función es $f([0,2]) = [0,6]$. Claramente, la función (2.2) es estrictamente decreciente, tiene máximo y mínimo y es inyectiva. Su función inversa está definida (aunque no sea fácil de calcular).

2.2. Estudio descriptivo de las funciones elementales[2]

En este curso se supone que ya tienes un conocimiento intuitivo de las funciones elementales básicas (exponencial, logaritmo natural, trigonométricas). En esta lección vamos a hacer un estudio descriptivo de dichas funciones, es decir, no vamos a dar definiciones rigurosas de las mismas y nos limitaremos a recordar sus propiedades más importantes.

2.2.1. Funciones polinómicas y funciones racionales

Las *funciones polinómicas o polinomios* son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Mientras que la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómica da lugar a las llamadas *funciones racionales*. Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Observa que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante 1).

Es inmediato que sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional.

2.2.2. Raíces de un número real

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real *mayor o igual que cero*, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

2.11 Proposición. *Sean $x, y \in \mathbb{R}_o^+$, $k \in \mathbb{N}$. Se verifica que:*

a) $\sqrt[k]{x\,y} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

[2]El estudio de las funciones elementales que haremos aquí se complementa con el cuaderno de *Mathematica* que está en mi página Web.

b) La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y$ si, y sólo si, $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Si $x < 0$ y k es *impar* se define[3] $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

2.2.3. Potencias racionales

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Notemos que $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$ pues

$$\left((\sqrt[q]{x})^p\right)^q = (\sqrt[q]{x})^{pq} = \left((\sqrt[q]{x})^q\right)^p = x^p$$

Naturalmente, si $p/q = m/n$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se comprueba fácilmente que $x^{p/q} = x^{m/n}$. En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r = x^{p/q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ son tales que $r = p/q$.

2.2.4. Logaritmos

Dados un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base a de x* como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$. Observa que, por definición, para todo $x > 0$ es $a^{\log_a x} = x$.

El dominio de la función $\log_a$ es $\mathbb{R}^+$, y su imagen es $\mathbb{R}$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$. La propiedad básica de los logaritmos es que convierten productos en sumas:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x > 0, y > 0)$$

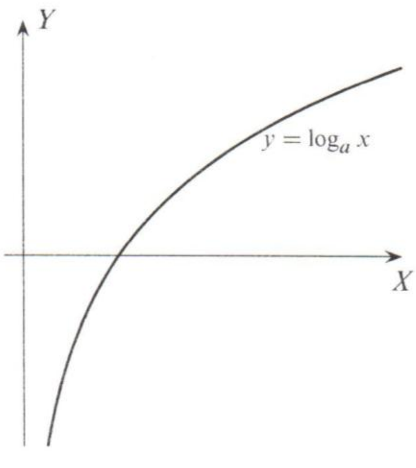

Figura 2.2. Función logaritmo de base $a > 1$

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$ y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos* (en honor de John Napier 1550-1617), corresponden a tomar como base el número e. El número e es un número irracional que puede aproximarse arbitrariamente por números de la forma $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de n. Un valor aproximado de e es 2.7182818284. **En este libro trabajaremos siempre**, salvo que explícitamente se indique lo contrario, **con la función logaritmo natural, que notaremos** log (la notación, cada día más en desuso, "ln", para dicha función no será usada en este libro).

Teniendo en cuenta que

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \qquad (x > 0)$$

[3]Ver (3.3.3.1) para el caso de raíces complejas.

podemos deducir muy fácilmente las propiedades de la función logaritmo en base a a partir de las propiedades de la función logaritmo natural.

2.2.5. Exponenciales

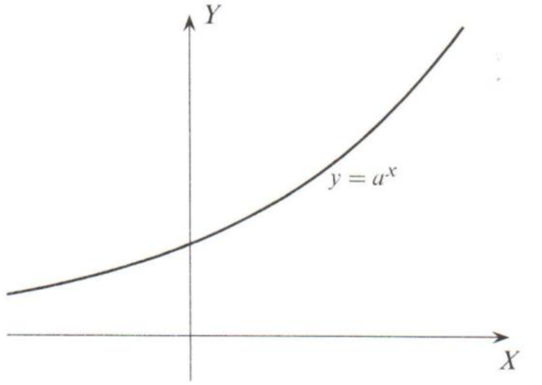

Figura 2.3. Función exponencial de base $a > 1$

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, que se representa por $\exp_a$. Por tanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exp_a(x)$ es, por definición, el único número positivo cuyo logaritmo en base a es igual a x: $\log_a(\exp_a(x)) = x$. Es fácil comprobar que si $r \in \mathbb{Q}$ entonces $\exp_a(r) = a^r$, por lo que se usa la notación $\exp_a(x) = a^x$.

El dominio de la función $\exp_a$ es $\mathbb{R}$, y su imagen es $\mathbb{R}^+$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$. La propiedad básica de $\exp_a$ es que convierten sumas en productos:

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

Dos funciones exponenciales cualesquiera, $\exp_a$ y $\exp_b$, están relacionadas por la igualdad:

$$\exp_b(x) = \exp_a(x \log_a b) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

La función exponencial de base e, inversa de la función logaritmo natural, se notará simplemente por exp. Por tanto $\exp(x) = e^x$. Con ello tenemos que:

$$\boxed{x^y = e^{y \log x} \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})} \tag{2.3}$$

La letra e se eligió en honor del gran matemático Leonhard Euler (1707-1783). A primera vista puede parecer que no hay razones particulares para llamar *natural* al número e. Las razones matemáticas de esta elección se verán al estudiar la derivación. Sin embargo, hay muchos procesos de crecimiento que hacen del número e una base exponencial extremadamente útil e interesante. Veamos unos ejemplos.

2.2.5.1. Interés compuesto

Supongamos que invertimos un capital inicial, P, a una tasa de interés anual r (expresado en tanto por uno), ¿cuánto dinero tendremos cuando hayan pasado k años? Respuesta: depende de cómo se paguen los intereses. En el *interés simple* se paga el total de los intereses al terminar la inversión, por lo que el interés total producido es igual a Prk, y el capital final será igual a $P(1 + rk)$.

Sin embargo, lo usual es que se paguen intereses en períodos más cortos de tiempo. Estos intereses se acumulan al capital inicial y producen, a su vez, nuevos intereses. Esto se conoce como *interés compuesto*. Por ejemplo, si el interés se paga n veces al año (trimestralmente ($n = 4$), mensualmente ($n = 12$), etcétera) al final del primer período tendremos $P(1 + r/n)$, al final del segundo $P(1 + r/n)^2$; al final del primer año $P(1 + r/n)^n$, al final del k-ésimo año tendremos $P(1 + r/n)^{nk}$.

Cuando n es muy grande, el número $(1 + r/n)^n$ es aproximadamente igual a e^r. Precisamente, si los interese se acumulan instantáneamente al capital, lo que se conoce como *interés compuesto continuo*, entonces el capital al final del k-ésimo año viene dado por $P\,\mathrm{e}^{rk}$.

2.2.5.2. Crecimiento demográfico

Llamemos P_0 a la población mundial actual, y sea λ la tasa anual de crecimiento expresada en tanto por uno, la cual suponemos que se mantiene constante. Notemos por $P(t)$ la población mundial pasados t años.

Pasado un año, la población será $P(1) \approxeq P_0 + \lambda P_0 = (1 + \lambda)P_0$. Utilizamos el signo de aproximación $\approxeq$ y no el $=$ porque hemos calculado el crecimiento de la población λP_0 como si esta fuese constantemente igual a P_0 en todo el año, lo que no es correcto.

Obtendríamos un resultado más exacto si consideramos el crecimiento de la población mensualmente. Como la tasa de crecimiento mensual es $\lambda/12$, pasado un mes la población será $(1 + \frac{\lambda}{12})P_0$, y pasados doce meses $P(1) \approxeq \left(1 + \dfrac{\lambda}{12}\right)^{12} P_0$. El cálculo sigue siendo aproximado, pues la población crece *continuamente*. Para obtener una mejor aproximación podríamos considerar días en vez de meses. En general, si dividimos el año en n períodos, obtendríamos como aproximación:

$$P(1) \approxeq \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n P_0$$

Cuanto mayor sea n menor será el error que cometemos. *Si hacemos que n crezca indefinidamente*, entonces el número $\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$ se convierte en e^λ, por lo que $P(1) = \mathrm{e}^\lambda P_0$. Si el período de tiempo es de t años, entonces $P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Observa que tanto el interés compuesto continuo como el crecimiento demográfico son, matemáticamente, lo mismo. En ambos casos lo que tenemos es una magnitud que se incrementa de forma proporcional a su cantidad en cada momento. Otro proceso que entra en esta descripción es el decaimiento radiactivo, la única diferencia es que la masa de materia radiactiva va disminuyendo, o sea, que la constante de proporcionalidad es negativa.

2.2.6. Función potencia de exponente real a

Se llama así la función cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ que a cada $x > 0$ asigna el número x^a. Puesto que $x^a = \exp(a \log x)$, las propiedades de esta función se deducen con facilidad de las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural.

2.2.7. Funciones trigonométricas

El concepto más específico de la trigonometría es el de *medida de un ángulo*. Para medir un ángulo llevamos su vértice al origen y medimos la longitud del arco de la circunferencia unidad que dicho ángulo intercepta, obtenemos así un número que llamamos la medida (absoluta, es decir no orientada) del ángulo en cuestión. Naturalmente, lo primero que hay que hacer para medir cualquier cosa es elegir una unidad de medida. Pues bien, para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Hay una expresión que estamos acostumbrados a usar y cuyo significado conviene precisar. Me refiero a la expresión: "una circunferencia de radio r". Cuando empleamos dicha expresión se sobreentiende que el radio r de la circunferencia es un número expresado en alguna unidad de medida de longitudes. *Es decir, la expresión "una circunferencia de radio r" presupone que hemos fijado una unidad de medida con la cual hemos medido r.*

2.2.7.1. Medida de ángulos

Medida de ángulos en grados. Supongamos que tenemos una circunferencia de radio r. Para medir ángulos en grados sobre dicha circunferencia lo que hacemos es tomar como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de esa circunferencia $(2\pi r)$ dividida por 360. Un ángulo de un grado es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a $\dfrac{2\pi r}{360}$.

Medida de ángulos en radianes. Supongamos que tenemos una circunferencia de radio r. Para medir ángulos en radianes sobre dicha circunferencia lo que hacemos es tomar como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la del radio. Un ángulo de un radián es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a r.

Las palabras "grado" y "radián" se usan tanto para referirse a los respectivos ángulos como a las medidas de sus arcos. Es así como debes interpretar la expresión "la longitud total de la circunferencia es 360 grados y también es igual a 2π radianes". Sería más exacto decir: "la longitud total de la circunferencia es 360 veces *la longitud de un arco de un grado* y también es igual a 2π veces *la longitud de un arco de un radián*". Evidentemente, la longitud de un arco de un radián es igual al radio de la circunferencia.

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

No hay que olvidar que *grados* y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro. En la navegación y en la astronomía los ángulos se miden en grados, pero en Cálculo es preferible medirlos en radianes porque se simplifican las cuentas. Por ejemplo, la longitud de un arco de circunferencia se obtiene multiplicando la longitud del radio de dicha circunferencia por la medida *en radianes* del ángulo que corresponde a dicho arco.

Observa que la ventaja de medir arcos en radianes es que, en tal caso, la misma unidad con la que medimos el radio nos sirve para medir arcos. Por ejemplo, si el radio es 1 centímetro el radián también mide 1 centímetro; mientras que la medida de un grado en centímetros sería $2\pi/360 \simeq 0.0174533$.

Convenio de los ángulos: usar radianes De ahora en adelante, a menos que se establezca explícitamente otra unidad, supondremos que todos los ángulos están medidos en radianes.

2.2.7.2. Funciones seno y coseno

Hay dos funciones que suelen confundirse: el seno de un ángulo y el seno de un número. En geometría se habla del *seno de un ángulo* y en Cálculo usamos la expresión $\operatorname{sen}(\sqrt{2})$ para referirnos al *seno del número* $\sqrt{2}$. ¿Qué relación hay entre uno y otro?

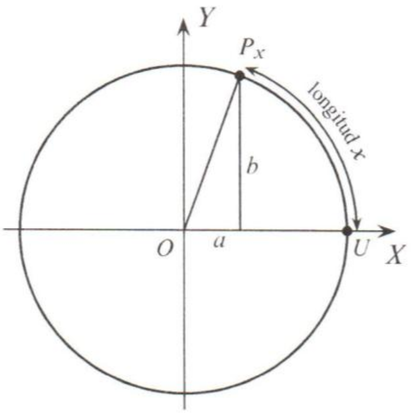

Figura 2.4. La circunferencia unidad

Antes que nada hay que decir que tanto el seno de un ángulo como el seno de un número *son números*, pero mientras que el seno de un ángulo tiene una sencilla definición geométrica, no es evidente, a priori, cómo se puede definir el seno de un número. La idea consiste en asociar a cada número un (único) ángulo y definir el seno del número como el seno del ángulo que le corresponde. Es evidente que a cada número $x \geqslant 0$ le podemos asignar de manera única un ángulo "enrollando" el segmento $[0, x]$ sobre la circunferencia unidad, *en sentido contrario a las agujas del reloj*, de forma que el origen de dicho segmento coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto P_x de la circunferencia unidad.

Pues bien, si las coordenadas de P_x son (a, b), se define:

$$\operatorname{sen} x = \text{seno del ángulo}(\widehat{P_x O U}) = b$$
$$\cos x = \text{coseno del ángulo}(\widehat{P_x O U}) = a$$

Al ser igual a 2π la longitud de la circunferencia unidad, es claro que $P_{x+2\pi} = P_x$, por lo que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$ y $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$. Observa también que si $0 \leqslant x < 2\pi$, entonces la *medida en radianes* del ángulo $\widehat{P_x O U}$ es igual a x, es decir:

$$\operatorname{sen}(x) = \text{ seno del ángulo de } x \text{ radianes } \quad (0 \leqslant x < 2\pi)$$

Si $x < 0$ podemos proceder con el segmento $[x, 0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto $P_x = (c, d)$ de la circunferencia unidad y se define, igual que antes $\operatorname{sen}(x) = d$, $\cos(x) = c$. Es fácil ver que si $P_x = (c, d)$, entonces $P_{-x} = (c, -d)$. Resulta así que $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$.

2.12 Observaciones. Podemos definir la función *seno en grados* sin más que interpretar que x es la medida en grados del ángulo que le corresponde. El hecho de que se use la misma notación para ambas funciones es la causa de muchos errores. Si notamos $\operatorname{sen}^{o}(x)$ el valor del seno del ángulo cuya media es x grados, y notamos $\operatorname{sen}^{r}(x)$ el valor del seno del ángulo cuya media es

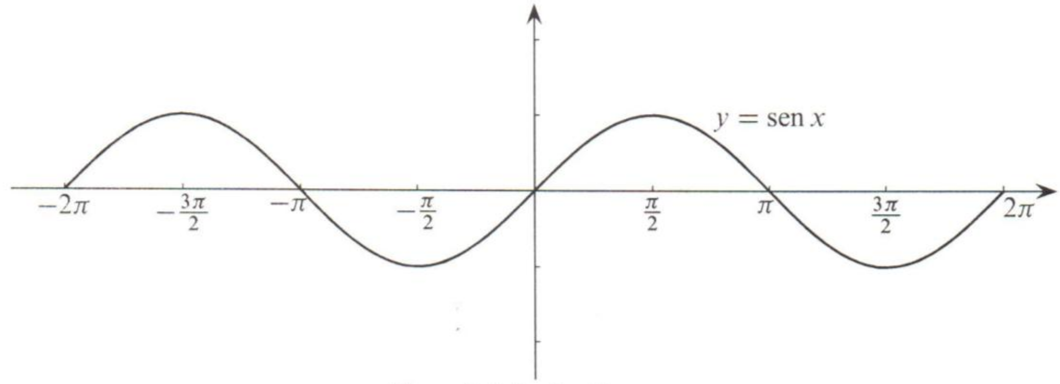

Figura 2.5. La función seno

x radianes (es decir, la función que hemos definido antes); la relación entre ambas funciones viene dada por:

$$\operatorname{sen}^{o}(x) = \operatorname{sen}^{r} \frac{2\pi x}{360} = \operatorname{sen}^{r} \frac{\pi x}{180}$$

Es frecuente que $\operatorname{sen}^{o}(x)$ se escriba como $\operatorname{sen} x^{o}$. Por ejemplo $\operatorname{sen}(45^{o})$. A esta mala notación se deben las dudas que a veces surgen sobre el significado de $\operatorname{sen} x$ y que llevan a preguntar: "¿está x en grados o en radianes?", cuando lo que realmente debería preguntarse es "¿se trata de $\operatorname{sen}^{o}(x)$ o de $\operatorname{sen}^{r}(x)$?"; porque, en ambos casos, x es tan sólo un número al que no hay por qué ponerle ninguna etiqueta.

Insistimos, una última vez: en este curso de Cálculo el número $\operatorname{sen} x$ significará siempre $\operatorname{sen}^{r} x$. Por tanto $\operatorname{sen}(\pi/4) \neq \operatorname{sen}(45)$ (pero $\operatorname{sen}(\pi/4) = \operatorname{sen}^{o}(45)$).

2.2.7.3. Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. Las identidades básicas que dichas funciones verifican son:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Como se ha dicho antes, las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x\,, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas. Las siguientes igualdades, conocidas como *fórmulas de adición*, se probarán más adelante:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \tag{2.4}$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{2.5}$$

La función seno se anula en los múltiplos enteros de π, es decir, en los puntos de la forma $k\pi$ donde k es un entero cualquiera. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde k es un entero cualquiera.

2.2.7.4. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Las funciones **tangente** y **secante**, que se representan por tg y sec son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Las funciones **cotangente** y **cosecante**, que se representan por cotg y csc son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Las propiedades de estas funciones se deducen fácilmente de las propiedades del seno y del coseno. Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; esto es, la función tangente es periódica de período π.

2.2.7.5. Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente

Lo primero que hay que decir es que ninguna de las funciones "seno", "coseno", "tangente", es inyectiva pues todas ellas son periódicas y, por tanto, toman cada uno de sus valores en infinitos puntos; en consecuencia, ninguna de ellas tiene inversa en el sentido de la definición (2.7). Por tanto, no debe decirse que las funciones *arcoseno*, *arcocoseno*, *arcotangente* sean las funciones inversas del seno, del coseno o de la tangente: eso no es cierto. Hecha esta observación imprescindible, pasemos a definir dichas funciones.

La función seno es estrictamente creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. En consecuencia, dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,sen} x$ y se llama el *arcoseno de* x. Es decir, el arcoseno es la función $\operatorname{arc\,sen}:[-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Observa que la igualdad $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$, es cierta si, y sólo si, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

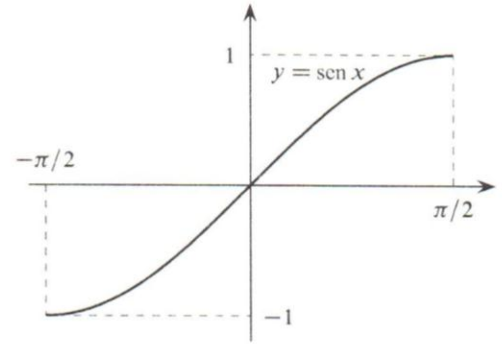

Figura 2.6. La función seno en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

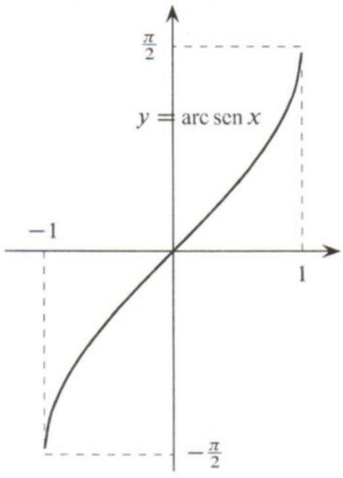

Figura 2.7. La función arcoseno

Es decir, *la función arcoseno es la inversa de la función seno restringida al intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$, esto es, cuando consideramos que la función seno está solamente definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen}:[-1,1] \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \pi/2, \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2} \tag{2.7}$$

La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1. Por tanto, dado un número $x \in [-1, 1]$, hay un único número $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,cos} x$ y se llama *arcocoseno de* x. Es decir, arcocoseno es la función $\operatorname{arc\,cos}:[-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$ y $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$. Observa que la igualdad $\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$, es cierta si, y sólo si, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Es decir, *la función arcocoseno es la inversa de la función coseno restringida al intervalo* $[0, \pi]$, esto es, cuando consideramos que la función coseno está solamente definida en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos}:[-1,1] \to \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi, \quad \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x} \tag{2.8}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi} \tag{2.9}$$

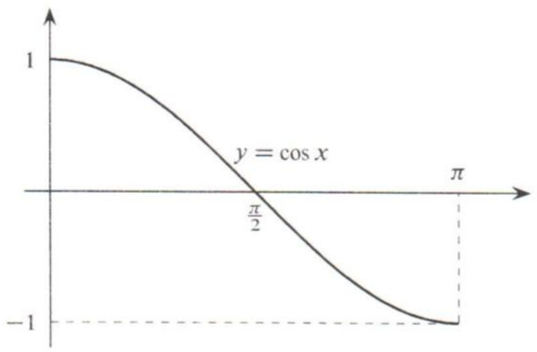

Figura 2.8. La función coseno en $[0, \pi]$

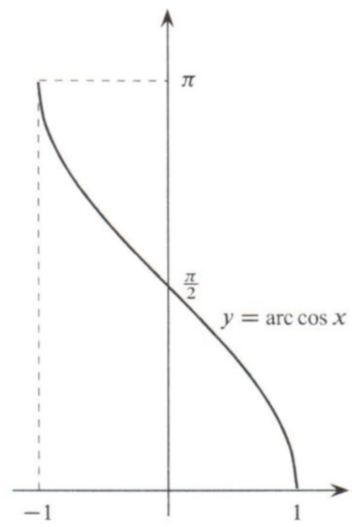

Figura 2.9. La función arcocoseno

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. En consecuencia, dado un número $x \in \mathbb{R}$, hay un único número $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,tg} x$ y se llama el *arcotangente de* x. Es decir, *la función arcotangente es la inversa de la función tangente restringida al intervalo* $]-\pi/2, \pi/2[$, esto es, cuando consideramos que la función tangente está solamente definida en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad -\pi/2<\operatorname{arc\,tg}x<\pi/2,\quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x)=x} \tag{2.10}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}x)=x \quad\Longleftrightarrow\quad -\pi/2<x<\pi/2} \tag{2.11}$$

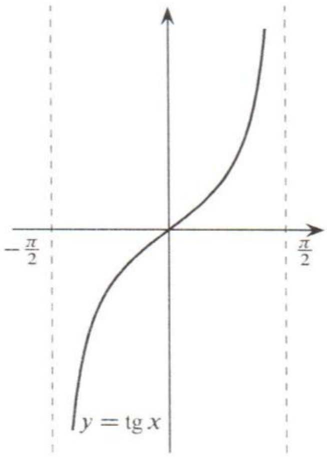

Figura 2.10. La función tangente en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

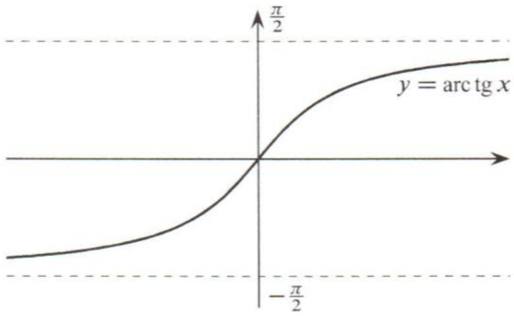

Figura 2.11. La función arcotangente

2.2.8. Las funciones hiperbólicas

Hay algunas combinaciones de las funciones $\exp(x)$ y $\exp(-x)$ que aparecen con tanta frecuencia que se les da nombre propio. Ellas son las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, y están definidas para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{senh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. La identidad básica que dichas funciones verifican es:

$$\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1\qquad (x\in\mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es impar y la función coseno hiperbólico es par:

$$\operatorname{senh}(-x)=-\operatorname{senh}x,\quad \cosh(-x)=\cosh x\quad (x\in\mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. La función coseno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$.

Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas.

La función **tangente hiperbólica** que se representa por tgh es la función definida para todo $x\in\mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{tgh}x=\frac{\operatorname{senh}x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

De forma análoga se definen las funciones cotangente, secante y cosecante hiperbólicas.

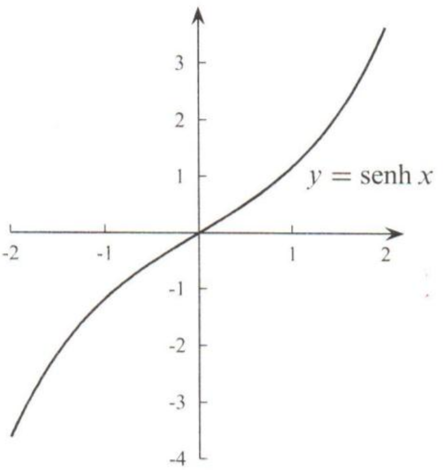

Figura 2.12. La función seno hiperbólico

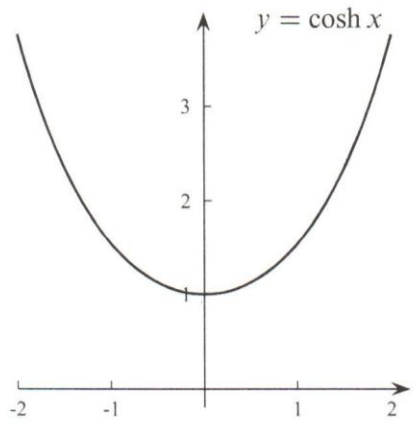

Figura 2.13. La función coseno hiperbólico

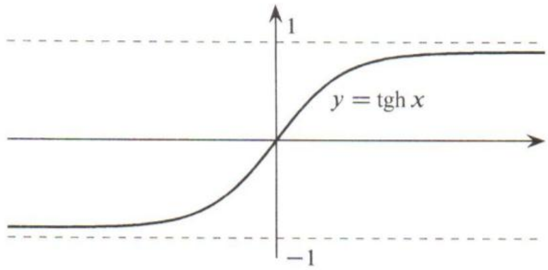

Figura 2.14. La función tangente hiperbólica

2.2.8.1. Las funciones hiperbólicas inversas

La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase **argumento seno hiperbólico**) viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})} \tag{2.12}$$

La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_0^+$ y su imagen es la semirrecta $[1, +\infty[$. La función, definida en $[1, +\infty[$, que a cada número $x \geqslant 1$ asigna el único número $y > 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama **argumento coseno hiperbólico**, se representa por, argcosh, y viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geqslant 1)} \tag{2.13}$$

La función tangente hiperbólica es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-1, 1[$ cuya inversa, representada por, argtgh, (léase **argumento tangente hiperbólica**) es la función definida en el intervalo $]-1, 1[$ por:

$$\boxed{\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)} \tag{2.14}$$

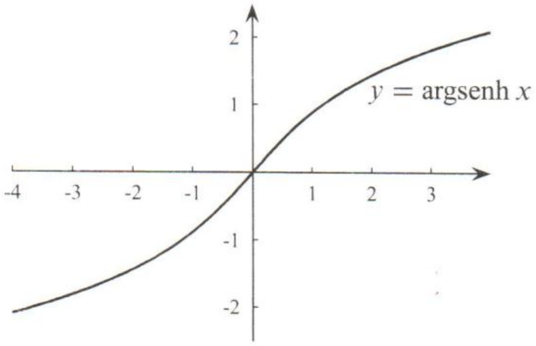

Figura 2.15. La función argumento seno hiperbólico

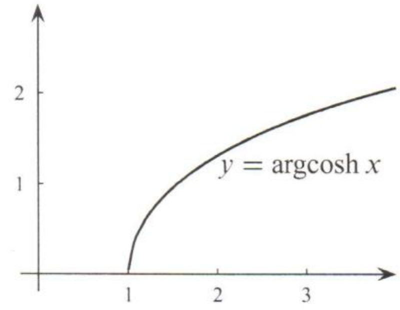

Figura 2.16. La función argumento coseno hiperbólico

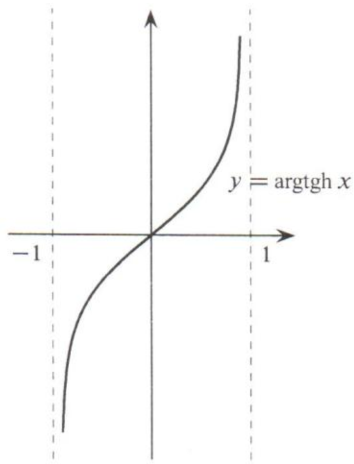

Figura 2.17. La función argumento tangente hiperbólica

La razón de por qué estas funciones se llaman hiperbólicas es que, al igual que los puntos de la circunferencia unidad pueden representarse en la forma $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, los puntos en la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ pueden representarse como $(\cosh t, \operatorname{senh} t)$.

Naturalmente, la importancia de las funciones trigonométricas procede de que multitud de fenómenos naturales son de naturaleza ondulatoria o periódica. Por ejemplo, la gráfica de un electrocardiograma no es más que superposiciones de gráficas de senos y cosenos.

Las funciones hiperbólicas, por su parte, también sirven para describir el movimiento de ondas en sólidos elásticos, o la forma que adoptan los cables eléctricos colgantes. Hay una hermosa curva llamada *catenaria* cuya ecuación es de la forma $y = a\cosh(x/a)$ (donde se entiende que a es una constante). La catenaria es la forma que adopta una cadena perfectamente flexible suspendida de sus extremos y bajo la acción de la gravedad.