

Señales y Sistemas

Curso 2012/2013

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

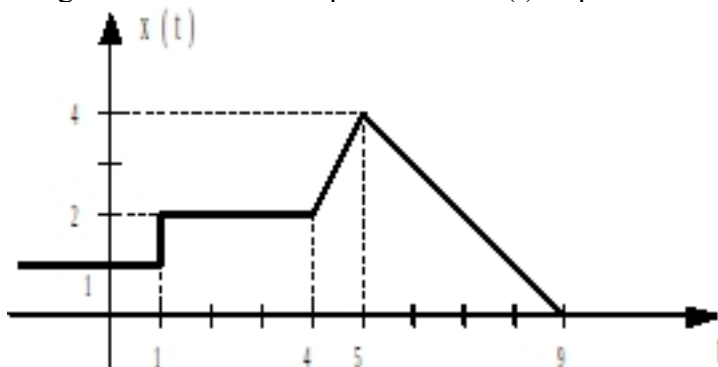
Grado en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación

Grado en Ingeniería en Telemática

EXAMEN FINAL: 7 DE JUNIO DE 2013

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 1

Teniendo en cuenta la siguiente señal de tiempo continuo $x(t)$ se pide:



- Representar gráficamente la señal $y(t) = -2 \cdot x(2t + 5) + 1$. [0,50 puntos]
- Calcular la potencia y la energía de la señal $z(t) = y(t) \cdot [u(t+3) - u(t+1)]$. [0,25 puntos]
- Calcular y representar la parte impar de $z(t)$. [0,25 puntos]
- Calcular el periodo de $l(t) = \frac{j-1}{2} \cdot e^{-j10t}$. [0,50 puntos]
- Calcular la potencia y la energía de $l(t)$. [0,50 puntos]
- Calcular $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \cdot n(-1-t) dt$ sabiendo que $m(t) = \delta(t+2) - \delta(t)$ y que $n(t) = u(-t)$. [0,50 puntos]

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 2

- Estudie la causalidad, estabilidad, invertibilidad e invarianza temporal del sistema $y(t) = \sin(t+1) \cdot x(t-1)$. [0,75 puntos]
- Calcule la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$, siendo $x(t) = e^{-2t} \cdot u(t-t_0)$ y $h(t) = u(t-t_1) - u(t-t_2)$, con $t_1 < t_2$. [1,25 puntos]
- Para el sistema lineal e invariante en el tiempo es $h(t)$ en el apartado (b), ¿es un sistema causal, estable y con memoria? [0,50 puntos]

PRUEBA REEVALUABLE TEMA 3

a) Determine la expresión analítica y la representación gráfica de una señal periódica (de periodo π), cuyo valor medio es la unidad y su potencia $3/2$, sabiendo que sólo tiene 3 coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier no nulos, que uno de ellos es

$$a_1 = 0.5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

y que se cumple la relación $\arg\{a_1\} + \arg\{a_{-1}\} = 0$.

[0,75 puntos]

b) Sabiendo que $TF[e^{-at} \cdot u(t)] = \frac{1}{a + jw}$ y que $TF[u(t+T) - u(t-T)] = 2 \cdot \frac{\text{sen}(Tw)}{w}$, calcular $Z(jw)$,

que es la Transformada de Fourier de $z(t) = x(t) \cdot y(t)$, siendo $x(t) = \frac{1}{a + jt}$ e $y(t) = \frac{\text{sen}(2t)}{\pi t}$.

[2 puntos]

c) Calcule la Transformada de Fourier de la siguiente señal, y represente su módulo y fase:

$$h(t) = \frac{\text{sen}(7(t-2))}{(t-2)}$$

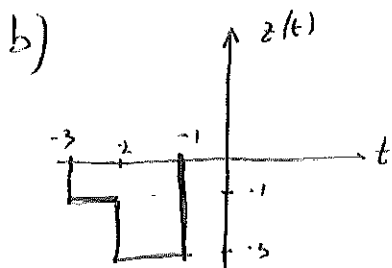
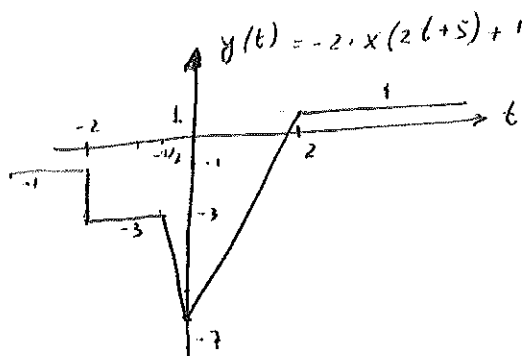
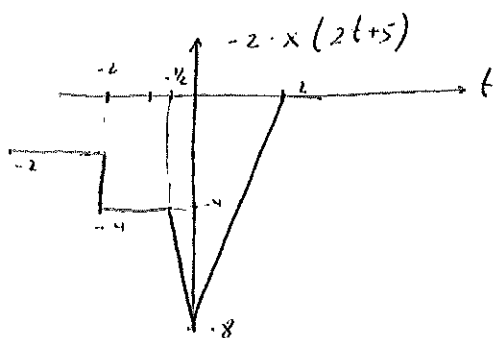
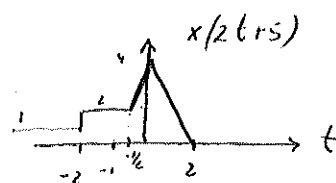
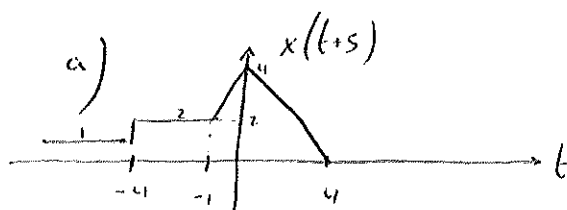
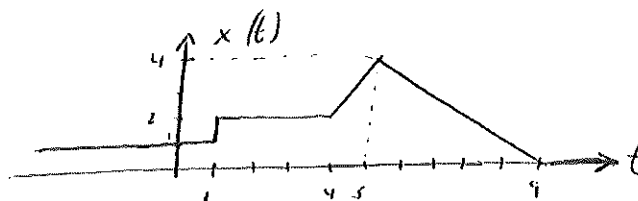
[0,50 puntos]

d) Para $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 0.5k)$ siendo la entrada a un SLIT cuya respuesta al impulso es $h(t)$, calcular la salida del sistema en el dominio de la frecuencia, $Y(jw)$, y dar una expresión para $y(t)$ en el dominio del tiempo.

[0,75 puntos]

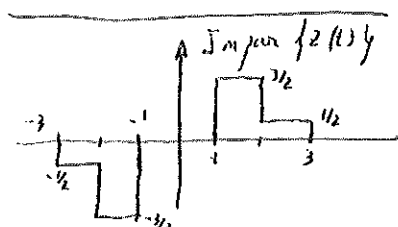
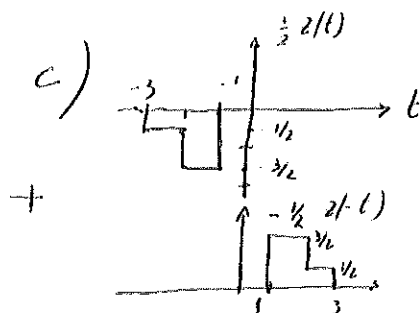
Curso 2012 - 2013

Problema (1).



Su potencia es cero por ser una señal limitada en tiempo.

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-3}^{-1} (1)^2 dt + \int_{-1}^1 3^2 dt = 1 + 9 = 10 \text{ J}$$



d) ¿Período de $l(t) = \frac{j-1}{2} \cdot e^{-j10t}$?

En el caso continuo, las exponenciales complejas de exponente imaginario puro siempre son periódicas.

$$\omega_0 = 10 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = 10 \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{10}}$$

e) ¿Potencia y energía de $l(t)$?

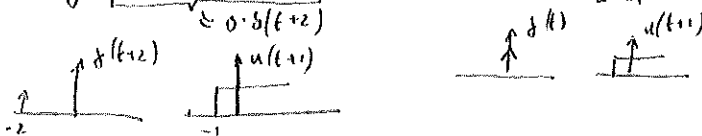
Por ser periódica su energía es infinita.

$$P_T = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |l(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \underbrace{\left| \frac{j-1}{2} \right| \cdot \left| e^{-j10t} \right|}_{=1} dt$$

$$\boxed{P_T = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} 1 \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

f)
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2) - \delta(t)] \cdot u(-(-1-t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2) - \delta(t)] \cdot u(t+1) dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t+2) \cdot u(t+1)}_{=0 \cdot \delta(t+2)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t) \cdot u(t+1)}_{=1 \cdot \delta(t)} dt = 0 - 1 = -1$$



Problema 2

$$y(t) = \sin(t+1) \cdot x(t-1)$$

a) ¿Causalidad?

El $\sin(t+1)$ es una función conocida en todos los puntos, luego no afecta a la causalidad.

El sistema es causal porque sólo utiliza el pasado.

¿Estabilidad?

$$\text{Si } |x(t)| \leq k_x \quad \forall t \Rightarrow |x(t-1)| \leq k_x \quad \forall t$$

$$\Rightarrow |y(t)| = |\sin(t+1)| \cdot |x(t-1)| \leq 1 \cdot |x(t-1)| \leq 1 \cdot k_x \leq k_x.$$

Es ESTABLE

¿Invertible?

El $\sin(t+1)$ vale cero por ejemplo en $t=-1$, luego hace desaparecer información. Busco contraejemplo.

$$x_1(t) = \delta(t+2) \Rightarrow y_1(t) = \sin(t+1) \cdot \delta(t-1+2) = \sin(t+1) \cdot \delta(t+1) = 0$$

$$x_2(t) = -\delta(t+2) \Rightarrow y_2(t) = \sin(t+1) \cdot [-\delta(t-1+2)] = -\sin(t+1) \cdot \delta(t+1) = 0$$

NO INVERTIBLE

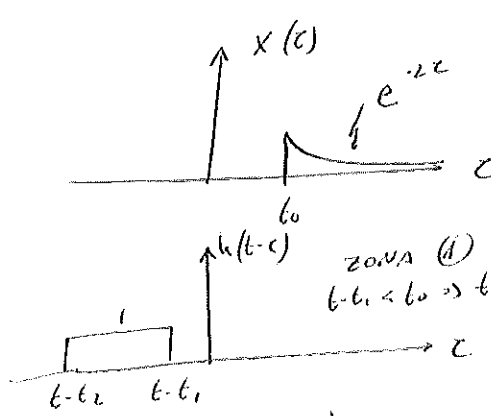
¿Invarianza temporal?

$$x(t) \Rightarrow y(t) = \sin(t+1) \cdot x(t-1) \Rightarrow y(t-t_0) = \sin(t-t_0+1) \cdot x(t-t_0-1)$$

$$x_{\rightarrow}(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y_{\rightarrow}(t) = \sin(t+1) \cdot x_{\rightarrow}(t-1) = \sin(t+1) \cdot x(t-1-t_0) \quad \text{No}$$

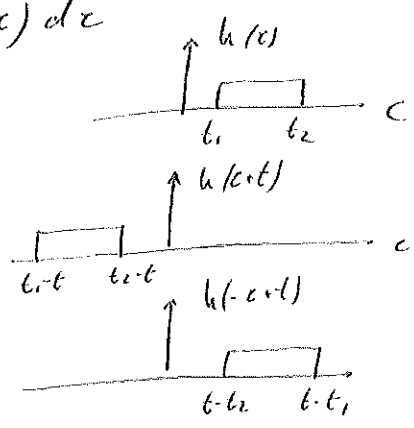
VARIANTE TEMPORALMENTE

b) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$

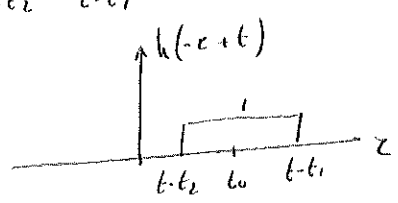


zona (1)
 $t-t_1 < t_0 \Rightarrow t < t_0 + t_1$

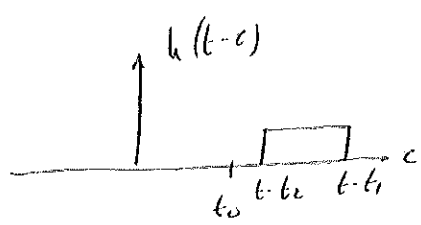
$y(t) = 0$



zona (2) $\Rightarrow \begin{cases} t-t_2 < t_0 \\ t-t_1 > t_0 \end{cases} \Rightarrow t_0 + t_1 < t < t_0 + t_2$



$y(t) = \int_{t_0}^{t-t_1} e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} \left[e^{-2(t-t_1)} - e^{-2t_0} \right]$

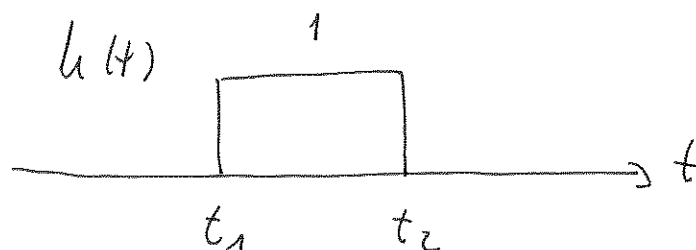


zona (3) $\Rightarrow t-t_2 > t_0 \Rightarrow t > t_0 + t_2$

$y(t) = \int_{t_0}^{t-t_1} e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_{t_0}^{t-t_1} = -\frac{1}{2} \left[e^{-2(t-t_1)} - e^{-2t_0} \right]$

Aggrupando $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 + t_1 \\ \frac{1}{2} \left[e^{-2t_0} - e^{-2(t-t_1)} \right] & \text{si } t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + t_2 \\ \frac{1}{2} \left[e^{-2(t-t_2)} - e^{-2(t-t_1)} \right] & \text{si } t > t_0 + t_2 \end{cases}$

$$c) \quad h(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2) \quad , \quad t_1 < t_2$$



Será causal siempre que $t_1 \geq 0$.

Será estable para cualquier valor de t_1 y t_2 , ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = t_2 - t_1 < \infty.$$

(Se puede precisar que si $t_1 \rightarrow -\infty$ o $t_2 \rightarrow +\infty$, en ese caso el sistema no es estable).

Será con memoria siempre, ya que es distinto de $A \cdot \delta(t)$.

Problema (3)

a) $a_0 = 1$

$$|a_{-1}|^2 + |a|^2 + |a|^2 = \frac{3}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{2}$$

$$a_{-1} = |a_{-1}| e^{j\frac{\pi}{2}} = j \cdot |a_{-1}|$$

$$x(t) = a_{-1} \cdot e^{j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} t} + a_0 \cdot e^{j0 \cdot \frac{2\pi}{T} t} + a_1 \cdot e^{j2t}$$

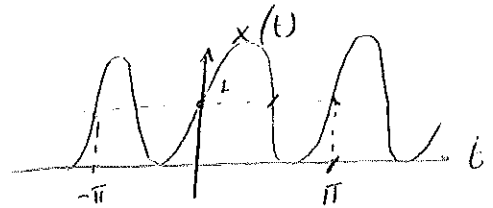
$$|a_{-1}|^2 = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{6-4-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$|a_{-1}| = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = \frac{j}{2}$$

$$x(t) = \frac{j}{2} \cdot e^{-j2t} + 1 - \frac{j}{2} e^{j2t}$$

$$x(t) = 1 - \frac{j}{2} (e^{j2t} - e^{-j2t}) = 1 + \text{sen } 2t$$



b)
$$e^{-at} \cdot u(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$u(t+T) - u(t-T) \xrightarrow{TF} \frac{2 \cdot \text{sen}(T\omega)}{\omega}$$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

$$Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * Y(j\omega)]$$

$$x(t) = \frac{1}{a+jt}$$

$$y(t) = \frac{\text{sen}(2t)}{\pi t}$$

aplicando dualidad

$$y(t) = u(t+T) - u(t-T) \rightarrow f(\omega) = \frac{2 \cdot \text{sen}(T\omega)}{\omega}$$

$$f(t) = \frac{2 \cdot \text{sen}(Tt)}{t}$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [u(-\omega+T) - u(-\omega-T)] \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot f(t) \right) d\omega$$

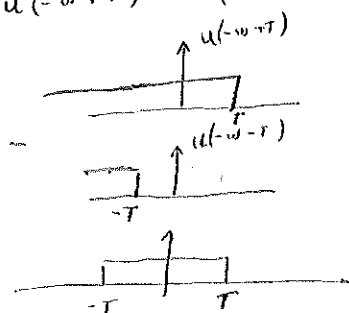
$$g(t) = e^{-at} \cdot u(t) \rightarrow f(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$f(t) = \frac{1}{a+jt} \rightarrow 2\pi \cdot f(-\omega) = 2\pi \cdot e^{a\omega}$$

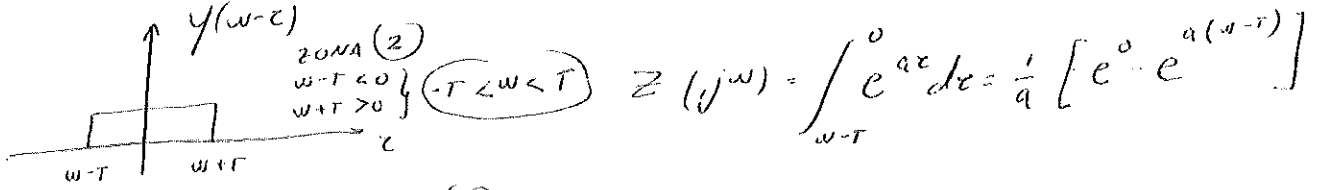
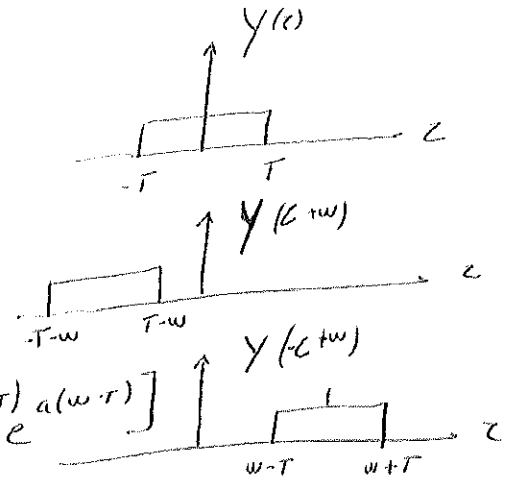
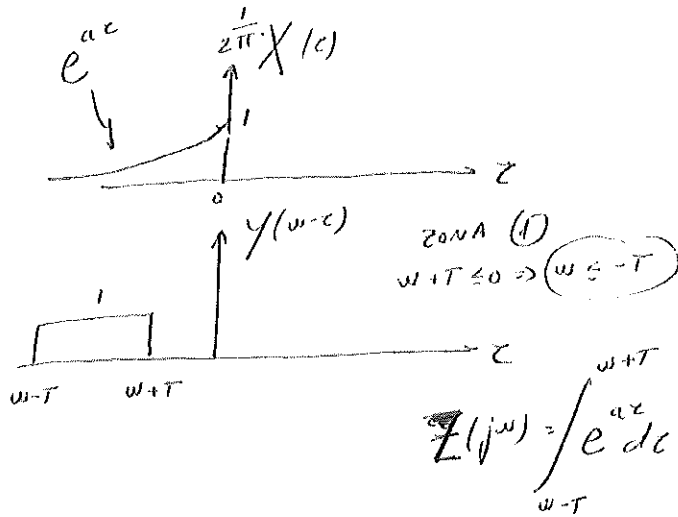
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot f(t)$$

Por lo tanto $X(j\omega) = 2\pi \cdot e^{a\omega} \cdot u(-\omega)$

y tambien $Y(j\omega) = u(-\omega+T) - u(-\omega-T) = u(\omega+T) - u(\omega-T)$



$$Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * Y(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) Y(\omega - \tau) d\tau$$



Aglutinando

$$Z(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{a} [e^{a(\omega+T)} - e^{a(\omega-T)}] & \text{si } \omega \leq -T \\ \frac{1}{a} [1 - e^{a(\omega-T)}] & \text{si } -T < \omega < T \\ 0 & \text{si } \omega > T \end{cases}$$

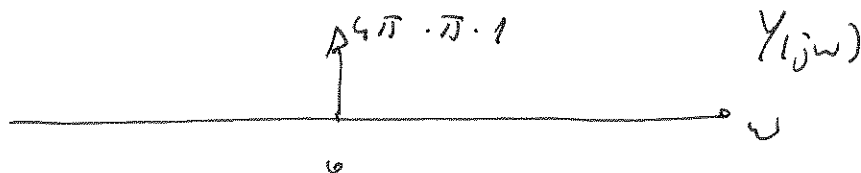
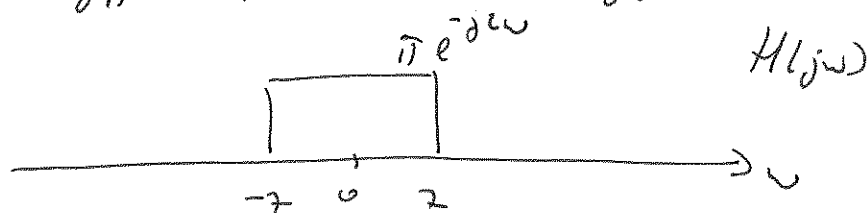
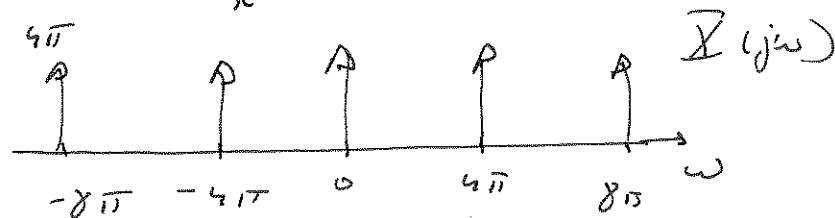
$$(c) h(t) = \frac{\text{rem}(7(t-2))}{(t-2)} \rightarrow (\text{pag. 6})$$

$$(d) x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 0.5k) \quad \begin{array}{c} x(t) \\ \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \\ \underline{X(j\omega)} \quad \underline{H(j\omega)} \quad \underline{Y(j\omega)} \end{array}$$

For tables: $\sum_k \delta(t - kT_0) \xrightarrow{TF} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
 $a_k = 1/T_0 \quad \forall k$

Given $T_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = 2\pi/T_0 = 4\pi \\ a_k = 2 \quad \forall k \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$X(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_k 2 \cdot \delta(\omega - k \cdot 4\pi)$$



$$Y(j\omega) = 4\pi^2 \cdot \delta(\omega), \quad y \text{ comes: } 1 \xrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi^2 = 2\pi$$

Diagram of the time-domain signal $y(t)$ versus t . It shows a constant value of 2π for all t . The horizontal axis is labeled t and the vertical axis is labeled $y(t)$.