SOLUCIÓN PARCIAL GRUPOS. EA. 29/4/2015

1/ En los apuntes de clase.

2/ $\sigma = (1\,3\,5\,7)(2\,3)(2\,4\,9)(3\,6\,1) =$

$= \underbrace{(1\,2\,4\,9\,5\,7)(3\,6)}_{\text{descomposición en ciclos disjuntos}} =$

$= \underbrace{(1\,7)(1\,5)(1\,9)(1\,4)(1\,2)(3\,6)}_{\text{descomposición en transposiciones}} =$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 7 & 3 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{representación matricial.}}$

La permutación es par, ya que la descomposición en transposiciones que hemos encontrado consta de 6 de ellas.

Para calcular el orden, observamos que σ se descompone en dos ciclos disjuntos, uno de longitud 2 y otro de longitud 6. El orden de un ciclo coincide con su longitud y los ciclos disjuntos conmutan. Por tanto

$\text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(2,6) = 6$

$(\sigma^2) = (1\,2\,4\,9\,5\,7)^2(3\,6)^2 = (1\,4\,5)(2\,9\,7)\cdot e$

$(\sigma^2)^2 = (1\,4\,5)^2(2\,9\,7)^2 = (1\,5\,4)(2\,7\,9)$

$(\sigma^2)^3 = \sigma^6 = e \Rightarrow \langle\sigma^2\rangle = \{e, (1\,4\,5)(2\,9\,7), (1\,5\,4)(2\,7\,9)\}$

3º/ Por el primer teorema de isomorfía para grupos aplicado a la función

$$\bar{f} : G \longrightarrow im(f)$$
$$g \longmapsto \bar{f}(g) := f(g)$$

(estamos simplemente cambiando el recorrido de f para obtener una función suprayectiva)

obtenemos $G/Ker(\bar{f}) = G/Ker(f) \cong im(f)$

Como G es un grupo finito, también lo es $G/Ker f$ y, por tanto, también $im(f)$. Como son isomorfos, existe una biyección entre ellos así que tienen el mismo número de elementos:

$$|im(f)| = |G/Ker(f)| = |G| / |Ker(f)|$$

Despejando: $|G| = |Ker(f)| \cdot |Im(f)|$

4º/ a) $\boxed{\text{FALSO}}$ Contraejemplo

$\sigma_1 = (1\ 2)$
$\sigma_2 = (3\ 4\ 5)$

$ord(\sigma_1 \circ \sigma_2) = mcm(2,3) = 6$

$máx\{ord(\sigma_1), ord(\sigma_2)\} = 3$

b) $\boxed{\text{VERDADERO}}$

⊛ f está bien definida; si $[a]_6 = [b]_6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = 6k \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a - 5b = 6 \cdot 5k \Rightarrow [5a]_6 = [5b]_6$

⊛ f es homomorfismo de grupos: si $[a]_6, [b]_6 \in \mathbb{Z}_6$

$\Rightarrow f([a]_6 + [b]_6) = f([a+b]_6) = [5(a+b)]_6 =$

$= [5a]_6 + [5b]_6 = f([a]_6) + f([b]_6)$

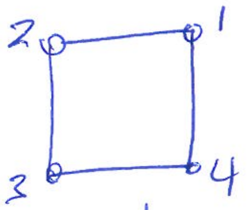
⊛ f inyectiva: si $f([a]_6) = [0]_6 \Rightarrow$

$\Rightarrow [5a]_6 = [0]_6 \Rightarrow [5]_6 [a]_6 = [0]_6 \underset{\substack{[5]_6 \\ \text{es unidad}}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow [a]_6 = [0]_6$

luego $\operatorname{Ker} f = \{[0]_6\} \underset{f \text{ homomorfismo}}{\Longrightarrow} f$ inyectiva.

c) $\boxed{\text{FALSO}}$ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ vistos como los vértices de un cuadrado



$G = D_4$ visto como el grupo de movimientos del cuadrado. La acción es $\phi_p(i) = p(i)$.

$\operatorname{orb}(1) = \{1, 2, 3, 4\}$, porque si $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$

$\sigma(1) = 2$, $\sigma^2(1) = 3$, $\sigma^3(1) = 4$, $\sigma^4(1) = 1$

$\operatorname{Stab}(1) = \{e, (2\ 4)\}$

En este caso $|\operatorname{orb}(1)| = 4$, $|\operatorname{Stab}(1)| = 2$

d) $\boxed{\text{VERDADERO}}$

Sean $h_1, h_2 \in H$. Como f es biyección, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $f(g_1) = h_1$, $f(g_2) = h_2$

$$f^{-1}(h_1 \cdot h_2) = f^{-1}(f(g_1)\cdot f(g_2)) \underset{f \text{ homomorfismo}}{=} f^{-1}(f(g_1 \cdot g_2)) =$$

$$= g_1 g_2 = f^{-1}(h_1)\cdot f^{-1}(h_2)$$

5/ Sea $D_4 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

donde
$$\sigma_1 = (1\,2\,3\,4)$$
$$\sigma_2 = \sigma_1^2 = (1\,3)(2\,4)$$
$$\sigma_3 = \sigma_1^3 = (1\,4\,3\,2)$$
$$\tau_1 = (1\,2)(3\,4)$$
$$\tau_2 = (1\,4)(2\,3)$$
$$\tau_3 = (2\,4)$$
$$\tau_4 = (1\,3)$$

Vamos a encontrar todos los subgrupos de D_4. Como $|D_4| = 8$, sólo puede haber subgrupos de orden 1, 2, 4, 8.

<u>Orden 1</u>: $\{e\}$

<u>Orden 8</u>: D_4.

Los subgrupos de <u>orden 2</u> solo pueden ser cíclicos generados por un elemento de orden 2.

$$H_1 = \langle \tau_1 \rangle,\ H_2 = \langle \tau_2 \rangle,\ H_3 = \langle \tau_3 \rangle,\ H_4 = \langle \tau_4 \rangle$$

$$H_5 = \langle \sigma_2 \rangle$$

Subgrupos de orden 4: solo hay dos elementos de orden 4, que generan el mismo subgrupo

$$K_1 = <\sigma_1> = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = <\sigma_3>$$

Busquemos el resto de subgrupos de orden 4.
Si σ_1 ó σ_3 están en un sugrupo H junto con cualquier simetría $\tau_i \Rightarrow H$ tiene al menos 5 elementos $\Rightarrow H = D_4$.
Por tanto podemos descartar ese caso.
Supongamos que τ_1 y σ_2 están en un subgrupo K_2. Entonces

$$\tau_1 \circ \sigma_2 = (1\,2)(3\,4)(1\,3)(2\,4) = \underset{\underset{\tau_2 \in K_2}{\shortparallel}}{(1\,4)(2\,3)}$$

También se cumple

$$\sigma_2 \circ \tau_1 = (1\,3)(2\,4)(1\,2)(3\,4) = (1\,4)(2\,3) = \tau_2$$

Como todos estos elementos tienen orden 2 se puede despejar en las igualdades anteriores:

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \sigma_2 \;;\; \tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_2 \;;$$
$$\sigma_2 \circ \tau_2 = \tau_1 \;;\; \tau_2 \circ \sigma_2 = \tau_1$$

Por tanto $K_2 = \{e, \tau_1, \tau_2, \sigma_2\}$ es cerrado para la composición y subgrupo de D_4.

Supongamos que τ_3 y σ_2 están en un subgrupo K_3. Entonces

$$\tau_3 \circ \sigma_2 = (2\,4)(1\,3)(2\,4) = (1\,3) = \tau_4 \in K_3$$

Razonando de manera análoga al caso anterior obtenemos que K_3 es cerrado y por tanto subgrupo

$$K_3 = \{e, \tau_3, \tau_4, \sigma_2\}$$

Esto cubre todas las posibles combinaciones de elementos para formar subgrupos de orden 4.

¿Cuáles son normales?

dos triviales, D_4 y $\{e\}$ siempre son normales en D_4

K_1, K_2 y K_3 son normales por tener índice 2 en D_4

Si τ_i es una simetría entonces

$\sigma_1 \tau_i$ también es una simetría $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sigma_1 \tau_i)^2 = e \Rightarrow \sigma_1 \tau_i \sigma_1 \tau_i = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 \tau_i \sigma_1 = \tau_i \Rightarrow \sigma_1 \tau_i = \tau_i \sigma_3 \neq \tau_i \sigma_1$$

luego σ_1 no conmuta con τ_i $\Rightarrow$ $\sigma_1 H_i \neq H_i \sigma_1$

$\Rightarrow H_1, H_2, H_3, H_4$ no son normales en D_4

Estudiando K_2 y K_3 hemos visto que σ_2 conmuta con todos los elementos de D_4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow H_5 = \langle \sigma_2 \rangle$ es normal en D_4.

<u>Obs</u> (en cuanto a la corrección del examen). Las justificaciones precisas de este ejercicio no son sencillas, se incluyen en esta solución para que las conozcáis. Por este motivo soluciones parciales o no totalmente justificadas a este ejercicio pueden puntuar alto.

6°/ Sabemos que cualquier $\sigma \in S_n$ se puede escribir como producto de transposiciones. Por tanto, si probamos que, a su vez, cualquier transposición puede escribirse como producto de $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$, habremos demostrado lo que se pide.

Esto es cierto ya que

$$(i, j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$$