

Soluciones Cálculo Numérico y Estadística Aplicada¹

Original / Septiembre 2013

1. $z(x) = 1 + \frac{x + 0081x^2}{1 - 0,511x}$

a)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4		0,7
z	1	1,10624	1,22638	1,36293	1,51905		2,15163

b) $z_{\text{exacto}}(x = 0,22) = 1,25228$

$$x = 0,22 \rightarrow z_0 = 0,2 \quad k = \frac{0,22 - 0,2}{0,1} = 0,2 \rightarrow p(k) = z_0 + k\Delta z_0 + \frac{k(k-1)}{2} \Delta^2 z_0$$

valor interpolado $p(k = 0,2) = 1,25212$

c) $(dz/dx)_{x=0,3}$

Stirling: $D_{\text{Stirling}} = D_1 = \frac{1,51905 - 1,22638}{2 \times 0,1} = 1,46335 \quad (h_1 = 0,1)$

Richardson: $D_2 = \frac{1,69879 - 1,10624}{2 \times 0,2} = 1,481375 \quad (h_2 = 0,2)$

$$D_{\text{Richardson}} = \frac{D_1 - \alpha^2 D_2}{1 - \alpha^2} = 1,45734 \quad (\alpha = 0,5)$$

Exacto = 1,45749

2. $I = \int_0^{1,2} \frac{z^3}{\exp(z) - 1} dz$

a)

z	0	0,3	0,6	0,9	1,2
y(z)	0*	0,077174	0,262736	0,499451	0,744790

*No hay indeterminación 0/0 en $z = 0$. Aplicar, por ejemplo, L'Hôpital.

Trapecios: $I = 0,363527$

Simpson: $I = 0,357676$

¹ © L.M. Sesé, CC y TT Fisicoquímicas, UNED, Sept. 2013

b) Comparar los valores absolutos de los errores de truncamiento de ambas fórmulas $|\varepsilon_s| < |\varepsilon_T|$ y despejar la relación entre las derivadas pedidas. Notar que los puntos intermedios ξ_s y ξ_T no tienen porqué coincidir.

3. Hay que tipificar los datos de la Gaussiana seguida por los datos de energía.

a) $z_c = \frac{E - \langle E \rangle}{\sigma_E} = 1,32 \rightarrow p(Z \leq z_c) = 0,9066$

b) $z_{c1} = \frac{E_1 - \langle E \rangle}{\sigma_E} = -2 \quad z_{c2} = \frac{E_2 - \langle E \rangle}{\sigma_E} = 2,2 \rightarrow p(z_{c1} \leq Z < z_{c2}) = 0,9633$

c) $z_{c1} = \frac{E_1 - \langle E \rangle}{\sigma_E} \approx -0,455 \quad z_{c2} = \frac{E_2 - \langle E \rangle}{\sigma_E} \approx 23,79 \rightarrow p(z_{c1} < Z < z_{c2}) = 0,6754$

4. Es un cálculo ANOVA-1. $k = 4$ muestras, $N = 3$ mediciones por cada muestra.

Grados de libertad: $\nu_n = (4-1) = 3 \quad \nu_d = 4(3-1) = 8$

Restando, por ejemplo, 59 a todos los datos:

Media $\bar{x} = 5/12$; $s_n^2 = \frac{2315}{36} \quad s_d^2 = \frac{61}{2} \quad ; \quad F_{3,8} = \frac{s_n^2}{s_d^2} \approx 2,108; \quad F_{3,8}^C(\alpha = 0,05) = 4,07$

Como $F_{3,8} < F_{3,8}^C$ hay homogeneidad de medias.

Reserva / Septiembre 2013

1. $P = A - \tan^{-1} \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{1+\rho^2} \quad (\text{ángulos en radianes})$

a)

ρ	1	2	...	8	9	10
P	8,7146	9,1364	...	9,7526	9,7796	9,8013

b) $P(\rho = 9,6) \rightarrow \rho_0 = 8 \quad k = \frac{9,6-8}{1} = 1,6 \rightarrow P(k = 1,6) = \rho_0 + k\Delta\rho_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2\rho_0$

Valor interpolado $P(k = 1,6) = 9,7933$; Valor exacto $P(\rho = 9,6) = 9,7932$

c) $W_{\text{trapezios}} \approx -9,452 \quad (\text{la función a integrar es } P/\rho^2)$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

- a) El método de evaluación debería ser el de Gauss-Laguerre por adaptación del intervalo de integración.
b) La integral hay que prepararla en la forma

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\exp(x)\sqrt{x}}{1+x^2} \exp(-x) dx$$

con lo que la función a considerar en el algoritmo de Gauss-Laguerre es:

$$f(x) = \frac{\exp(x)\sqrt{x}}{1+x^2}$$

$$I_{GL} = \sum_{i=1}^4 c_i^L f(x_i^L) = 0,0005393 \left[\frac{\exp(x)\sqrt{x}}{1+x^2} \right]_{x1=9,3950709} + \dots + 0,6031541 \left[\frac{\exp(x)\sqrt{x}}{1+x^2} \right]_{x4=0,3225477} =$$

1,67805

El valor con integración exacta es 2,221441... Se trata de una función con caída muy lenta y habría que incluir muchos más términos GL para obtener mayor precisión.

$$3. \langle p \rangle = \frac{1}{\sum_i \varpi_i} \sum_i \varpi_i \langle p_i \rangle; \quad Var(\langle p \rangle) = \frac{1}{\sum_i \varpi_i}; \quad \varpi_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\langle p \rangle = 65,845 \quad Var(\langle p \rangle) = 0,1620 \rightarrow \langle p \rangle \pm \sigma_{\langle p \rangle} = 65,8 \pm 0,4$$

La importancia es inversa a la magnitud de cada error,

$$4. f(x, y) = x^2 \exp(-x^2) y^2 \quad -\infty < x < \infty \quad 0 < y < 1$$

$$a) \text{ Normalización } N \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx dy f(x, y) = N \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx dy x^2 \exp(-x^2) y^2 = 1$$

$$\text{Integrando (variables separadas)} \quad N = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{Nótese que hay factorización: } f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \{x^2 \exp(-x^2)\} \{y^2\}$$

b)

$$\langle x \rangle = 0 \quad \text{por simetría}$$

$$\langle y \rangle = \frac{3}{4}$$