$

4°/ a) $f(1\cdot 1) = f(1) = 2$

$f(1)\cdot f(1) = 2\cdot 2 = 4$

Por tanto f no respeta el producto, así que no es homomorfismo y, por tanto, tampoco isomorfismo. $\boxed{\text{FALSO}}$

b) $f([2]_4+[3]_4) = f([5]_4) = f([1]_4) = 1$

$f([2]_4)+f([3]_4) = 2+3 = 5$

Por tanto f no respeta la suma luego no es homomorfismo. $\boxed{\text{FALSO}}$

c) $f\left(([1]_2,[0]_3)+([0]_2,[1]_3)\right) = f([1]_2,[1]_3) = [1\cdot 1]_6 = [1]_6$

$f\left(([1]_2,[0]_3)\right)+f\left(([0]_2,[1]_3)\right) = [1\cdot 0]_6 + [0\cdot 1]_6 = [0]_6$

Por tanto f no respeta la suma luego no es homomorfismo. $\boxed{\text{FALSO}}$

5º/ a) Sabemos, por teoría, que sólo los polinomios de grado 1 y 2 pueden ser irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Por tanto $p(x)$ es <u>reducible</u>

b) Sabemos, por teoría, que los únicos polinomios irreducibles de $\mathbb{C}$ son los de grado 1. Por tanto $p(x)$ es <u>reducible</u>.

c) Veamos si $p(x)$ tiene raíces en $\mathbb{Z}_5$

$$p(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$$
$$p(1) = 1^3 + 1 + 1 = 3$$
$$p(2) = 2^3 + 2 + 1 = 1$$
$$p(3) = 3^3 + 3 + 1 = 1$$
$$p(4) = 4^3 + 4 + 1 = (-1)^3 - 1 + 1 = -1 = 4.$$

Como $p(x)$ no tiene raíces y tiene grado 3, no puede descomponer en producto de un polinomio de grado 1 y otro de grado 2. Luego $p(x)$ es <u>irreducible</u>

d) $\underline{(x^2+x+1)}(x^2+x+1) =$

$$= x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + \cancel{x} + x^2 + \cancel{x} + 1 =$$

es el único irreducible de grado 2

$$= x^4 + x^2 + 1$$

Luego $p(x)$ factoriza en producto de 2 factores de grado 2 $\Rightarrow$ $p(x)$ <u>reducible</u>

e) Para buscar raíces de $p(x)$ probamos con elementos de $\mathbb{Q}$ de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a \mid -1$; $b \mid 2$.

Cuando probamos con $x = \frac{1}{2}$:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0$$

luego $\frac{1}{2}$ es raíz de $p(x) \Rightarrow p(x)$ <u>reducible</u>

f) Tomando $q = 5$ primo, vemos que

$$q \mid a_0 = 10 \;,\quad q \mid a_3 = 15 \;;\quad q \nmid a_8 = 2$$

Por el criterio de Eisenstein, sabemos que $p(x)$ es <u>irreducible</u>.