EXAMEN PARCIAL ANILLOS 16/17. SOLUCIÓN (1º) TEORÍA

2º a

Sean A, B anillos, I ideal de A, J ideal de B.

$$I \times J := \{ (i, j) \; / \; i \in I, \; j \in J \}$$

Veamos que $I \times J$ es ideal de $A \times B$

1º $\left.\begin{array}{l} 0_A \in I \\ 0_B \in J \end{array}\right\} \Rightarrow (0_A, 0_B) \in I \times J \Rightarrow I \times J \neq \emptyset$

2º Sean $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in I \times J$

$$(i_1, j_1) - (i_2, j_2) = (\underbrace{i_1 - i_2}_{\substack{\cap \\ I \\ \text{por ser} \\ I \text{ ideal}}}, \underbrace{j_1 - j_2}_{\substack{\cap \\ J \\ \text{por ser} \\ J \text{ ideal}}}) \in I \times J$$

luego la resta es cerrada en $I \times J$.

3º Sean $(i, j) \in I \times J$, $(a, b) \in A \times B$

$$(i, j) \cdot (a, b) = (\underbrace{ia}_{\substack{\cap \\ I \\ \text{por ser} \\ I \text{ ideal}}}, \underbrace{jb}_{\substack{\cap \\ J \\ \text{por ser} \\ J \text{ ideal}}}) \in I \times J$$

Análogamente $(a, b) \cdot (i, j) \in I \times J$.

luego tenemos la propiedad de absorción.

(b)

Defino
$$f : A\times B \longrightarrow \left(A/_I\right)\times\left(B/_J\right)$$
$$(a,b) \longmapsto \left([a]_I, [b]_J\right)$$

(1º) f es homomorfismo de anillos

$$f((a,b)+(a',b')) = f((a+a', b+b')) =$$
$$= \left([a+a']_I, [b+b']_J\right) = \left([a]_I+[a']_I, [b]_J+[b']_J\right)$$
$$= \left([a]_I, [b]_J\right) + \left([a']_I, [b']_J\right) = f(a,b) + f(a',b')$$

(2º) f supraeyectiva: <u>OBVIO</u>

Si $\left([a]_I, [b]_J\right) \in \left(A/_I\right)\times\left(B/_J\right)$

entonces $f(a,b) = \left([a]_I, [b]_J\right)$

(3º) $\ker f = I\times J$

$$(a,b)\in \ker f \iff f(a,b) = \left([0]_I, [0]_J\right) \iff$$
$$\iff \left([a]_I, [b]_J\right) = \left([0]_I, [0]_J\right) \iff$$
$$\iff \left(\begin{array}{l}[a]_I = [0]_I \\ \wedge \\ [b]_J = [0]_J\end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{l}a\in I \\ \wedge \\ b\in J\end{array}\right) \iff$$
$$\iff (a,b)\in I\times J.$$

Por el 1er tma. de isomorfía $\quad A\times B/_{I\times J} \cong \left(A/_I\right)\times\left(B/_J\right)$

3º a) En un anillo producto los elementos invertibles son aquellos que tienen las dos coordenadas invertibles.

En $\mathbb{Z}_n$ los elementos invertibles son aquellos relativamente primos con el módulo.

Por tanto:

Invertibles de $\mathbb{Z}_4$: 1, 3

Invertibles de $\mathbb{Z}_6$: 1, 5

Invertibles de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$: $(1,1), (1,5), (3,1), (3,5)$.

b) Invertibles en $\mathbb{Z}_{24}$: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Como $\mathbb{Z}_{24}$ tiene 8 elementos invertibles y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ 4 elementos invertibles, no pueden ser isomorfos.

c) Tomamos $I = \{0, 2\} = (2)$, que es ideal de $\mathbb{Z}_4$, (ya que $2|4$)

Tomamos $J = \{0, 3\} = (3)$, que es ideal de $\mathbb{Z}_6$, (ya que $3|6$)

$K = I \times J = \{(0,0), (2,0), (0,3), (2,3)\}$

es ideal de $C = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ por el apartado a) del ejercicio 2º d

$$[(0,0)]_K = K = \{(0,0),(0,3),(2,0),(2,3)\}$$

$$[(1,0)]_K = (1,0)+K = \{(1,0),(1,3),(3,0),(3,3)\}$$

$$[(0,1)]_K = (0,1)+K = \{(0,1),(0,4),(2,1),(2,4)\}$$

$$[(1,1)]_K = (1,1)+K = \{(1,1),(1,4),(3,0),(3,4)\}$$

$$[(0,2)]_K = (0,2)+K = \{(0,2),(0,5),(2,2),(2,5)\}$$

$$[(1,2)]_K = (1,2)+K = \{(1,2),(1,5),(3,2),(3,5)\}$$

Ya hemos agotado los 24 elementos de C, por tanto C/K tiene 6 elementos:

$$C/K = \{[(0,0)]_K, [(1,0)]_K, [(0,1)]_K, [(1,1)]_K, [(0,2)]_K, [(1,2)]_K\}$$

4º ⓐ $p(x)$ es REDUCIBLE sobre $\mathbb{R}[x]$ porque sólo los polinomios de grados 1 y 2 pueden ser irreducibles.

ⓑ Vamos a buscar una factorización de $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ como producto de factores de grado 2

$$x^4+x^2+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

con $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

$$x^4+x^2+1=x^4+(a+c)x^3+(d+ac+b)x^2+$$
$$+(ad+bc)x+bd$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 0&=a+c\\ 1&=d+ac+b\\ 0&=ad+bc\\ 1&=bd \end{aligned}$$

$1=bd$ Probemos, caso 1, $b=d=1$

$$\left.\begin{aligned} 0&=a+c &&\Rightarrow a=-c\\ 1&=1+ac+1 &&\Rightarrow ac=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$0=a+c$$

$$\Rightarrow -c\cdot c=-1; \; c^2=1;$$

$$c=1, \; a=-1$$

es solución

luego $(x^4+x^2+1)=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$\Rightarrow p(x)$ es REDUCIBLE sobre $\mathbb{Q}[x]$

(c) $p(1)=1+1+1=3=0 \mod 3$

$\Rightarrow p$ tiene una raíz en $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow p$ REDUCIBLE

(d) $p(2)=2^4+2^2+1=21=0 \mod 7$

$\Rightarrow 2$ es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & & 2 & 4 & 10 & 20 \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 & 10 & \underline{|21=0}
\end{array}$$

luego $p(x)=(x-2)\overset{7}{\overline{(x^3+2x^2+5x+3)}}$

$q(3)=3^3+2\cdot 3^2+5\cdot 3+3=27+18+15+3$

$=6+4+1+3=14=0 \mod 7.$

$\Rightarrow 3$ es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 5 & 3 \\
3 & & 3 & 15 & 60 \\
\hline
 & 1 & 5 & 20 & \underline{|63=0}
\end{array}$$

$\Rightarrow p(x)=(x-2)(x-3)\underbrace{(x^2+5x-1)}_{r}$

$$r(4) = 16 + 20 - 1 = 35 = 0 \mod 7$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 5 & -1 \\ 4 & & 4 & 36 \\ \hline & 1 & 9 & \boxed{35 = 0} \end{array}$$

$$p(x) = (x-2)(x-3)(x-4)(x+9) =$$
$$= (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

que son factores irreducibles por ser factores lineales.