Capítulo 9

Fluidos

9.1. Introducción - unidades

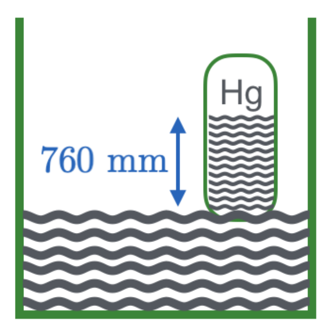
Veremos ahora como podemos aplicar los principios generales para el movimiento de un sistema de partículas al **movimiento de un fluido**. Consideramos en primer lugar un fluido (liquido o gas) perfecto, es decir un fluido en el que no hay fuerzas internas de fricción, no tampoco fricción del fluido con los cuerpos sólidos con las que se halla en contacto. Dicho de otro modo, ignorando la viscosidad.

Dado que la ausencia de fricción implica no hay fuerzas laterales entre las capas de fluido: esto significa que para una determinada superficie (imaginaria o no) en el fluido, la fuerza que ejerce el fluido es siempre normal a la superficie. Llamaremos **presión** a la fuerza ejercida por el fluido sobre la unidad de superficie, $P = F/S$. Las dimensiones de la presión son

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} = \frac{[E]}{[V]}. \tag{9.1}$$

Es decir, la presión tiene unidades de fuerza por unidad de superficie o de energía por unidad de volumen. La unidad de presión en el sistema internacional es el **Pascal**

$$1 \text{ Pa} = \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} = \text{J.m}^{-3} = \text{N.m}^{-2}. \tag{9.2}$$



Otras unidades son 1 bar $= 10^5$ Pa y 1 mbar $= 10^3$ Pa. otra unidad es el Torr o mm de Hg (mercur), que es la presión que ejerce por su peso una columna de 1 mm de Hg.

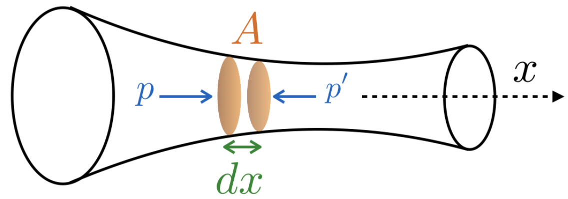
$$\begin{aligned} 1 \text{ Torr} &= \rho_{\text{Hg}} g \times 10^{-3} \\ &= (13{,}6 \times 10^3 \text{kg.m}^{-3})(9{,}81 \text{m.s}^{-2})(10^{-3}\text{m}) = 133{,}32 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

En el experimento de Torricelli, este comprobó que la **presión atmosférica** equivale a la columna de **760 mm de Hg**. Aunque la presión atmosférica es variable (anticiclones), esta medida de Torricelli sirve para definir otra unidad de presión: la atmosféra

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm de Hg} = 101325 \text{ Pa} = 101{,}325 \text{ mb} \tag{9.3}$$

9.2. Movimiento de un fluido - Teorema de Bernoulli

En un fluido ideal, consideramos las **lineas de corriente** que son las trayectorias que siguen las partículas de fluidos y tubos de corriente, formantes por un haz de linea de corriente.



Tomando ahora un tubo de corriente con eje paralelo al eje x, y consideramos una rodaja de fluido de área A y espesor $\mathrm{d}x$. La masa de la rodaja es $\mathrm{d}m = \rho A \mathrm{d}x$, donde ρ es la densidad del fluido. Ahora si p y p' son las presiones ejercidas por el fluido a izquierda y derecha de la rodaja, la fuerza interna ejercida por el fluido sobre la rodaja es

$$\mathrm{d}F_x = -p'A + pA = -(p' - p)A = -(p + \mathrm{d}p - p)A = -(\mathrm{d}p)A = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(A\mathrm{d}x) \tag{9.4}$$

Dado que $A\mathrm{d}x$ es el volumen de la rodaja, la fuerza interna por unidad de volumen que ejerce el fluido sobre la rodaja es

$$f_p = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \tag{9.5}$$

En general $\vec{f_p} = -\vec{\nabla}p$. Por el momento consideramos la presión del fluido como la única fuente de fuerza. La ecuación de movimiento para la rodaja es

$$\mathrm{d}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = dF_x \qquad \text{o sea} \qquad \rho A\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{9.6}$$

donde v es la velocidad del centro de masa de la rodaja. Cancelando el factor común $A\mathrm{d}x$ obtenemos

$$\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \tag{9.7}$$

Para seguir avanzando en el análisis vamos a ver ahora algo mas especifico y vamos a considerar un **fluido estacionario**, esto significa que aunque la velocidad de un elemento de fluido puede cambiar cuando el fluido cambia de posición, la velocidad del fluido en un punto dado del espacio es siempre la misma, es decir **el campo de velocidades del fluido depende de la posición pero no del tiempo**. Entonces en el caso de un movimiento estacionario si $\mathrm{d}t$ es el tiempo requerido por un elemento de fluido para recorrer la distancia $\mathrm{d}x$, podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v^2) \tag{9.8}$$

que substituyendo en (9.7) nos da

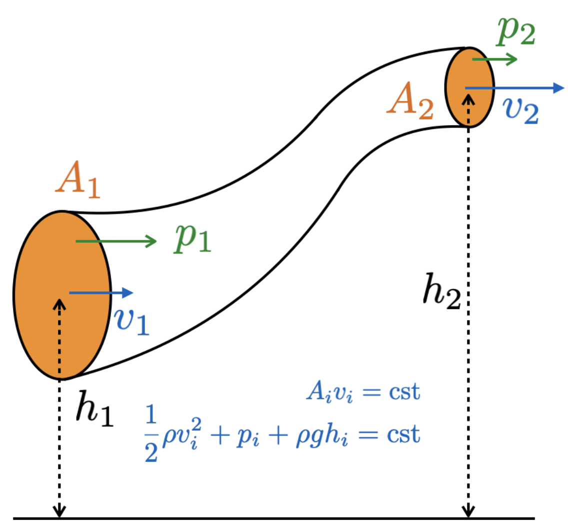
$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p). \tag{9.9}$$

Ahora si añadimos la hipótesis de que el fluido es incompresible, es decir que su densidad se mantiene constante, podemos escribir (9.9) en la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p\right) = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{constante} \tag{9.10}$$

La ecuación (9.10) expresa la conservación de energía por volumen de un fluido incompresible. También (9.10) nos dice que el cambio de energía cinética es equivalente a el trabajo de la fuerzas. Si además de la presión del fluido consideramos un cambio de altura, es decir un cambio de energía gravitatoria, tenemos que añadir este cambio de energía (por volumen) a la relación (9.10). Obtenemos

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \text{constante.} \tag{9.11}$$



Este resultado es conocido como teorema de Bernoulli, y es la ecuación fundamental para el movimiento de un fluido estacionario y incompresible. (9.11) expresa la conservación de la energía, en energía por unidad de volumen: $(1/2)\rho v^2$ es la energía cinética, p es la energía potencial interna y $\rho g h$ la energía potencial externa.

Además del teorema de Bernoulli que expresa la conservación de la energía, tenemos otra ecuación fundamental en el movimiento de un fluido que exprese la conservación de la masa, y que es la **ecuación de continuidad** de Vinci.

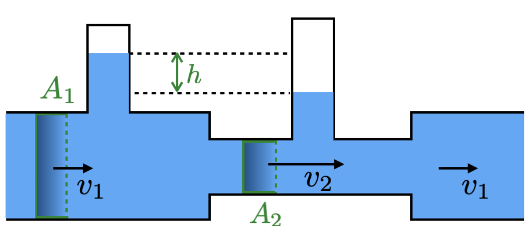
Consideremos un tubo de corriente de un fluido bajo condiciones estacionarias de forma que no se añade ni se pierde masa en ningún punto, es decir no hay fuente ni sumideros. Sean A_1 y A_2 dos secciones del tubo. El volumen entre la secciones A_1 y A_2 es constante. El volumen de fluido que pasa por A_1 en la unidad de tiempo es al que contiene un cilindro de base A_1 y altura v_1 y es igual a $A_1 v_1$. Por tanto la masa de fluido que pasa por A_1 en unidad de tiempo es $A_1 v_1 \rho_1$. Análogamente $\rho_2 A_2 v_2$ e la cuantiad de fluido que pasa por A_2 en la unidad de tiempo. Entonces la conservación de la masa requiere que

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{9.12}$$

que es la ecuación de continuidad. Si el fluido es incompresible, $\rho_1 = \rho_2$ y se tiene

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{9.13}$$

que nos dice que la velocidad del fluido es inversamente proporcional a la sección de fluido.



Vemos algunos ejemplos. Consideremos un **medidor Venturi**, que sirve para medir la velocidad de un fluido. La medida de la altura del fluido en ambos secciones nos da la diferencia de presión en ambos tramos.

$$p_1 - p_2 = \rho g h \tag{9.14}$$

Entonces aplicando el teorema de Bernoulli a una linea de corriente horizontal tenemos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{9.15}$$

y por otra parte la ecuación de continuidad nos da $A_1 v_1 = A_2 v_2$ que substituyamos en (9.15) para obtener

$$2(p_1 - p_2) = \rho(v_2^2 - v_1^2) = \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right). \tag{9.16}$$

Entonces

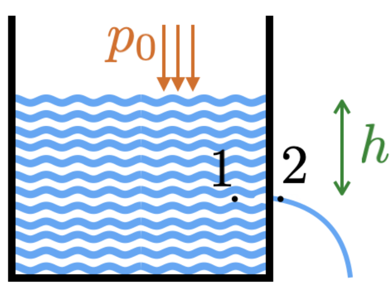
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(A_1^2 - A_2^2 \right)}}, \tag{9.17}$$

que nos permite de calcular la velocidad v_1 conociendo la diferencia de presión, la densidad del fluido y la relación entre secciones. Además de la ecuación de continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$ podemos también calcular v_2.

La cantidad de fluido que pasa a través de cualquier sección de tubo por unidad de tiempo qye se llama **flujo o gasto** es

$$Q = A_1 v_1 = A_2 A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(A_1^2 - A_2^2 \right)}} = K \sqrt{p_1 - p_2} \tag{9.18}$$

donde K es una constante que depende de las características del fluido y del tubo.



Como otro aplicación consideramos la velocidad del salida de un liquido por un orificio practicado en el tanque que lo contiene. Aplicando el teorema de Bernoulli a los puntos 1 y 2 situados a la misma altura del orificio dentro y fuera del tanque, tenemos

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \text{Ahora} \quad p_1 = p_0 + \rho g h \quad \text{y} \quad p_2 = p_0. \tag{9.19}$$

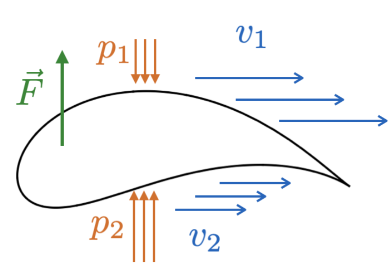
Donde p_0 es la presión atmosférica ambiente. La relación $p_1 = p_0 + \rho g h$ se obtiene notando que el fluido en el tanque está en el reposo. Se sigue por tanto que

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad \text{o sea} \qquad v = \sqrt{2gh} \tag{9.20}$$

de modo que la velocidad de salida del liquido por el orificio es la misma que adquiriría un cuerpo cayere libremente desde la superficie libre del liquido hasta el orificio. Este resultado se conoce como **teorema de Torricelli**.

Como otro ejemplo consideremos el empuje de sustentación sobre las alas de un avión. El perfil de un ala de avión está diseñada de tal forma que en función del ángulo de ataque, la velocidad del viento aparente por encima del ala v_2 es mayor que la velocidad del viento aparente por debajo del ala v_1. Entonces aplicando el teorema de Bernoulli tenemos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{9.21}$$



de modo que $v_1 > v_2$ implica $p_1 < p_2$. Se produce por tanto una sobre presión debajo del ala que sustente el avión. Si A es la área del ala del avión, la fuerza hacia arriba es

$$F = A(p_2 - p - 1) = \frac{1}{2}\rho A(v_1^2 - v_2^2) \tag{9.22}$$

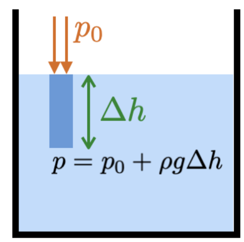
y también factorizando $v_1^2 - v_2^2 = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$ y teniendo en cuenta que $v = (1/2)(v_1 + v_2)$ es aproximadamente la velocidad del avión con respecto al aire, obtenemos que la fuerza o empuje hacia arriba en función dela velocidad del avión es

$$F = A\rho v(v_2 - v_1). \tag{9.23}$$

Cuando la velocidad del avión es suficiente para proporcionar una fuerza igual al peso del avión, se alcanza de sustentación. La vela de un velero navegando, actúa con arreglo al mismo principio físico.

9.3. Fluidos en reposo - Hidrostática

Como un caso particular del teorema de Bernoulli podemos estudiar el caso de un fluido incompresible en reposo, es decir la hidrostática. Eliminando los términos de velocidad en el teorema de Bernoulli, tenemos



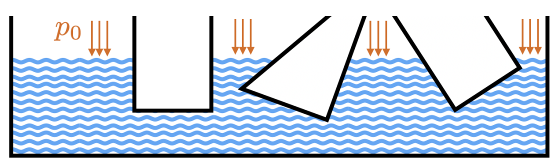
$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 \tag{9.24}$$

donde p_1 y p_2 son las presiones de fluido en punto situados a altura h_1 y h_2 respectivamente. La ecuación (9.24) es la ecuación fundamental de la hidrostática y contiene en particular el **principio de Pascal**, que dice que todos los puntos situados en un mismo plano horizontal están a la misma presión, y en particular la superficie libre (a presión atmosférica) de un liquido define la horizontalidad.

La ecuación (9.24) nos dice que la presión en un punto P de un liquido en reposo es igual a la presión en la superficie libre p_0 mas la presión debido al peso de la columna de liquido de altura z sobre dicho punto, es decir

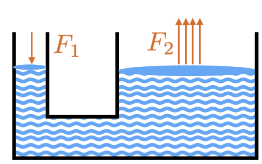
$$p = p_0 + \rho g z. \tag{9.25}$$

Notemos que el peso de una columna de liquido de sección A y altura z es ρAzg, de modo que la presión que ejerce es $\rho Azg/A = \rho gz$.



Del principio de Pascal se sigue que si tenemos un liquido que ocupe diferente vasijas comunicantes entre ellos, pero de distinta forma, dicho liquido homogéneo alcanza en todas las vasijas la misma altura.

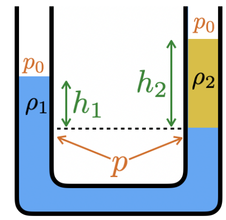
Vemos algunos ejemplos típicos de la hidrostática. La presión hidrostática, en ambos vasos comunicantes,



$$p = \frac{f}{S_1} = \frac{F}{S_2}, \tag{9.26}$$

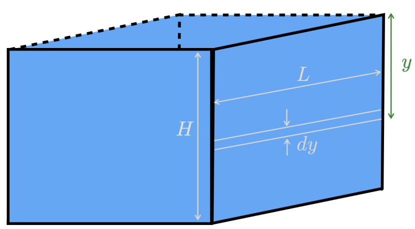
permite aplicando una fuerza f pequeña sobre una superficie pequeña S_1, obtener una fuerza grande distribuye sobre una superficie grande S_2.

Otro ejemplo clásico de hidrostática son los vasos comunicante. Si las dos vacuas contienen el mismo liquido, cuyas alcanzan la misma altura. Pero si contiene líquidos no miscibles con densidad diferente $\rho_1 > \rho_2$, ambos líquidos alcanzan (de acuerdo con el principio de Pascal) alturas diferentes $h_1 < h_2$ relacionados entre ellos en la forma



$$p_1 = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2 \tag{9.27}$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{9.28}$$



Como otro ejemplo calculamos la fuerza total sobre la pared de un estanque. La presión a $y = 0$ es la presión atmosférica $p_0 = 1$ atm. A una distancia y por debajo de la superficie, tenemos $p(y) = p_0 + \rho g y$. tenemos que la fuerza sobre un franje de espesor dy a profundidad y es

$$\mathrm{d}F = p(y) L \mathrm{d}y = p_0 L \mathrm{d}y + \rho g y L \mathrm{d}y \tag{9.29}$$

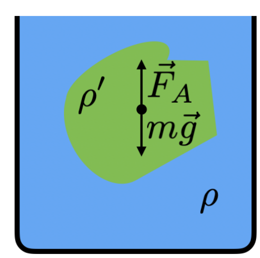
La fuerza total será

$$F = \int_0^H \mathrm{d}F = p_0 L H + \rho g L \frac{H^2}{2}. \tag{9.30}$$

El termino $p_0 LH$ representa la fuerza débito a la presión atmosférica sobre la pared de área LH y el termino $\rho g L H^2/2$ es débito a el peso del agua.

9.4. Principio de Arquímedes

Otro tema clásico de la hidrostática es el principio de Arquímedes. En el seno de un fluido en equilibrio aislamos mentalmente mediante una superficie cerrada S una porción de masa $H = \rho V$ de ese fluido donde V es el volumen encerrado por la superficie S, y ρ la densidad del fluido.



Para que la masa M de fluido se encentre en equilibrio (en reposo), la resultante de todas las fuerzas que ejerce el resto del fluido sobre ella, como presión a través de la superficie S, debe ser igual al peso de la masa M de fluido $Mg = \rho V g$. Si ahora substituimos la masa M de fluido por otro cuerpo con la misma forma y masa M', la resultante de todas las fuerzas que ejerce el fluido sobre la masa M', será la mismo que en el caso de la masa M, por tanto la masa M' será en el fluido experimentará un empuje hacia arriba dado por

$$E = Mg = \rho V g. \tag{9.31}$$

Este es el principio de Arquímedes. Si ρ' es la densidad del cuerpo y $\rho' > \rho$ el cuerpo se hunde, si $\rho' < \rho$ el cuerpo flota.

9.5. Ecuación barométrica

Para un fluido compresible, como por ejemplo un gas, la variación de la presión con la altura, sigue una ley diferente de la ley hidrostatica. Por ejemplo si tenemos un gas en equilibrio térmico, tenemos que la variación de la presión en la altura dz está dado por

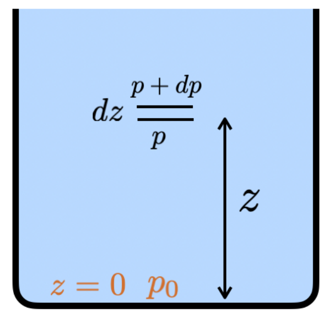
$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z \tag{9.32}$$

donde la densidad está dada por la ecuación de los gases perfectos $pV = nRT$. Si M es la masa molecular del gas, tenemos

$$nM = \rho V \qquad \text{o bien} \qquad \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}, \tag{9.33}$$

que substituimos en la ecuación de los gases perfectos nos da

$$p = \frac{\rho RT}{M} \qquad \rightarrow \qquad \rho = \frac{pM}{RT}. \tag{9.34}$$



que substituimos en (9.32) nos da

$$\mathrm{d}p = -\frac{pM}{RT} g \mathrm{d}z \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z \tag{9.35}$$

que integrando desde una altura que tomamos como $z = 0$ con una presión p_0, nos da

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_0^z \mathrm{d}z \qquad \text{o sea} \qquad p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}. \tag{9.36}$$

La expresión (9.36) nos da la variación de la presión con la altura, y se llama **ecuación barométrica**, y se puede utilizar para estudiar la variación de la presión atmosférica con la altura z. Si bien habría que corregirla porque la temperatura varia con la altura. Para alturas pequeñas tenemos

$$p \simeq p_0 \left(1 - \frac{Mg}{RTz} + \dots \right) = p_0 - \frac{Mg}{RTz} p_0 + \dots = p_0 - \rho g h. \tag{9.37}$$

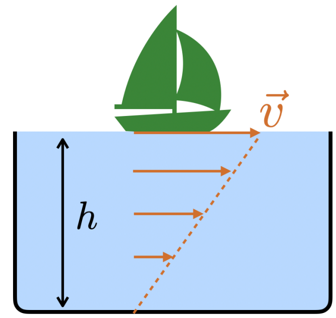
Es decir, tenemos la ecuación hidrostática válida para alturas pequeñas.

9.6. Viscosidad

El rozamiento entre las capas de un fluido recibe el nombre de **viscosidad**. Por ejemplo si tenemos dos vasos uno con agua y una con aceite, resulte mas fácil agitar el agua que el aceite, porque el aceite tiene una mayor viscosidad.

Para entender el concepto de viscosidad, consideremos un liquido en reposo, y que sobre un superficie libre depositamos una lámina que flote y le aplicamos una fuerza $\vec{F}_1$ paralela a la superficie libre. Cuando la resistencia del liquido igual a la fuerza $\vec{F}_1$, la lamina adquiere una velocidad constante $\vec{v}$. La capa de liquido inmediatamente en contacto con la lámina se ve arrastre por ella y se mueve con la misma velocidad $\vec{v}$. Esta capa arrastre a la que está debajo y comunica otra velocidad algo menor y así de modo que se establece un **gradiente de velocidad**, hasta la capa en contacto inmediatamente con el fondo que se encuentra en reposo.

En primera aproximación podemos suponer que la fuerza F entre las capas es constante y es igual en magnitud a la fuerza $\vec{F}_1$ que imprimimos a la lámina para iniciar el movimiento. Si consideremos la capa de liquido entre otras dos, como la capa de mas arriba se mueve hacia la derecha con respecto a la capa central, produce una fuerza hacia la derecha $+F$, mientras que la capa de abajo al moverse hacia la izquierda producirá sobre la capa central una fuerza igual y opuesta $-F$, de forma que la capa central y todas las capas de liquido se mueven con velocidad constante. Este description es correcta si el liquido no está sometido a fuerzas externas que lo hagan acelerar, es decir suponemos una situación estacionaria laminar para el liquido.



Los fluidos en régimen laminar incompresible y viscosidad constante, se llaman **fluidos Newtonianos**. Por un fluido Newtoniano, la fuerza de resistencia experimental por una placa de área S que se mueve, a velocidad constante v por la superficie de un fluido de profundidad h viene dada por

$$F = \eta S \frac{v}{h}, \tag{9.38}$$

El coeficiente de proporcionalidad η se llama coeficiente de viscosidad o **viscosidad del fluido**.

Por ejemplo para remolcar una gabarre con velocidad uniforme v, en un canal poco profundo, se necesitaría una fuerza dada por (9.38) donde η es la viscosidad del agua, S la área de la barca y h la profundidad.

Si la velocidad no varia de manera lineal, de forma experimental se compruebe que en esta situación, y en primera aproximación, la fuerza F es proporcional al gradiente de velocidad $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ y a la superficie de contacto S entre las capas de liquido en contacto, es decir

$$F = \eta S \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}. \tag{9.39}$$

Las dimensiones de η son

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S]\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2LT^{-1}L^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}. \tag{9.40}$$

La unidad internacional de viscosidad es kg.m^{-1}.s^{-1}. También como $[\eta] = [p]T$ se tiene 1 kg/(m.s) = 1 Pa.s = 1 N.s/m^2. Es mas usual que la unidad internacional, usar la unidad cgs llamado poise. 1 poise = 1 g / 1 cm / 1 s = 10^{-3} kg / 10^{-2} m / 1 s = 10^{-1} Pa. s. Es decir 1 Pa. s = 10 poise.

A veces se define la viscosidad cinemática η/ρ, con dimensiones

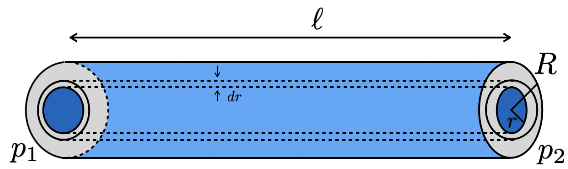
$$\left[\frac{\eta}{\rho}\right] = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}, \tag{9.41}$$

cuya unidad cgs se llama Stokes, 1 Stokes = cm^2/s.

Recordamos que en un fluido perfecto, la fuerza sobre cualquiera superficie dibujada mentalmente en el seno del fluido es perpendicular a dicha superficie, mientras que en un fluido viscoso tenemos ademas la fuerza de fricción entre las capas que es paralela a la superficie de separación entre ellas. Es una situación similar a la que ocurre en mecánica, con el movimiento sobre una superficie lisa o con rozamiento.

9.7. Formula de Poisseuille

Consideremos un tramo de longitud ℓ de una tubería de radio R que transporte un liquido en régimen estacionario. En las secciones A_1 y A_2 que limitan el tramo, tenemos presiones p_1 y p_2 con $p_1 > p_2$, de forma que la diferencia de presión produzca la fuerza necesaria para vencer la fricción viscosa del fluido. Este perdida de presión en una tubería por efecto de la viscosidad se llama **pérdida de carga** en la tubería. Si consideramos ahora un tubo de radio $r < R$, sobre esta tubo actúa la fuerza debida al gradiente de presión $F_1 = (p_1 - p_2)\pi r^2$, y la fuerza de fricción viscosa producida por la capa en forma de corona cilíndrica entre r y $r + \mathrm{d}r$. De acuerdo con (9.39) este fuerza viscosa que frena el fluido es



$$F_2 = \eta(2\pi r\ell)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}. \tag{9.42}$$

Para que el movimiento del fluido sea estacionario, las fuerzas F_1 y F_2 deben compensarse. Entonces

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi r\ell\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0, \tag{9.43}$$

donde podemos obtener una expresión para $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi r\ell\eta} = -\frac{(p_1 - p_2)r}{2\eta\ell} \tag{9.44}$$

Ahora asumiendo que la velocidad del fluido junto a las paredes de la tubería es nula, es decir $v(R) = 0$. Integrando (9.44) con esta condición, obtenemos

$$v(r) = v(R) + \int_R^r \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = -\int_R^r \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r\mathrm{d}r = \frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell}\int_r^R r\mathrm{d}r = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell}(R^2 - r^2). \tag{9.45}$$

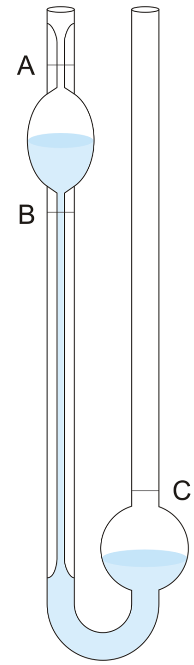
que nos da la velocidad de las capas de fluido en función de la distancia r el eje de la tubería. A partir de (9.45) podemos calcular el flujo, gasto o volumen de fluido por unidad de tiempo que transporte la tubería:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R 2\pi r v(r)\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell}(R^2 - r^2)r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2\eta\ell}(p_1 - p_2)\left[R^2\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi R^4}{8\eta\ell}(p_1 - p_2). \end{aligned} \tag{9.46}$$

que es la formula de Poiseuille que nos da el flujo en una tubería. La formula es valida sobre todo para tubos capilares o estrechos donde sin mas realistas las aproximaciones hechas.

La formula de Poiseuille sirve de base a un aparato físico para medir viscosidades llamando viscosimetro de Ostwald.

9.8. Viscosimetro de Ostwald



Consiste en un bulbo que se continua en un tubo capilar. Se rellena en bulbo con un liquido y se mide el tiempo que tarde la superficie del liquido en pasar de la marca A a la marca B. Si tenemos dos líquidos con densidades ρ_1 y ρ_2 que tardan tiempos t_1 y t_2 en pasar de la marca a a la marca b, y si V es el volumen entre ambas marcas de acuerdo con la ley de Poiseuille tenemos

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta_1 \ell}(\Delta p)_1 t_1 = \frac{\pi R^4}{8\eta_2 \ell}(\Delta p)_2 t_2 \tag{9.47}$$

Como la diferencia de altura entre ambos bulbos es la misma para los dos líquidos, las diferencias de presiones $(\Delta p)_1$ y $(\Delta p)_2$ son proporcionales a las densidades de los líquidos ρ_1 y ρ_2. Por tanto de (9.47)

$$\frac{\rho_1}{\eta_1} t_1 = \frac{\rho_2}{\eta_2} t_2 \qquad \text{de donde} \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2}. \tag{9.48}$$

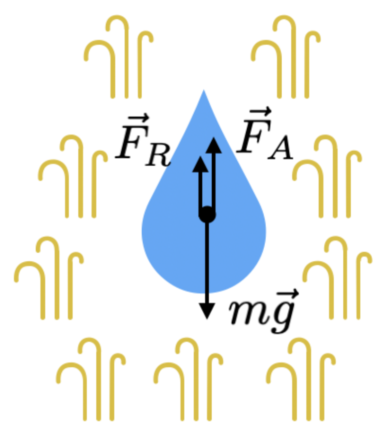
que nos permite determinar la viscosidad η_2 del liquido 2 conociendo la viscosidad del liquido de referencia η_1 y las densidades de ambos líquidos.

La figura del viscosimetro de Ostwald viene de E. Generalic.[1]

9.9. Movimiento de un sólido en un fluido

Terminamos esta capítulo de introducción a los fluidos con un par de ejemplos sobre el movimiento de un sólido en el seno de un fluido.

Consideramos en primer lugar la caída de un esfera de radio R y densidad ρ en fluido menos denso $\rho' < \rho$. Calculamos la velocidad limite de caída. La fuerza de fricción debido a la viscosidad del fluido es



$$F_R = 6\pi\eta v_\infty R. \tag{9.49}$$

Esta relación fue derivada por Stokes en 1851. Se pude demonstrar que un tercio de F_R viene por la presión del fluido y dos tercios por su viscosidad.[2] [3] Además tenemos el peso de la esfera y el empuje archimediano

$$mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad \text{y} \qquad F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g. \tag{9.50}$$

Entonces la velocidad limite de caída está dada por

$$mg - F_A - F_R = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g - 6\pi\eta v R = 0, \tag{9.51}$$

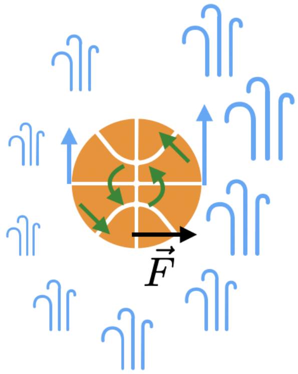
que nos da la velocidad terminal de una caída libre en el seno de un fluido

$$v_\infty = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho - \rho') \tag{9.52}$$

que se aplica a la caída de gotas de lluvia o otras ejemplos.

[1] E. Generalic, https://glossary.periodni.com/glossary.php?en=Ostwald
[2] https://mae.ufl.edu/~uhk/STOKES-DRAG-FORMULA.pdf
[3] http://web.mit.edu/fluids-modules/www/low_speed_flows/2-5Stokes.pdf

9.10. Efecto Magnus



El efecto Magnus es el efecto sobre un balón de fútbol cuando se tira una falta o un corner, o sobre una pelota de tenis cuando se lifta o se corta.

Si tenemos una esfera que rota en el seno de un fluido, como por ejemplo en la figura el balón cae hacia abajo y pues el viento se dirige hacia arriba, el cuerpo arrastra a los cuerpos próximas, disminuyendo el viento aparente en la parte derecha (en la figura) y aumentando en la parte izquierda (velocidad v_2). Si ahora en un aproximación cruda (una aproximación mejor sería utilizar la formula de Kutta-Jowdowski) aplicamos el teorema de Bernoulli, concluimos que la presión en la parte superior sera mayor que en la parte inferior (mayor en la parte que aleja que en la parte que se acerca), lo cual produce une diferencia de presión y entonces una fuerza perpendicular a la velocidad que hace que se curve la trayectoria. Como $p + (1/2)\rho v^2$ = contante, la presión es menor cuando la velocidad es mayor. Por tanto la fuerza se dirige hacia la velocidad mayor.

9.11. Ejercicios

Problema 1

Un cable anclado al fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo la superficie. El volumen de la esfera es de $0{,}3m^3$ y la tensión en el cable es de 900 N. Calculen:

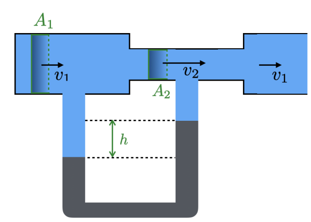
a)La fuerza ejercida por el agua sobre la esfera.
b)La masa de la esfera. El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. En equilibrio, ¿ Qué fracción del volumen de la esfera se encuentra sumergida?

Problema 2

¿ Cuánta agua fluiría en 30 s por un tubo capilar de 200 mm de longitud y 1.5 mm de diámetro interno, si la diferencia de presiones a lo largo del tubo es 4 mm de mercurio? La viscosidad del agua es de 0.8 cP y la densidad del mercurio es de 13600 kg/m3.

Problema 3

La figura representa un esquema de un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial de mercurio. En el punto 1 (la toma), el diámetro es de 12 cm, mientras que en la garganta, punto 2, el diámetro es 6 cm. ¿Cuál es el flujo Q del agua a través del medidor, si la lectura en el manómetro es de 22 cm? Dato: la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3.



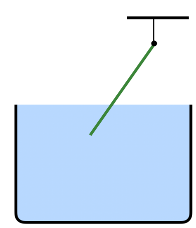
Problema 4

Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto con paredes verticales. Se hace un agujero en una pared a una profundidad h por debajo de la superficie del agua. a) ¿A qué distancia R del pie de la pared tocará el suelo el chorro que sale? b) Sea $H = 14$ m y $h = 4$ m, ¿ A qué distancia por debajo de la superficie podría hacerse un segundo agujero tal que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

Problema 5

Una varilla uniforme, de densidad $\rho = 0{,}5\rho_{\text{agua}}$, se sujeta en un extremo por una cuerda, mientras el otro flota libremente en el agua (ver figura).

Dibuja las fuerzas que actúan sobre la varilla. En la situación de equilibrio, ¿ Qué fracción de la longitud de la varilla está sumergida?



Problema 6

Fluye aire horizontalmente por las alas de una avioneta de modo que su velocidad es de 70 m/s por encima del ala y 50 m/s por debajo. Si la avioneta tiene una masa de 700 kg y un área de alas de 9 m^2, estime la fuerza vertical neta (incluida la gravedad) que actúa sobre el avión. La densidad del aire es de 1.2 kg/m^3.

9.12. Soluciones de los ejercicios

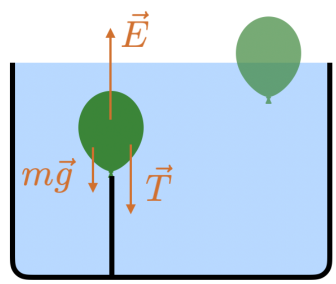
Problema 1

Un cable anclado al fondo de un lago sostiene una esfera hueca de plástico bajo la superficie. El volumen de la esfera es de 0,3m^3 y la tensión en el cable es de 900 N. Calculen:

a) La fuerza ejercida por el agua sobre la esfera.

b) La masa de la esfera. El cable se rompe y la esfera sube a la superficie. En equilibrio, ¿ Qué fracción del volumen de la esfera se encuentra sumergida?

Datos: densidad del agua $\rho_a = 1000$ kg/m^3, volumen $V = 0{,}3$ m^3 y tension $T = 900$ N.
La fuerza que ejerce el agua sobe la esfera es el empuje de Arquímedes:



$$E = \rho_a V g = 2{,}94 \text{ N} \tag{9.53}$$

Cuando la esfera está anclada al fondo

$$mg + T = E \qquad \rightarrow \qquad m = \frac{E - T}{g} = 208 \text{ kg.} \tag{9.54}$$

Le esfera flota porque $208 < 300$. La fracción sumergida del volumen de la esfera es

$$x = \frac{M/\rho_a}{V} = 0{,}69. \tag{9.55}$$

Problema 2

¿ Cuánta agua fluiría en 30 s por un tubo capilar de 200 mm de longitud y 1.5 mm de diámetro interno, si la diferencia de presiones a lo largo del tubo es 4 mm de mercurio? La viscosidad del agua es de 0.8 cP y la densidad del mercurio es de 13600 kg/m3.

Datos: $\Delta p = 4$ Torr $= 4 \times 133{,}3 = 533$ Pa y $\eta = 0{,}8$ cP $= 0{,}8 \times 10^{-3}$ Pa.s.
De la formula de Poisseuille, el flujo del tubo es Q y el volumen de agua que fluye por el tubo capilar en $\Delta t = 30$ s es V:

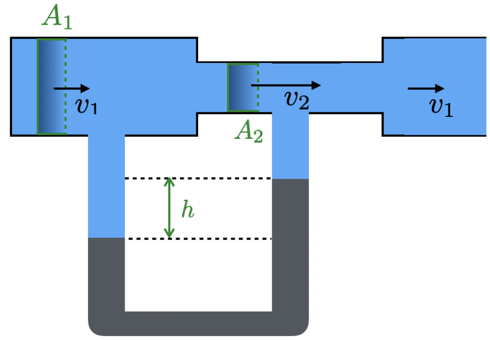
$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta\ell}\Delta p = 4,14 \times 10^{-7}\text{m}^3.\text{s}^{-1} \qquad V = Q\Delta t = 1{,}24 \times 10^{-2}\text{L} \tag{9.56}$$

Problema 3

La figura representa un esquema de un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial de mercurio. En el punto 1 (la toma), el diámetro es de 12 cm, mientras que en la garganta, punto 2, el diámetro es 6 cm. ¿Cuál es el flujo Q del agua a través del medidor, si la lectura en el manómetro es de 22 cm? Dato: la densidad del mercurio es 13.6 g/cm^3.

Del teorema de Bernoulli obtenemos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \rightarrow \quad v_1^2 - v_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \tag{9.57}$$



Del principio de continuidad

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \left(\frac{12}{6}\right)^2 = 4v_1 \tag{9.58}$$

Luego

$$(16-1)v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2) \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{15\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 220 \times 133{,}3}{15 \times 10^3}} = 1{,}98 \text{m/s}$$

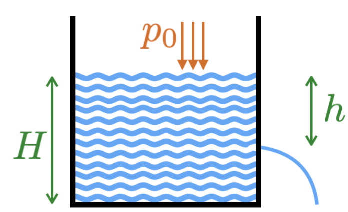
El flujo es $Q = S_1 v_1 = 22{,}4$ l/s.

Problema 4

Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto con paredes verticales. Se hace un agujero en una pared a una profundidad h por debajo de la superficie del agua. a) ¿A qué distancia R del pie de la pared tocará el suelo el chorro que sale? b) Sea $H = 14$ m y $h = 4$ m, ¿ A qué distancia por debajo de la superficie podría hacerse un segundo agujero tal que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

La velocidad de salida del chorro es $v_x = \sqrt{2gh}$.
Como sale a velocidad nula en la dirección vertical, el tiempo de caída es

$$\frac{1}{2}gt^2 = H - h \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}. \tag{9.59}$$



Como no hay aceleración en la dirección horizontal, la velocidad es contante y distancia recorrida es

$$d = vt = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{40} = 12{,}65 \text{ m}. \tag{9.60}$$

Por obtener la misma distancia, hace falta que $h(H-h) = 40$ o sea

$$h^2 - hH + 40 = 0 \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2}\left(H \pm \sqrt{H^2 - 160}\right) = \frac{14 \pm \sqrt{196^2 - 160}}{2} = \frac{14 \pm 6}{2} \tag{9.61}$$

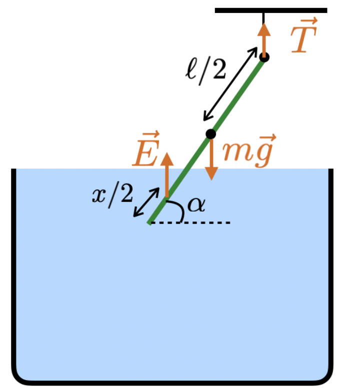
Pues $h = 10$ m.

Problema 5

Una varilla uniforme, de densidad $\rho = 0{,}5\rho_{\text{agua}}$, se sujeta en un extremo por una cuerda, mientras el otro flota libremente en el agua (ver figura).

(a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre la varilla.

(b) En la situación de equilibrio, ¿ Qué fracción de la longitud de la varilla está sumergida?



Llamando m la masa de la varilla y x la fracción sumergida. Su volumen total es $V = m/\rho_V$. El peso es mg y el empuje es

$$E = xV\rho_{\text{agua}}g = x\frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_V}mg = 2xmg. \quad (9.62)$$

Tomando momentos con respecto al centro de la varilla:

$$0 = T\frac{L}{2}\cos\alpha - E\left(\frac{L}{2} - x\frac{L}{2}\right)\cos\alpha \quad (9.63a)$$

$$LT = L(1-x)E \quad \rightarrow \quad T = (1-x)E. \quad (9.63b)$$

Además

$$mg = E + T = E + (1-x)E = (2-x)E = (2-x)2xmg \quad (9.64)$$

Luego

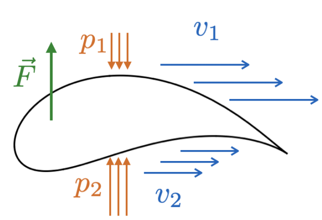
$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (9.65)$$

la solución física es $1 - \sqrt{2}/2 = 29{,}3\,\%$.

Problema 6

Fluye aire horizontalmente por las alas de una avioneta de modo que su velocidad es de 70 m/s por encima del ala y 50 m/s por debajo. Si la avioneta tiene una masa de 700 kg y un área de alas de 9 m^2, estime la fuerza vertical neta (incluida la gravedad) que actúa sobre el avión. La densidad del aire es de 1.2 kg/m^3

Aplicando el teorema de Bernoulli



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (9.66)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}1{,}2(70^2 - 50^2) = 1{,}440 \text{ Pa} \quad (9.67)$$

Fuerza neta vertical hacia arriba:

$$F = (p_2 - p_1)S - mg = 1{,}440 \times 9 - 700 \times 9{,}81 = 7{,}252 \text{ N}. \quad (9.68)$$