Ejercicio 1

Sea la referencia afín dada por $(1,0,-1)$, $(1,0,1)$, $(2,0,0)$ $(1,1,0)$. Hallar las coordenadas baricéntricas $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ del punto (x, y, z).

Las coordenadas baricéntricas deben cumplir:

$$(x,y,z) = \lambda_0(1,0,-1) + \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,0,0) + \lambda_3(1,1,0)$$

Hacemos $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2$

$$(x,y,z) = \lambda_0(1,0,-1) + \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(2,0,0) +$$
$$+ (1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2)\cdot(1,1,0) =$$
$$= (\cancel{\lambda_0} + \cancel{\lambda_1} + 2\lambda_2 + 1 - \cancel{\lambda_0} - \cancel{\lambda_1} - \lambda_2,\ 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2,\ -\lambda_0 + \lambda_1)$$

$$= (\lambda_2 + 1,\ 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2,\ -\lambda_0 + \lambda_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda_2 + 1 \\ y = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ z = -\lambda_0 + \lambda_1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \boxed{\lambda_2 = x - 1} \\ -\lambda_1 = y - 1 + \lambda_0 + x - 1 \\ -\lambda_1 = -z - \lambda_0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$y = 1 - \lambda_0 + z + \lambda_0 - x + 1$$

$\rightarrow$ $y - 1 + \lambda_0 + x - 1 = -z - \lambda_0 \Rightarrow 2\lambda_0 = -x - y - z + 2 \Rightarrow \lambda_0 = \dfrac{-x-y-z+2}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)}$$

~~$-\lambda_0 = y - 1 + \lambda_1 + x - 1$~~

~~$\lambda_0 = z + \lambda_1$~~

$$\boxed{\lambda_1 = z + \lambda_0 = z + \left(\frac{-x-y-z+2}{2}\right) = \frac{\overbrace{2z - z}^{z} - x - y + 2}{2} = 1 - \frac{1}{2}(x+y-z)}$$

$$\lambda_3 = 1 - \left(\frac{-x+y-z+2}{2}\right) - \left(\frac{z+2-x-y}{2}\right) - x + 1 = \frac{2 + \cancel{x} + y - \cancel{z} - 2 + \cancel{z} - 2 + \cancel{x} + y - \cancel{2x} + 2}{2}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{2y}{2} = y}$$

Opción b

Ejercicio 2

Sea C el conjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones paramétricas:

$$x = a\cos^3\lambda \operatorname{sen}\lambda \ , \quad y = a\cos\lambda \operatorname{sen}^3\lambda \ , \quad z = a\cos\lambda \operatorname{sen}\lambda$$

para $\lambda \in [0, 2\pi)$, para un número real $a > 1$. sen t es la función seno.

- Comprobamos si $x + y - z = 0$

$$a\cos^3\lambda \operatorname{sen}\lambda + a\cos\lambda \operatorname{sen}^3\lambda - a\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda = 0$$

Factor común: $a\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda \cdot (\underbrace{\cos^2\lambda + \operatorname{sen}^2\lambda}_{1} - 1) = 0$

Esta condición se cumple

- Comprobamos si $z^4 = a^2 \cdot x \cdot y$

$$a^4 \cdot \cos^4\lambda \cdot \operatorname{sen}^4\lambda = a^2 \cdot a\cos^3\lambda\operatorname{sen}\lambda \cdot a\cos\lambda \cdot \operatorname{sen}^3\lambda$$

$$a^4 \cdot \cos^4\lambda \cdot \operatorname{sen}^4\lambda = a^4 \cdot \cos^4\lambda \cdot \operatorname{sen}^4\lambda$$ se cumple

- Comprobamos si $xy = a \cdot z$

$$a\cos^3\lambda\operatorname{sen}\lambda \cdot a\cos\lambda\operatorname{sen}^3\lambda = a^2\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda$$

No se cumple la igualdad

Opción b

Ejercicio 3

Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$x(t) = (t^2+t,\ 2t,\ t^3)$$

- Cálculo del radio de curvatura en $x(0)$

$x'(t) = (2t+1,\ 2,\ 3t^2)$ $\qquad x'(0) = (1,\ 2,\ 0)$

$x''(t) = (2,\ 0,\ 6t)$ $\qquad x''(0) = (2,\ 0,\ 0)$

$$x'(0) \times x''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ -4)$$

$\| x'(0) \times x''(0) \| = 4$

$\| x'(0) \| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

La curvatura será:

$$K(0) = \frac{\| x'(0) \times x''(0) \|}{\| x'(0) \|^3} = \frac{4}{\sqrt{5}^3}$$

El radio de curvatura es el inverso de $K(t)$:

$$R(0) = \frac{1}{K(0)} = \frac{\sqrt{5}^3}{4}$$

Opción b

Ejercicio 4

Sea S la superficie dada por $x(u,v) = (u, v, u^3 - v^2)$, señale las proposiciones ciertas:

- Todos los puntos de S son elípticos
- S tiene puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.
- Todos los puntos de S son hiperbólicos
- Las otras opciones son falsas.
- S solo tiene puntos planos
- Todos los puntos de S son parabólicos.

Cálculo de los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$x_u(u,v) = (1, 0, 3u^2)$$
$$x_v(u,v) = (0, 1, -2v)$$
$$x_{uu}(u,v) = (1, 0, 6u)$$
$$x_{uv}(u,v) = (0, 0, 0)$$
$$x_{vv}(u,v) = (0, 0, -2)$$

$$x_u \times x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3u^2 \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (-3u^2, 2v, 1)$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{(-3u^2, 2v, 1)}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}}$$

$$e = x_{uu}(u,v) \cdot N(u,v) = (1, 0, 6u) \cdot \frac{(-3u^2, 2v, 1)}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}} = \frac{-3u^2 + 6u}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}}$$

$$f = x_{uv}(u,v) \cdot N(u,v) = (0, 0, 0) \cdot \frac{(-3u^2, 2v, 1)}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}} = 0$$

$$g = x_{vv}(u,v) \cdot N(u,v) = (0, 0, -2) \cdot \frac{(-3u^2, 2v, 1)}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}} = \frac{-2}{\sqrt{9u^4 + 4v^2 + 1}}$$

• Los <u>puntos elípticos</u> serán aquellos que cumplan:

$$eg - f^2 > 0$$

$$\frac{-3u^2+6u}{\sqrt{9u^4+4v^2+1}} \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{9u^4+4v^2+1}} > 0 \Rightarrow \frac{6u^2-12u}{9u^4+4v^2+1} > 0$$

Para que cumpla la condición:

$$6u^2-12u > 0 \Rightarrow 6u(u-2) > 0 \Rightarrow u > 2$$

Por tanto cuando $u > 2$, la curva será elíptica.

• Los <u>puntos hiperbólicos</u> serán aquellos que cumplan:

$$eg - f^2 < 0$$

$$\frac{6u^2-12u}{9u^4+4v^2+1} < 0$$

Esta condición se cumple para $u=1$, por tanto la curva tiene puntos hiperbólicos.

• Los <u>puntos parabólicos</u> son aquellos que cumplen:

$$eg - f^2 = 0$$

$$\frac{6u^2-12u}{9u^4+4v^2+1} = 0 \Rightarrow 6u^2-12u = 0 \Rightarrow 6u(u-2) = 0$$

Lo cumplen los punto $u=0$ y $u=2$, por lo que la curva tiene puntos parabólicos.

• La curva no tiene <u>puntos planos</u>, ya que para ello $e = f = g = 0$.

Opción b

Ejercicio 5

Sea S la superficie dada por $z = x^2 - y^2 + y$.

Calcular las curvaturas principales en el punto $(1,0,1)$

En un entorno de $(1,0,1)$, la superficie está dada por la ecuación $x(u,v) = (u, v, u^2 - v^2 + v)$

$$x_u(u,v) = (1, 0, 2u)$$
$$x_v(u,v) = (0, 1, -2v+1)$$

$$N_1 = x_u \times x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v+1 \end{vmatrix} = (-2u)\cdot i + (2v-1)j + 1k$$

$$x_{uu}(u,v) = (0, 0, 2)$$
$$x_{vv}(u,v) = (0, 0, -2)$$
$$x_{uv}(u,v) = (0, 0, 0)$$

En el punto $(u,v) = (1,0)$:

$$x_u(1,0) = (1, 0, 2)$$
$$x_v(1,0) = (0, 1, 1)$$
$$x_u \times x_v = (-2, -1, 1)$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\| x_u \times x_v \|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$x_{uu}(1,0) = (0,0,2)$; $x_{uv}(0,0,0)$; $x_{vv}(1,0) = (0,0,-2)$

Cálculo de los coeficientes de las formas fundamentales en $(1,0,1)$.

$$E = x_u \cdot x_u = (1,0,2)\cdot(1,0,2) = 5$$

$$F = x_u \cdot x_v = (1,0,2)\cdot(0,1,1) = 2$$

$$G = x_v \cdot x_v = (0,1,1)\cdot(0,1,1) = 2$$

$$e = N \cdot x_{uu} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot(0,0,2) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$f = N \cdot x_{uv} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot(0,0,0) = 0$$

$$g = N \cdot x_{vv} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot(0,0,-2) = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2(EG-F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)\cdot k - f^2 + eg = 0$$

$$k^2(5\cdot 2 - 2^2) - \left(5\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) - 2\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\cdot k - 0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

$$6k^2 - \left(-\frac{10}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)k - \frac{4}{\sqrt{6}} = 0$$

$$6k^2 + \frac{6}{\sqrt{6}}k - \frac{4}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$k = \frac{-6/\sqrt{6} \pm \sqrt{(6/\sqrt{6})^2 + 6\cdot 4/6\cdot 4}}{6\cdot 2} = \frac{-6/\sqrt{6} \pm \sqrt{22}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\frac{-\sqrt{6}\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \pm \sqrt{22}}{12} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{22}}{12} \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{22}}{12} \end{array} \right.$$