

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 8. ESPACIOS AFINES IV

1. Halla la ecuación de la homotecia de $\mathbb{R}^4$ de centro el punto $O = (1, 3, -1, 1)$ y razón 2.
2. ¿Existe una homotecia $f: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ tal que $f(1, 1) = (4, 2)$ y $f(-1, 0) = (-2, -1)$? En caso afirmativo calcula su ecuación.
3. Halla la ecuación de la afinidad f que cumple $f(p_i) = p'_i$, donde:

$$p_1 = (0, 0), p'_1 = (3, 6); \quad p_2 = (-1, 2), p'_2 = (22, 48); \quad p_3 = (2, -2), p'_3 = (-11, 28).$$

Determina los puntos fijos de f . ¿Es f una traslación? ¿Es una homotecia? ¿Es una proyección? ¿Es una simetría?

4. Considera una referencia afín $R = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ en $\mathbb{R}^3$, y la afinidad $f(x, y, z) = (x', y', z')$:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x + y + z + 1) \\ y' &= -x + 2y + z + 1 \\ z' &= \frac{1}{2}(3x - 3y - z - 3) \end{aligned}$$

- a) Demuestra que f es una proyección.
 - b) Halla la variedad de puntos fijos de f .
 - c) Halla la dirección de proyección de f .
5. Sea (A, E, φ) un espacio afín. Sea $f: A \rightarrow A$ una simetría. Demuestra que existen una variedad lineal $A_1 \subset A$ y un subespacio vectorial $F \subset E$, complementario en E al espacio director de A_1 , tal que si π es la proyección de A sobre A_1 paralelamente a F entonces $f = 2\pi - \text{id}_A$.
 6. Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p = (0, 1, 1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y π el plano $\pi = \{y + z = 1\}$. Sea f la simetría respecto de L paralela a π . Calcula la ecuación de f .
 7. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ considera la afinidad $f(x, y, z) = (x', y', z')$ donde:

$$\begin{aligned} x' &= 2 - x + y - z \\ y' &= 1 + 2x + 2y + 2z \\ z' &= 1 - 2z \end{aligned}$$

Calcula sus puntos fijos, y encuentra la imagen del plano $x + y - z = 2$.

8. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ considera la afinidad dada en la referencia $\mathcal{R} = \{O; u_1, u_2, u_3\}$ por $f(x, y, z) = (x', y', z')$, con

$$\begin{aligned} x' &= 2 - x + y - z \\ y' &= 1 + x + y + z \\ z' &= -x - 2z \end{aligned}$$

- a) ¿En qué se transforma la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$ contenida en el plano $z = 2$?
- b) Halla las ecuaciones de f en la referencia $\mathcal{R}' = \{O'; u'_1, u'_2, u'_3\}$, donde $O' = (0, 3, 2)$, $u'_1 = (1, 0, 1)$, $u'_2 = (0, 1, 1)$, $u'_3 = (0, 0, 1)$ respecto a la referencia $\mathcal{R}$.