

Luis M. Sesé
Coordinador de CNyEA

P.1

Utilizando los datos de la tabla directamente, la integración debe hacerse mediante la regla del trapecio. Hay que prestar atención a que el espaciado no es constante, y además a que debe determinarse el valor de la función a integrar en presión = 0, así como obtener el resto de los valores de esta función: $f(p)$ que tiene dimensiones de (presión)⁻¹.

$$\ln \chi = \int_0^{P^*} f(p) dp = \int_0^{P^*} \frac{z-1}{p} dp$$

p	50	100	200	400	800	1000
$(z-1)/p$	$-4 \cdot 10^{-4}$	$-5 \cdot 10^{-4}$	$+2 \cdot 10^{-4}$	...	...	$+10,6 \cdot 10^{-4}$

La extrapolación indicada en el enunciado a $p = 0$ es directa: $(z-1)/p = -3 \cdot 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$.

Integrando sobre intervalos (espaciado constante):

$$P_1^* = 50 \rightarrow \ln \chi = \frac{50}{2} (-3 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}) = \dots \rightarrow \chi_1 \approx 0,983$$

$$P_2^* = 1000 \rightarrow \ln \chi = \frac{50}{2} (-3 - 8 - 5) \cdot 10^{-4} + \frac{100}{2} (-5 + 2) \cdot 10^{-4} + \frac{200}{2} (2 + 6,5) \cdot 10^{-4} + \frac{400}{2} (6,5 + 10) \cdot 10^{-4} + \frac{200}{2} (10 + 10,6) \cdot 10^{-4} = \dots \rightarrow \chi_2 \approx 1,761$$

P.2

Se pide determinar únicamente los valores propios de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow P(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 7x^2 - 12x + 3 = 0$$

Un pequeño análisis de los cambios de signo de $P(x)$ indica que las raíces están en los intervalos $(0, 1)$ $(2, 3)$ $(4, 5)$

Aplicando el método de Newton (que converge cuadráticamente), se tiene la relación general

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 7x_n^2 + 12x_n - 3}{3x_n^2 - 14x_n + 12}$$

Partiendo de los valores que se indican y con convergencia hasta el máximo de precisión de la calculadora, se obtiene

Raíz en (0,1)

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = 0,25$$

.....

$$\text{iteración } x_5 = 0,3003718517$$

Raíz en (2,3)

$$x_0 = 2 \rightarrow x_1 = 2,25$$

.....

$$x_4 = 2,239123278$$

Raíz en (4,5)

$$x_0 = 4 \rightarrow x_1 = 4,75$$

.....

$$x_6 = 4,46050487$$

Estos tres autovalores conservan la traza y el determinante de la matriz A .

P.3

A) La función densidad $f(x)$ es la derivada de la función integral $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{6}(x^2 + x) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{6}(2x + 1) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

B) $f(x)$ está normalizada y por tanto

$$\langle x \rangle = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{1}{6} (2x + 1) dx = \frac{11}{9}$$

C) Igualmente, como $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, se tiene

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^2 x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \frac{1}{6} (2x + 1) dx = \frac{16}{9} \rightarrow \sigma^2 = \frac{23}{81}$$

P.4

Hay $k = 4$ Muestras y $N = 3$ Mediciones por muestra. Restando 25 a todos los datos (por ejemplo):

$$\bar{x}_1 = 3 \quad \bar{x}_2 = -3 \quad \bar{x}_3 = -7,33333... \quad \bar{x}_4 = -1 \rightarrow \bar{x} = -2,083333...$$

$$s_n^2 = 55,4166666... (3 \text{ grados de libertad}) \quad s_d^2 = 22,083333... (8 \text{ grados de libertad})$$

$$F_{3,8} = 2,509 < \text{Valores Críticos: } F_{3,8}^C(0,05) = 4,07 \quad F_{3,8}^C(0,01) = 7,59$$

Por tanto se acepta la hipótesis nula a ambos niveles: SÍ hay homogeneidad de medias muestrales a ambos niveles.