

Luis M. Sesé
Coordinador de CNyEA

P.1

A) La tabla de diferencias no presenta diferencias segundas constantes, como debería por tratarse de un polinomio de segundo grado. Los datos que se obtienen para dichas $\Delta^2 z_k$ son

$$\Delta^2 z_0 = -2,03 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta^2 z_1 = +1,03 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta^2 z_2 = \Delta^2 z_3 = \Delta^2 z_4 = +0,01 \cdot 10^{-3}$$

Observando el patrón de signos y tomando como valor constante $\Delta^2 = 0,01 \cdot 10^{-3}$, el valor erróneo está en $p = 10$:

al dar marcha atrás en los cálculos se tiene $\rightarrow 1,006605$ que es el valor correcto a esa presión.

Puede comprobarse, sin hacer ya ningún cambio adicional, que la tabla ahora es perfectamente consistente: $\Delta^2 = 0,01 \cdot 10^{-3}$ para todas las entradas.

B) Para calcular los coeficientes B y C, por ejemplo, se plantea el polinomio de avance

$$p_k = 1,000660 + 5,945 \cdot 10^{-3} k + \frac{1}{2} k(k-1) 0,01 \cdot 10^{-3}$$

en el que debe hacerse la sustitución a la variable original $k = \frac{p-1}{9}$, y operando se llega a

$$B = 6,60 \cdot 10^{-4} \text{ atm}^{-1}, \quad C = 6,17 \cdot 10^{-8} \text{ atm}^{-2}$$

P.2

Hay que determinar la posición del máximo de una función. Se calcula la función derivada de la función original, se iguala a cero y se resuelve la ecuación no lineal resultante.

$$\rho = C \frac{x^3}{\exp(x)-1} \rightarrow \frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow f(x) = (\exp(x)-1)3x^2 - x^3 \exp(x) = 0$$

La raíz cero no es significativa para el problema (es un *mínimo*). Puede hacerse un pequeño análisis de signos para ver donde está localizada la raíz significativa (que es un *máximo*) y además decidir un buen punto de partida (ver el texto para estudiar estos detalles).

La raíz buscada puede obtenerse aplicando un método iterativo (Newton, punto fijo,...).

Con Newton, por ejemplo, partiendo de $x_0 = 4$, y transformando ligeramente la ecuación no lineal (ni x , ni $\exp(x)$ pueden tomar valores nulos en la región de localización de la raíz):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 3 + 3 \exp(-x_n)}{1 - 3 \exp(-x_n)} \rightarrow \dots$$

$$x_1 = 2,883716761$$

$$x_5 = 2,821439372 = x_M \text{ (convergencia a 9 decimales)}$$

La frecuencia máxima se obtiene de

$$\nu_M = \frac{k_B T}{h} x_M = 3,5273756 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

P.3

$$\mu = \frac{m m_p}{m + m_p} \rightarrow \Delta\mu = \left| \frac{\partial \mu}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial \mu}{\partial m_p} \right| \Delta m_p = \frac{m_p^2 \Delta m + m^2 \Delta m_p}{(m + m_p)^2}$$

Sustituyendo los valores dados y operando:

$$\mu = (9,1033 \pm 0,0003) \cdot 10^{-28} \text{ g}, \text{ siendo el error relativo: } \delta = 3,3 \cdot 10^{-5} \equiv \dots \% \equiv \dots \text{ ppm}$$

P.4

Hay $k = 3$ Muestras y $N = 4$ Mediciones por muestra. Restando, por ejemplo, 25 a todos los datos:

$$\bar{x}_1 = 7,25 \quad \bar{x}_2 = 2 \quad \bar{x}_3 = -5,25 \rightarrow \bar{x} = 1,333333\dots$$

$$s_n^2 = 157,583333\dots (2 \text{ grados de libertad}) \quad s_d^2 = 8,1666666\dots (9 \text{ grados de libertad})$$

$$F_{2,9} = 19,296 > \text{Valores Críticos: } F_{2,9}^C(0,05) = 4,26 \quad F_{2,9}^C(0,01) = 8,02$$

Por tanto se rechaza la hipótesis nula a ambos niveles: NO hay homogeneidad de medias muestrales a ambos niveles.