

①

1º TEORÍA. NOTACIÓN: $\text{ord}(a, b) := \text{ord}(a, b)$

2º a) Si $\text{ord}(a) = \infty$ o' $\text{ord}(b) = \infty \Rightarrow \text{ord}(a, b) = \infty$

Demo Por reducción al absurdo: si fuera
 $\text{ord}(a, b) = n$ finito $\Rightarrow (a, b)^n = (a^n, b^n)$
 $\parallel$
 (e_G, e_H)

$\Rightarrow \text{ord}(a)$ y $\text{ord}(b)$ son finitos ¡o!

CASO 2 Si $\text{ord}(a) = n$, $\text{ord}(b) = m \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{ord}(a, b) = k = \text{mcm}(n, m)$

Demo $(a, b)^k = (a^k, b^k) = (e_G, e_H)$
 $\nwarrow$
 porque k es múltiplo
 tanto del orden de a
 como del orden de b .

~~Supra~~ Veamos que k es el mínimo natural
 que cumple esto. Por reducción al
 absurdo supongamos que $\exists l \in \mathbb{N} /$
 $(a, b)^l = (e_G, e_H)$ $\Rightarrow a^l = e_G, b^l = e_H$
 (siendo $l < k$)

$\Rightarrow l \mid \text{ord}(a) = n$ ¡o! (porque $l < k = \text{mcm}(n, m)$)
 $l \mid \text{ord}(b) = m$

luego $k = \text{ord}(a, b)$

(b) $\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que tiene 6 elementos.

Por el teorema de Lagrange, los posibles órdenes de los elementos son 1, 2, 3, 6.

Calculemos el orden de 3.

$$3^2 = 9 = 2 \neq 1$$

$$3^3 = 3^2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \neq 1.$$

Como 3 no tiene orden 1, 2 ni 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\text{ord}(3) = 6} \Rightarrow \mathbb{Z}_7^*$ es cíclico.

Para encontrar elementos de orden 2 y 3 usaremos que si $\text{ord}(g) = a \cdot b \Rightarrow \text{ord}(g^a) = b$

$$\text{Por tanto } \text{ord}(3^2) = \boxed{\text{ord}(2) = 3}$$

$$\text{ord}(3^3) = \boxed{\text{ord}(6) = 2}$$

Y siempre $\boxed{\text{ord}(1) = 1}$

(c) $\mathbb{Z}_{10}$ tiene 10 elementos, por tanto los posibles órdenes de sus elementos son 1, 2, 5, 10.

Sabemos que en $\mathbb{Z}_{10}$ $\text{ord}(a) = \frac{10}{\text{mcd}(a, 10)}$

Por tanto

$$\boxed{\text{ord}(1) = \frac{10}{1} = 10}$$

$$\boxed{\text{ord}(2) = \frac{10}{2} = 5}$$

$$\boxed{\text{ord}(5) = \frac{10}{5} = 2}$$

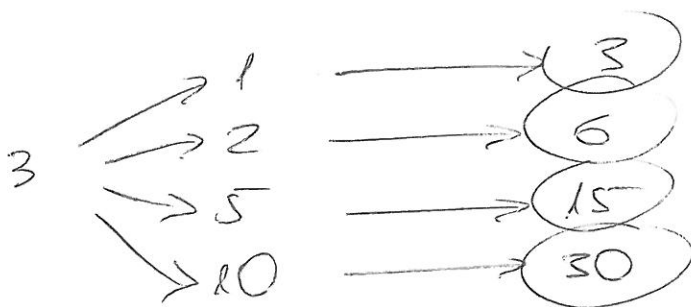
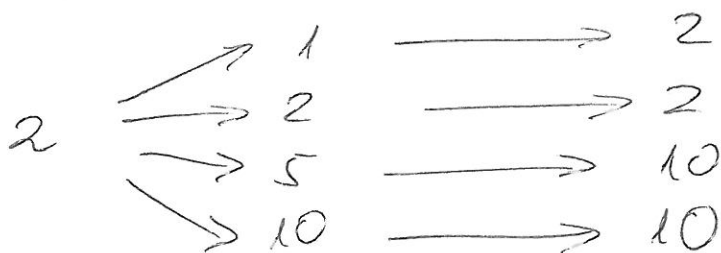
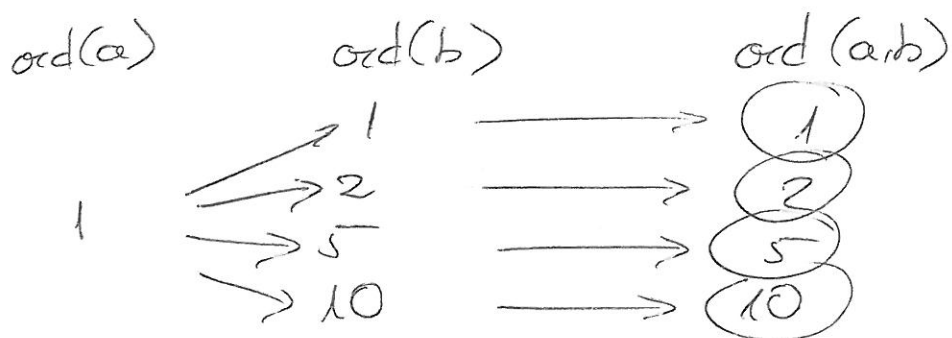
~~$\text{ord}(0) = \frac{10}{10} = 1$~~

$$\boxed{\text{ord}(0) = 1}$$

por ser el neutro.

④ ~~Para~~ Ordenes de elementos de $G : 1, 2, 3, 6$ ③
 Ordenes de elementos de $H : 1, 2, 5, 10$.

Ordenes en $G \times H$ (usando $\otimes$):



Para encontrar un elemento de orden $k = \text{mcm}(m, n)$ basta con combinar un elemento de orden m de G con un elemento de orden n de H :

$$\text{ord}(1,0) = 1$$

$$\text{ord}(2,0) = 3$$

$$\text{ord}(1,5) = 2$$

$$\text{ord}(2,5) = 6$$

$$\text{ord}(1,2) = 5$$

$$\text{ord}(2,2) = 15$$

$$\text{ord}(1,1) = 10$$

$$\text{ord}(2,1) = 30$$

$$(3^\circ) \text{ a) } D_n = \{ \sigma^j / j=0, \dots, n-1 \} \cup \{ \tau \sigma^j / j=0, \dots, n-1 \}$$

$$H = \langle \sigma^2 \rangle = \langle \sigma^2, \sigma^4, \dots, \underset{\text{id}}{\sigma^n} \rangle$$

consiste en las potencias pares de σ .
Por tanto, como n es par consta de $\frac{n}{2}$ elementos.

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{2n}{\frac{n}{2}} = 4$$

(b) Para ver que $H \triangleleft G$ vamos a demostrar que $\forall h \in H \quad \forall g \in G \quad g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$.

CASO 1 $g = \sigma^j$ con $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
 $h = \sigma^k$ con k par.

$$g \cdot h \cdot g^{-1} = \sigma^j \sigma^k \sigma^{-j} = \sigma^k \in H.$$

Caso 2 $g = z\sigma^j$ con $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

(5)

$h = \sigma^k$ con k par.

$$g \cdot h \cdot g^{-1} = z\sigma^j\sigma^k(z\sigma^j)^{-1} = \\ = z\sigma^j\sigma^k\sigma^{-j} \cdot z = z\sigma^k z =$$

porque z
tiene orden 2

$$= \sigma^{n-k} z z = \sigma^{n-k} \in H$$

porque tanto n como
 k son pares.

Luego $H \triangleleft G$.

(c) En este caso $H = \{id, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$

las clases del cociente son

$$[id] = H = \{id, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6\}$$

$$[\sigma] = \sigma H = \{\sigma, \sigma^3, \sigma^5, \sigma^7\}$$

~~$$[z] = zH = \{z, z\sigma^2, z\sigma^4, z\sigma^6\}$$~~

$$[z] = zH = \{z, z\sigma^2, z\sigma^4, z\sigma^6\}$$

$$[z\sigma] = z\sigma H = \{z\sigma, z\sigma^3, z\sigma^5, z\sigma^7\}$$

$$G/H = \{[id], [\sigma], [z], [z\sigma]\}$$

④ G/H tiene 4 elementos, sabemos por teoría que tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

⑥

$$[\sigma]^2 = [\sigma^2] = [\text{id}]$$

$$\left. \begin{aligned} [\tau]^2 &= [\tau^2] = [\text{id}] \\ [\tau\sigma]^2 &= [(\tau\sigma)^2] = [\text{id}] \end{aligned} \right\} \text{ porque } \tau, \tau\sigma \text{ son simetrías.}$$

Como todos los elementos tienen orden 2

$$\Rightarrow G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

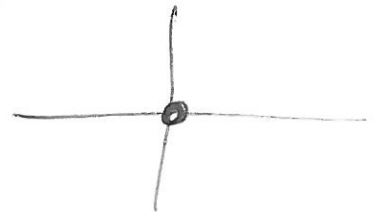
④ CASO 1

$$w = 0$$

$$\forall z \in G = \mathbb{D}^1 \quad z \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Stab}_0 = G$$

$$\text{y } \text{orb}(0) = \{0\}$$



CASO 2

$$w \neq 0$$

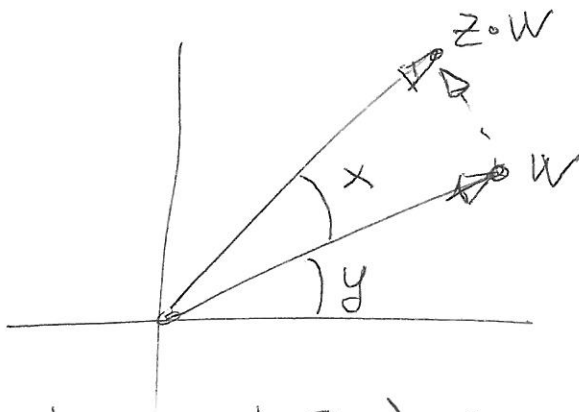
Escribimos z y w en forma exponencial

$$w = r e^{i\theta}$$

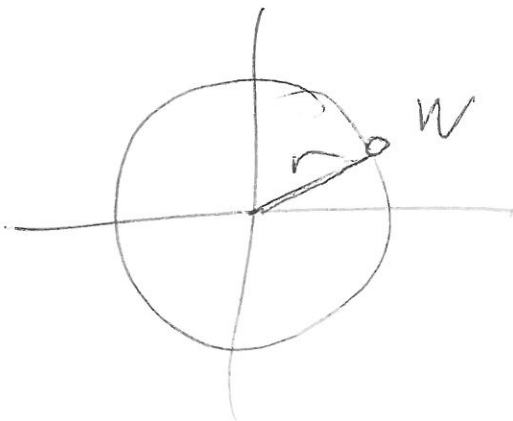
$$z = e^{ix} \quad (\text{porque tiene módulo } 1).$$

Por tanto $z \cdot w = e^{ix} \cdot r e^{iy} =$
 $= r e^{i(x+y)}$

Es decir, $z \cdot w$ tiene el mismo módulo que w y está girado un ángulo y respecto a w .



Por tanto $orb(w)$ son todos los números complejos que tienen módulo r , ya que podemos girar un ángulo y cualquiera a partir de elementos de $\mathbb{C}$. Es decir, $orb(w)$ es la circunferencia de centro 0 y radio r .



8

¿Quién es $\text{Stab } w$?

$$\text{Si } z \cdot w = w \Rightarrow z = 1 \\ w \neq 0$$

luego $\text{Stab } w = \{1\}$