2. Dadas f y g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 1, x_3)$, ver si son lineales y, en ese caso, hallar el núcleo y la imagen.

   La aplicación f es lineal. La comprobación se deja como ejercicio para el alumno. La aplicación g no es lineal $(g(0,0,0) \neq (0,0,0))$.

$$Ker(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\bar{x}) = \bar{0}\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

   Dicho de otro modo, $Ker(f)$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones cartesianas

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

   Al resolver, resulta $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$. Por otro lado, $Im(f) = L(f(B))$, siendo B cualquier base del espacio de partida $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la base canónica. Así:

$$Im(f) = L(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) =$$

$$= L((1,0,1), (0,1,1), (0,0,-1)) = \mathbb{R}^3$$

---

3. Determinar la dimensión y bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$ para las siguientes aplicaciones lineales:

   a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_3)$.
   Se tiene

$$Ker(f) = \begin{cases} 2x_1 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

   Dicho de otro modo, $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$, con lo que $dim(Ker(f)) = 0$ y no hay base. Por otro lado, si B_c es la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$Im(f) = L((f(B_c)) = L((2,1,0), (0,1,0), (0,0,1)) = \mathbb{R}^3.$$

   Para llegar a esta conclusión habría bastado aplicar la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, que permite concluir que $dim(Im(f)) = 3$. Una base de $Im(f)$ es cualquier base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la canónica.

b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2)$.
Calculemos $Ker(f)$:

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

de modo que $Ker(f) = \{(0,0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$.
Por otro lado,

$$Im(f) = L(f(B_c)) = L((2,1,0),(1,-2,1))$$

con lo que $dim(Im(f)) = 2$ y una base suya es $B_{Im(f)} = \{(2,1,0),(1,-2,1)\}$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$.
Se tiene

$$Ker(f) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

de modo que $Ker(f) = \{(0,0,0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$, por lo que no hay base. Si aplicamos la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, $3 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$, de manera que $dim(Im(f)) = 3$ y, por tanto, $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_3 + x_4)$.
Calculemos $Ker(f)$:

$$Ker(f) = \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Pasando a ecuaciones paramétricas queda

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\mu \\ x_4 = 2\mu \end{array} \right.$$

Por tanto, $dim(Ker(f)) = 2$ y una base es

$$B_{Ker(f)} = \{(1,1,0,0),(0,0,-1,2)\}.$$

La dimensión de la imagen de f es $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2$. Al estar $Im(f)$ contenida en $\mathbb{R}^2$, resulta $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Una base puede ser $B_{Im(f)} = \{(1,0),(0,1)\}$.

7. Sea la aplicación $f : E \to F$, con E y F de dimensiones 3 y 4 respectivamente, definida de la siguiente forma: $f(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_4$, $f(e_3) = e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4$ y $e_1 \in Ker(f)$. Hallar dimensión y una base para $Ker(f)$ y para $Im(f)$.

   Calculemos la matriz $A = M(f, B, B')$, siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ bases de E y F respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces

$$dim(Im(f)) = r(A) = 2 \qquad dim(Ker(f)) = dim(E) - dim(Im(f)) = 1$$

   Sabemos que $Im(f) = L((-1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1))$, de modo que $B_{Im(f)} = \{(-1, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1)\}$, todo ello con coordenadas respecto de B'. Así que $Im(f) = L(-e'_1 + e'_2 - e'_4, e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4)$, y una base suya es $B_{Im(f)} = \{-e'_1 + e'_2 - e'_4, e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4\}$.

Falta ahora determinar una base de $Ker(f)$.

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} -x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ -x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, una base es $B_{Ker(f)} = \{e_1\}$ (téngase en cuenta que $(1, 0, 0)$ son las coordenadas de e_1 respecto de B).

8. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida de la siguiente forma: $f(2,-1) = (1,0,-1,3)$ y $f(4,1) = (2,-2,3,1)$. Calcular:

   a) La matriz asociada respecto de las bases canónicas.

   b) Las ecuaciones de $Im(f)$.

   Resolvamos a).

$$f(1,0) = f\left(\frac{1}{6}\left((2,-1)+(4,1)\right)\right) = \frac{1}{6}f\left((2,-1)+(4,1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(f(2,-1)+f(4,1)\right) = \frac{1}{6}\left((1,0,-1,3)+(2,-2,3,1)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Por otro lado,

$$f(0,1) = f\left(\frac{1}{3}\left(-2(2,-1)+(4,1)\right)\right) = \frac{1}{3}f\left(-2(2,-1)+(4,1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2f(2,-1)+f(4,1)\right) = \frac{1}{3}\left(-2(1,0,-1,3)+(2,-2,3,1)\right) =$$

$$= \left(0, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

Por consiguiente, la matriz $A = M(f, B_c, B_c')$, siendo B_c y B_c' las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente, es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también se puede hallar observando que

$$M(f, B_c, B_c') = M(f, B, B_c')M(B_c, B)$$

siendo B la base $B = \{(2,-1),(4,1)\}$. Se tiene

$$M(f, B, B_c') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

—

y

$$M(B_c, B) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sólo queda multiplicar las dos matrices:

$$M(f, B_c, B'_c) = M(f, B, B'_c)M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Se tiene $Im(f) = L((1,0,-1,3),(2,-2,3,1))$, de manera que una base suya es la formada por estos dos vectores. Las ecuaciones paramétricas son

$$Im(f) \equiv \begin{cases} y_1 = \lambda + 2\mu \\ y_2 = -2\mu \\ y_3 = -\lambda + 3\mu \\ y_4 = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

Determinemos las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$. Sea $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Im(f)$. Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

de modo que las ecuaciones cartesianas son

$$Im(f) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} -2y_1 - 5y_2 - 2y_3 & = & 0 \\ 6y_1 + 5y_2 - 2y_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

---

10. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(1,0,1) = (0,1)$, $f(0,0,-1) = (1,1)$, $f(2,1,1) = (1,0)$

    a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

    b) Hallar la matriz de f respecto de las bases

    $$B_1 = \{(1,0,1),(0,0,-1),(2,1,1)\} \text{ y } B_2 = \{(0,1),(1,0)\}.$$

    c) Hallar ecuaciones y dimensión de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Resolvamos el apartado a). Se tiene

$$f(1,0,0) = f((1,0,1) + (0,0,-1)) = f(1,0,1) + f(0,0,-1) =$$
$$= (0,1) + (1,1) = (1,2).$$
$$f(0,1,0) = f((2,1,1) - 2(1,0,1) - (0,0,-1)) =$$
$$= f(2,1,1) - 2f(1,0,1) - f(0,0,-1) = (0,-3).$$
$$f(0,0,1) = f(-(0,0,-1)) = (-1,-1).$$

De modo que, si B_c y B'_c son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente, la matriz $A = M(f, B_c, B'_c)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). La matriz $M(f, B_1, B_2)$ es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos el apartado c). Para determinar las ecuaciones de $Ker(f)$ y de $Im(f)$ basta considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $Im(f) = L((1,2),(0,-3),(-1,1)) = \mathbb{R}^2$, $dim(Im(f)) = 2$.

Por la fórmula de las dimensiones, $dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$. Las ecuaciones cartesianas son

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

---

13. Sean

$$B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ y } B_1' = \{(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1)\}$$

bases de $\mathbb{R}^3$. Sean B_c la base canónica y

$$B_2 = \{(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$$

bases de $\mathbb{R}^4$.

a) ¿Qué vector de $\mathbb{R}^3$ tiene, respecto a la base B_1, coordenadas $(1,2,-1)$ y cuáles son éstas respecto a B_1'?

b) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 en B_1' y de B_c en B_2.

c) Siendo f el homomorfismo caracterizado por $f(1,1,0) = (1,1,0,0)$, $f(1,0,1) = (1,0,1,0)$ y $f(0,1,1) = (0,0,1,1)$, hallar la matriz de f respecto de B_1 y B_c, respecto de B_1 y B_2, respecto de B_1' y B_c y respecto de B_1' y B_2.

Resolvamos el apartado a). Buscamos un vector $\bar{x}$ tal que sus coordenadas respecto de la base B_1 sean $X_{B_1} = (1,2,-1)$. Esto quiere decir que

$$\bar{x} = 1(1,1,0) + 2(1,0,1) - 1(0,1,1) = (3,0,1)$$

De modo que las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, B_c', son $X_{B_c'} = (3,0,1)$.

Buscamos ahora las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de B_1', $X_{B_1'}$. Téngase en cuenta que $X_{B_1'} = M(B_c', B_1')X_{B_c'}$. La matriz $M(B_c', B_1')$ es

$$M(B_1', B_c')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$X_{B_1'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Determinemos $P = M(B_1, B_1')$. Téngase en cuenta que $M(B_1, B_1') = M(B_c', B_1')M(B_1, B_c')$. Como

$$M(B_1, B_c') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M(B_c', B_1') = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$P = M(B_1, B_1') = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Falta calcular la matriz $Q = M(B_c, B_2)$. Se tendrá

$$Q = M(B_c, B_2) = M(B_2, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado c). La matriz $F = M(f, B_1, B_c)$ es

$$F = M(f, B_1, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinemos ahora $G = M(f, B_1, B_2)$. Resulta

$$G = M(B_c, B_2)M(f, B_1, B_c) = QF = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Hallemos $H = M(f, B_1', B_c)$. Como $M(f, B_1', B_c) = M(f, B_1, B_c)M(B_1', B_1) = FP^{-1}$ resulta

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Tan sólo queda calcular $I = M(f, B_1', B_2) = M(B_c, B_2)M(f, B_1', B_c) = QH$. Se tendrá

$$I = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 & -7/6 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ 5/6 & -7/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

---

14. Sea la aplicación $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a+b+c, 0)$$

a) Probar que f es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.

b) Obtener las bases, dimensión y ecuaciones implícitas de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Resolvamos el apartado a). La demostración de la linealidad de f es rutinaria y se deja como ejercicio para el alumno. La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiemos b). Comenzamos con el cálculo de las dimensiones.

$$dim(Im(f)) = r(F) = 2$$

y

$$dim(Ker(f)) = dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - dim(Im(f)) = 4 - 2 = 2$$

Una base para $Im(f)$ se obtiene a partir de las columnas de F:

$$B_{Im(f)} = \{(1,1,0), (0,1,0)\}$$

La ecuación implícita es

$$Im(f) \equiv \{y_3 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas del núcleo son

$$Ker(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Una base es $B_{Ker(f)} = \{(0,-1,0), (0,0,1)\}$