Universidad
Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

Grados en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación, Sistemas Telemáticos y Tecnologías de la Telecomunicación

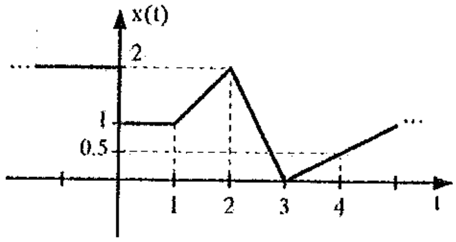
Curso 2013-14; 12 de Mayo de 2014

Asignatura: Señales y Sistemas

Duración total: 3 horas

Problema 1 (2,5 puntos)

Teniendo en cuenta las señales *x(t)* y *x[n]*.



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-5k] - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-2-5k] - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3-5k]$$

a) Representar gráficamente $z(t) = 2 \cdot y(2t) \cdot [u(t+1) - u(t-1)]$ siendo $y(t) = Impar\{x(t)\}$. (0,5 puntos)

b) Representar gráficamente $z[n] = x(2n+1)$. (0,5 puntos)

c) Calcular la potencia y la energía de *z(t)* y de *z[n]*. (0,5 puntos)

d) Verifique si $l(t) = \cos(t) \cdot u(-t) + sen(t) \cdot u(t)$ y $l[n] = j^n + e^{j\frac{2\pi}{3}n} - je^{j\frac{3\pi}{4}n}$ son periódicas y en su caso calcule su periodo. (0,5 puntos)

e) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} l(\tau) \cdot \delta\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau$ siendo *l(t)* la señal de tiempo continuo del apartado anterior. (0,5 puntos)

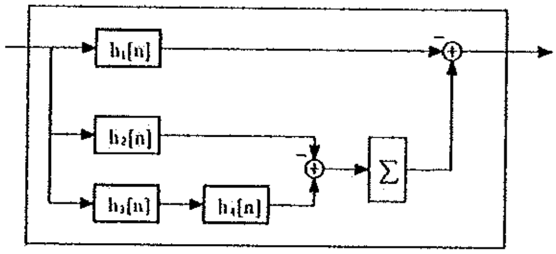
Problema 2 (3,5 puntos)

a) Estudie linealidad e invarianza del sistema $y(t) = 3\delta(t) + \int_t^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-t2\tau} d\tau$ (0,75 puntos)

b) Estudie causalidad y estabilidad del SLIT dado por $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^{-n} \cdot u(1+n)$. (0,5 puntos)

c) Calcule la convolución de $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u[n+1]$ con $h[n] = \frac{1}{2}^{|n|}$. (1,5 puntos)

d) Calcule la respuesta impulsiva equivalente de la siguiente interconexión de SLIT.



Determine la expresión de $h_1[n]$ para que la interconexión anterior pueda sustituirse por un único SLIT con respuesta

$h_{eq}[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$

sabiendo que

$h_4[n] = \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + 3\delta[n-3]$;

$h_2[n] = 2\delta[n+2] + 7 \cdot \delta[n+1] + 13\delta[n] + 7\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$;

$h_3[n] = h_4[-n]$. (0,75 puntos)

Problema 3 (4 puntos)

a) Una señal $x(t)$ es real y periódica (con periodo fundamental 3 segundos). Teniendo en cuenta que: (1) su potencia media es 10W; (2) tiene 6 coeficientes del DSF no nulos; (3) el módulo cada uno de los coeficientes asociados a componentes periódicas con *k>0* es el mismo; (4) se cumple que:

$$\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\}; \qquad \arg\{a_2\} = \pi/2; \qquad \arg\{a_3\} = -\pi/3.$$

Exprese dicha señal como una suma de señales sinusoidales reales. (1,5 puntos)

b) La señal $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-k)$ atraviesa dos SLIT en serie. El primero tiene una respuesta en frecuencia real, dada por un filtro ideal de amplitud 1 en $\omega \in (-3.5\pi, 3.5\pi)$. El segundo es un sistema retardo de 1 segundo. Obtenga una expresión para $h_1(t)$, $h_2(t)$, $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ y para la TF de la señal de salida $y(t)$. (1,5 puntos)

c) Calcule la Transformada de Fourier de $r(t)$, dada por:

$$h(t) = 3\, e^{-2|t-2|}; \qquad r(t) = \frac{d^3 h(t+3)}{dt^3} \qquad \text{(1 punto)}$$

PRUEBA DE LABORATORIO

a) En la Figura (1), indique lo que representa cada panel. Dé una expresión aproximada para *x(t)*, para h*(t)* y para *y(t)*.

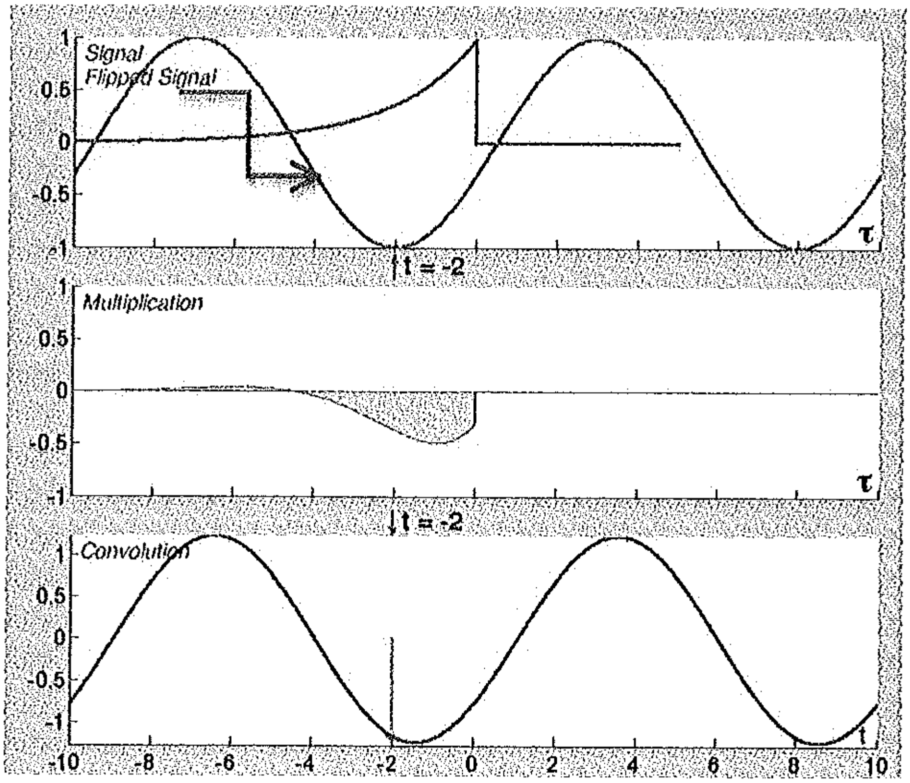


Figura (1)

b) En la Figura 2, ¿qué se puede decir de la propiedad de periodicidad de la señal? ¿Podemos dar una estimación del periodo fundamental y de los 3 primeros armónicos?

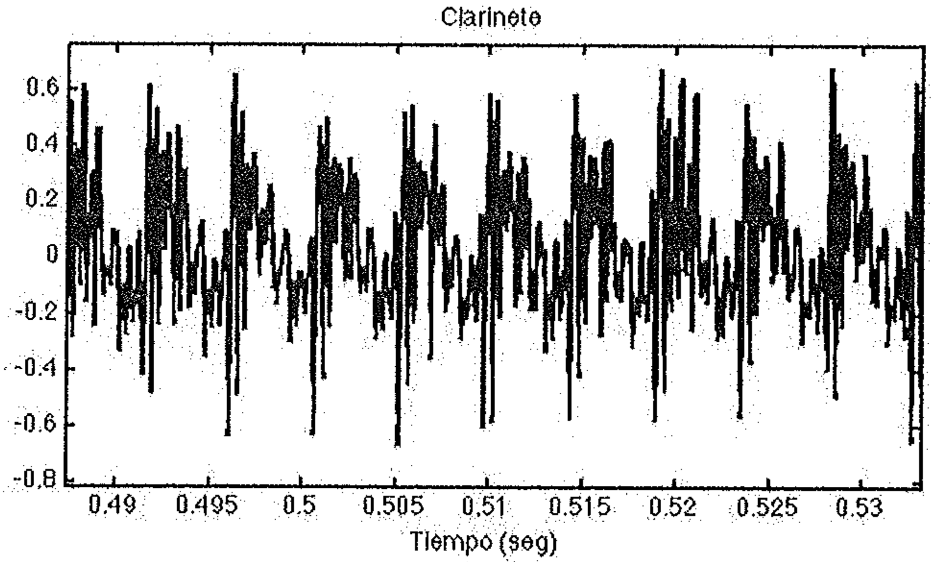


Figura (2)

(c) En la Figura 3, ¿podemos dar una estimación aproximada de la frecuencia fundamental? ¿Se corresponde con el periodo fundamental estimado en el apartado anterior? ¿Por qué?

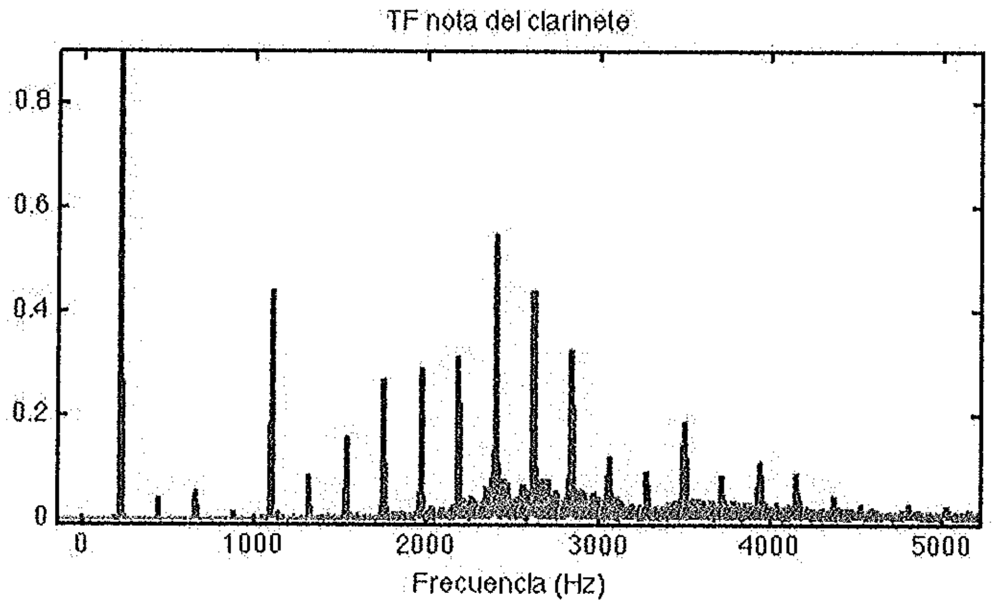
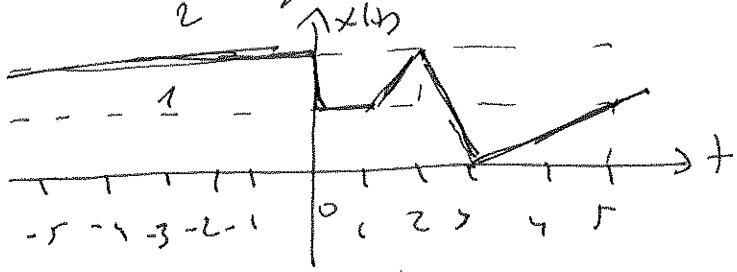


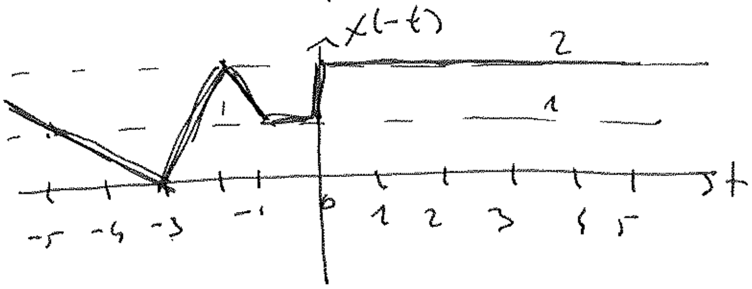
Figura 3

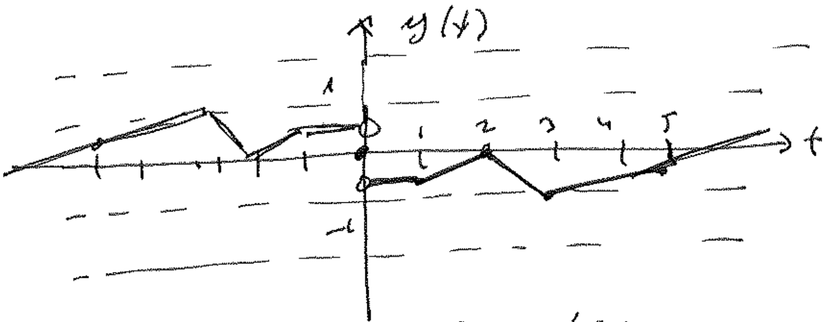
P1

$$z(t) = 2y(2t)\cdot(u(t+1) - u(t-1))$$

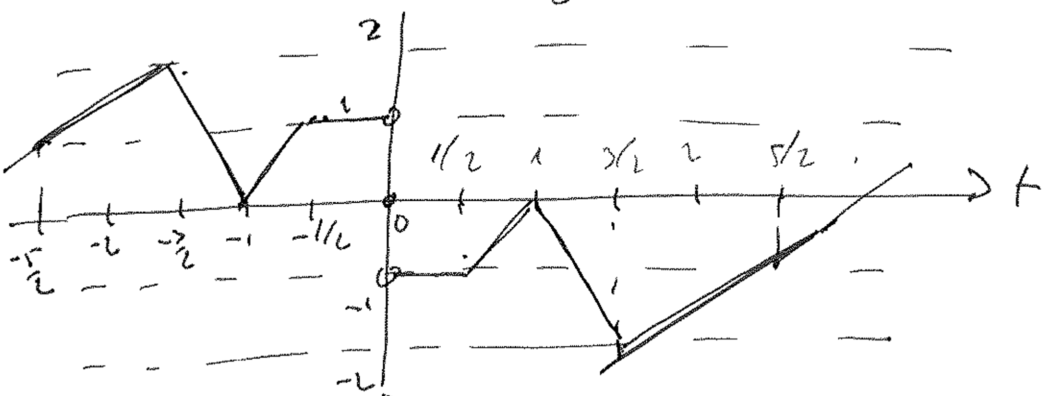
$$y(t) = \text{Ungr}\{x(t)\}$$

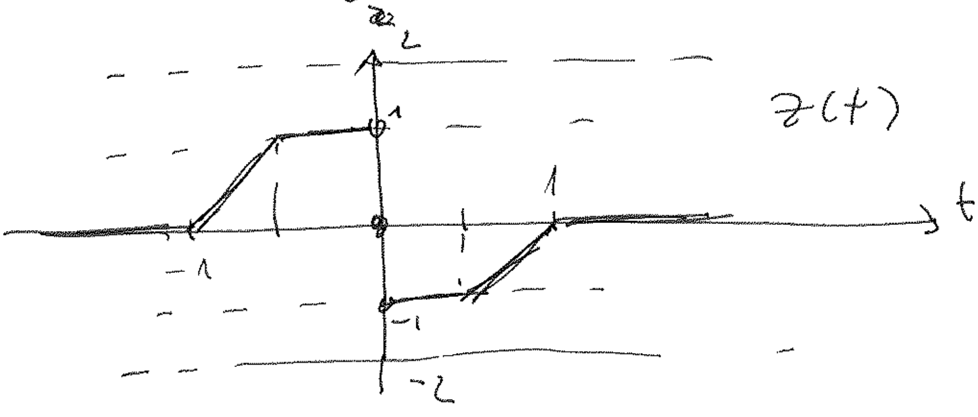






$2\cdot y(2t)$

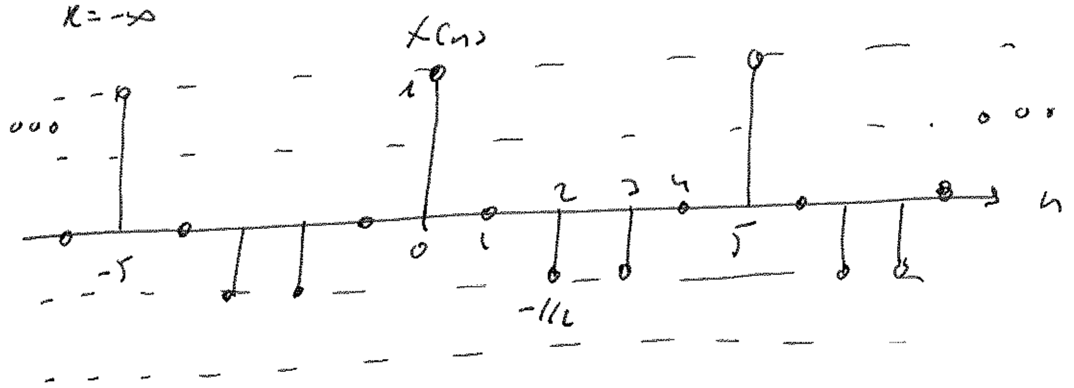




b) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-5k] - \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty} \delta[n-2-5k] -$

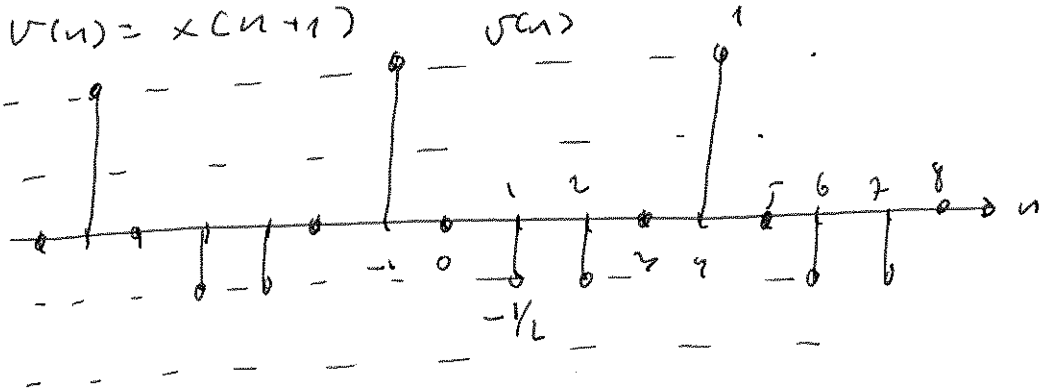
$- \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-3-5k] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta[n-5k] - \frac{1}{2} \delta[n-2-5k] - \frac{1}{2} \delta[n-3-5k] \right)$$

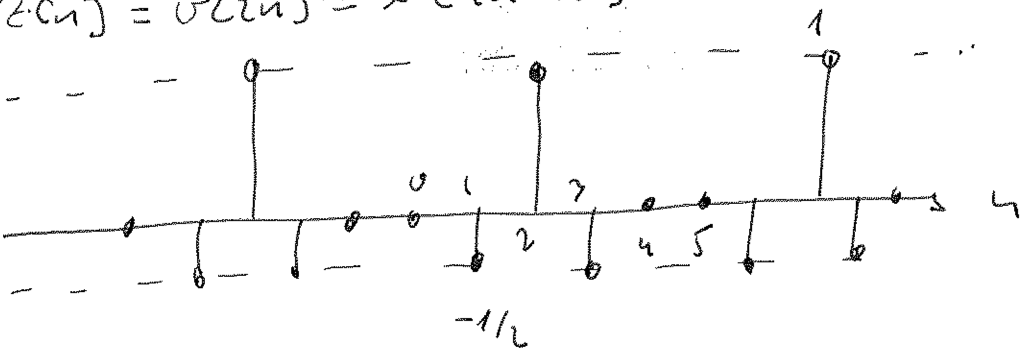


$z[n] = x[2n+1]$ Cominciamo per $x[n+1]$

$v[n] = x[n+1]$



$z[n] = v[2n] = x[2n+1]$



(c) Energía de $z(t)$. Puedo simplificar algunas operaciones mediante simetrías y consideraciones geométricas.

$$\boxed{E_{z(t)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = 2\int_0^{+\infty} |z(t)|^2 dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{1/2} 1^2 dt + 2\int_{1/2}^{1} |z(t)|^2 dt = 2 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ 2\int_0^{1/2} (2t)^2 dt = 1 + 8 \cdot \left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^{1/2} = 1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{4}{3}\ \mathrm{J}}$$

$P_{z(t)} = 0$, por estar definida en energía.

La secuencia discreta $z(n)$ es periódica, por tanto definida en potencia (energía infinita), y calculamos su potencia media en un periodo:

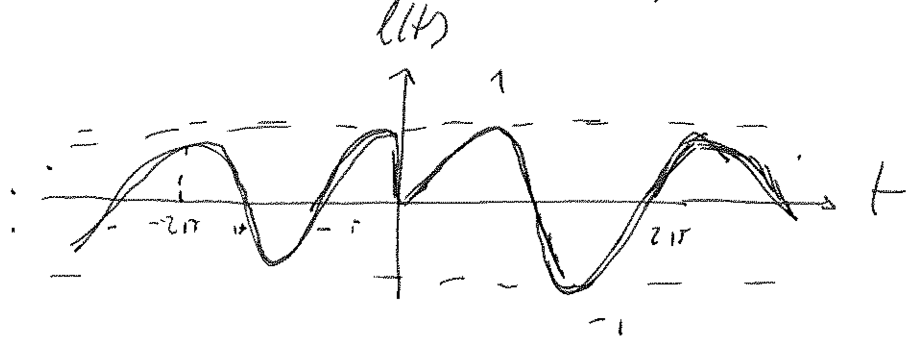
$$\boxed{P_{z(n)}} = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} |z(n)|^2 = \frac{1}{5}\left(0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}\ \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{10}\ \mathrm{W}}$$

(d) Estudiamos la periodicidad. En el primer caso:

$l(t) = \cos t \cdot u(-t) + \operatorname{sen} t \cdot u(t)$

no se trata de una señal periódica.



En el segundo caso:

$$l[n] = \underbrace{j^{n}}_{\omega_1} + \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{3}n}}_{\omega_2} - \underbrace{e^{j\frac{3\pi}{4}n}}_{\omega_3}$$

Como $j^n = \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{j\frac{\pi}{2}n} \Rightarrow \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4} = \frac{k_1}{N_1} \Rightarrow \underline{\underline{N_1 = 4}}$

$\frac{\omega_2}{N_2} = \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{3} = \frac{k_2}{N_2} \Rightarrow \underline{\underline{N_2 = 3}}$ muestras

$\frac{\omega_3}{N_3} = \frac{3\pi/4}{2\pi} = \frac{3}{8} = \frac{k_3}{N_3} \Rightarrow \underline{\underline{N_3 = 8}}$ muestras.

$\boxed{N_0 = \text{m.c.m.} \{4, 3, 8\} = 24 \text{ muestras.}}$

e) Calcula: $\int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\,\delta\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau = I$

De una parte, $\delta\left(\frac{\tau}{2}\right) = 2\,\delta(\tau)$, por tanto:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\cdot 2\,\delta(\tau)\, d\tau = 2\int_{-\infty}^{+\infty} l(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} l(0)\,\delta(\tau)\,d\tau = 2\,l(0)\cdot 1 = 2\,l(0).$$

$$l(0) = \cos(0)\cdot u(-0) + \operatorname{sen}(0)\,u(0) =$$

$$= 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1.$$

Por tanto, $\boxed{I = 2}$

P2 (a) $y(t) = 3\delta(t) + \int_t^{+\infty} x(\tau) e^{-t\cdot 2\tau} d\tau$

Linealidad. Si $x(t)=0 \rightarrow y(t) = 3\delta(t) \neq 0$, por tanto no puede ser lineal.

Invarianza.

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 3\delta(t) + \int_t^{+\infty} x_1(\tau) e^{-t2\tau} d\tau \rightarrow$

$y_1(t-t_0) = 3\delta(t-t_0) + \int_{t-t_0}^{+\infty} x_1(\tau) e^{-(t-t_0)2\tau} d\tau$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \rightarrow y_2(t) = 3\delta(t) + \int_t^{+\infty} x_2(\tau) e^{-t2\tau} d\tau =$

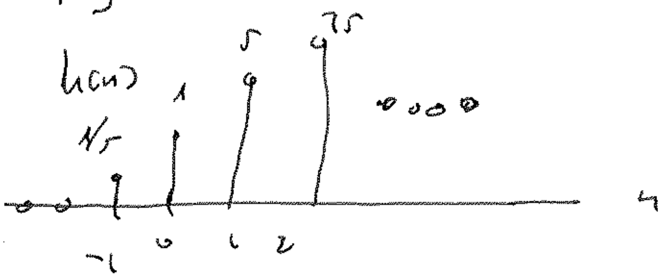
$= 3\delta(t) + \int_t^{+\infty} x_1(\tau - t_0) e^{-t2\tau} d\tau \Rightarrow$ Variante

(b) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^{-n} u[1+n] = 5^n \cdot u[1+n]$

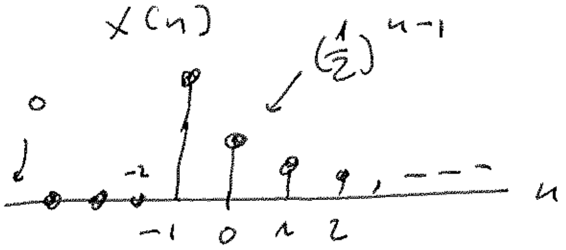
No es causal, $h[-1] \neq 0$

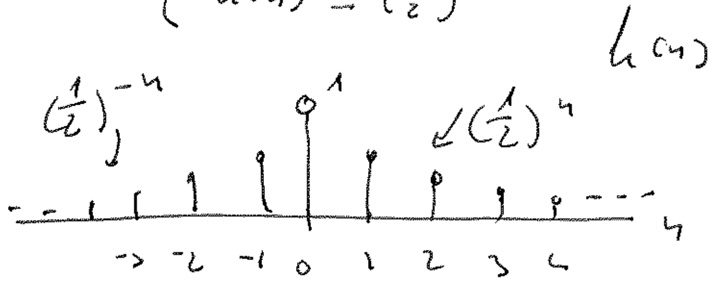
No es estable.

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \infty$

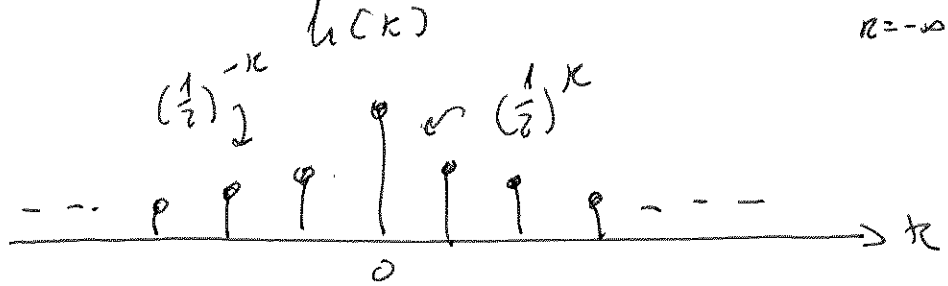


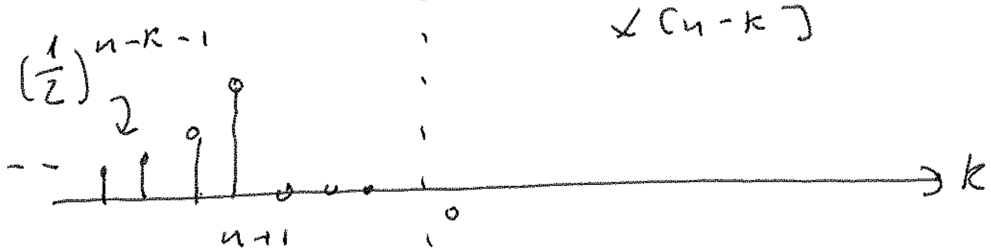
(c) $y(n) = x(n) * h(n)$, donde $\begin{cases} x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u(n+1) \\ h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \end{cases}$



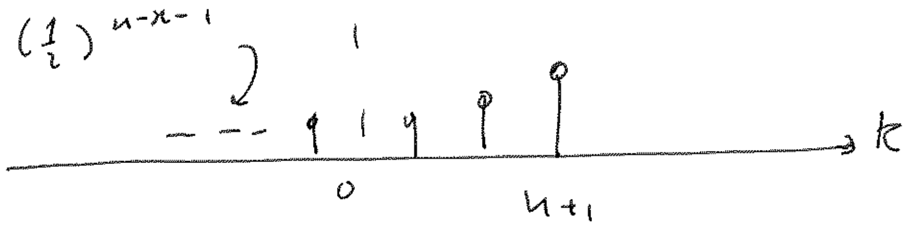


$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$





(1)



(2)

(1) $n+1 < 0 \Rightarrow n < -1 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} =$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{n+1} (4)^k =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{0 - 4^{n+2}}{1-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{-2}}\right)^{n+2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2n-4} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-5}$$

(2) $n+1 \geq 0 \rightarrow n \geq -1 \Rightarrow$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

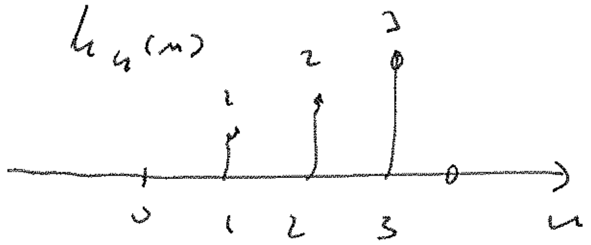
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{0} (4)^{k} + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

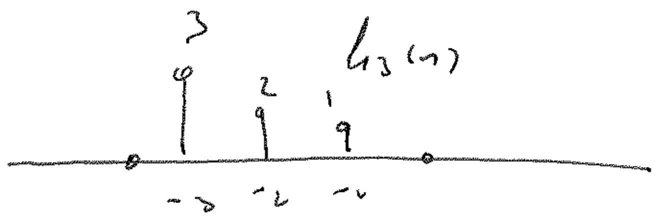
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{0-4}{1-4} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{3} + n\right)$$

(d) $h_3(n) = h_4(-n)$

$h_4(n) = \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3)$





$h_3(n) = 3\delta(n+3) + 2\delta(n+2) + \delta(n+1)$

- $h_3(n) * h_4(n) = (\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 3\delta(n-3)) *$

$* (3\delta(n+3) + 2\delta(n+2) + \delta(n+1)) =$

$= 3\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \delta(n) +$

$+ 6\delta(n+1) + 4\delta(n) + 2\delta(n-1) +$

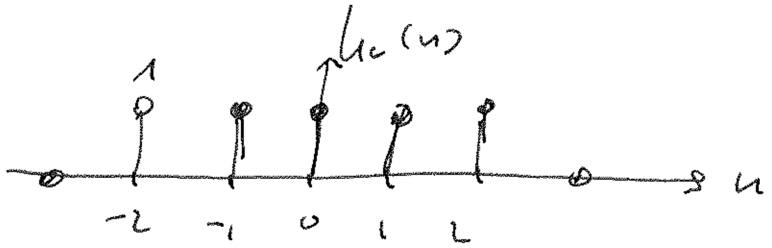
$+ 9\delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2) =$

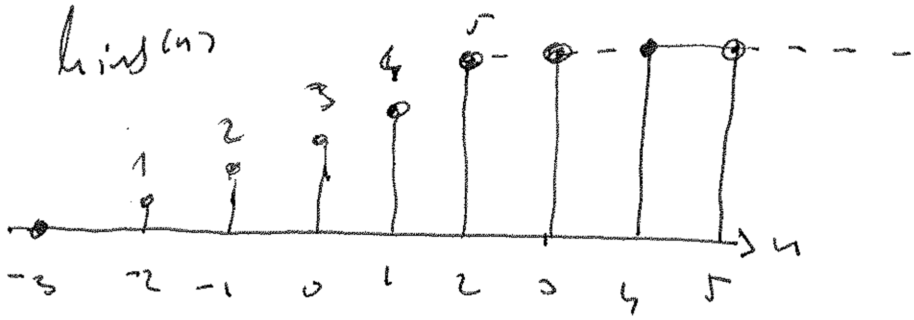
$= 3\delta(n+2) + 8\delta(n+1) + 14\delta(n) + 8\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$

- $(h_3(n) * h_4(n)) - h_2(n) = \delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) +$

$+ \delta(n-1) + \delta(n-2) = h_a(n)$

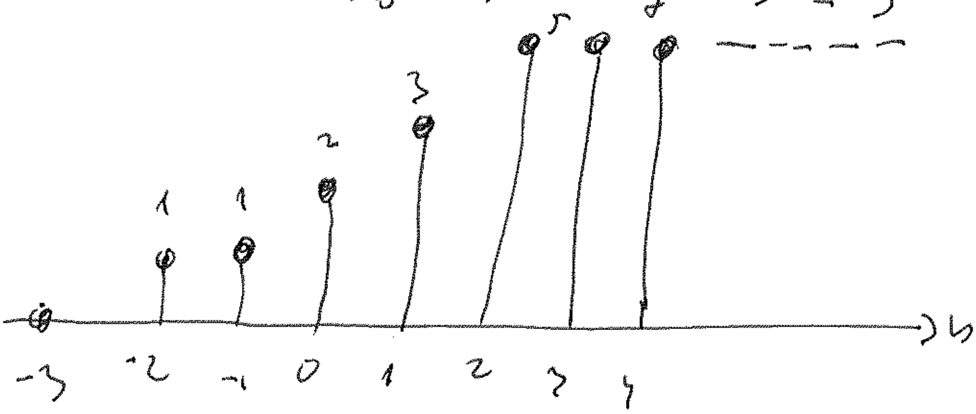
$$h_{inf}(n) = u(n) * h_a(n) = \sum_{n=\infty}^{n} h_a(n)$$





$$h_{eq}(n) = h_{inf}(n) - h_1(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1(n) = h_{inf}(n) - h_{eq}(n) \Rightarrow$$



P3

(a) $x(t)$ real y periódica. $T_0 = 3$ seg $\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ rad/s.

(1) $P_m = 10W$

(2) Tiene 6 coef. DSF no nulos.

(3) $|a_k| = a$, $(k>0)$

(4) $\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\}$

$\arg\{a_2\} = \pi/2$

$\arg\{a_3\} = -\frac{\pi}{3}$

Como $x(t)$ es periódica, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

De (1) y (3): $P_m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = |a_{-3}|^2 + |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 +$

$+ |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = 6 \cdot a^2 = 10 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10}{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

Tenemos ahora en cuenta las propiedades de simetría por ser $x(t)$ real $\Rightarrow a_k = a_{-k}^*$. Por tanto:

$\arg\{a_1\} = -\arg\{a_{-1}\}$, y además

$\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\}$, por tanto: $\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\} = 0$

$\arg\{a_{-2}\} = -\arg\{a_2\} = -\frac{\pi}{2}$

$\arg\{a_{-3}\} = -\arg\{a_3\} = +\frac{\pi}{3}$

Agrupando:

$$x(t) = a_{-3}\, e^{-j3\omega_0 t} + a_{-2}\, e^{-j2\omega_0 t} + a_{-1}\, e^{-j\omega_0 t} +$$

$$+ a_3\, e^{j3\omega_0 t} + a_2\, e^{j2\omega_0 t} + a_1\, e^{j\omega_0 t} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{5}{3}} \cdot e^{+j\frac{\pi}{3}} e^{-j3\omega_0 t} + \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j2\omega_0 t} + \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, e^{0} e^{-j\omega_0 t} +$$

$$+ \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j3\omega_0 t} + \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j2\omega_0 t} + \sqrt{\tfrac{5}{3}}\, e^{0} e^{j\omega_0 t} =$$

$$= 2\sqrt{\tfrac{5}{3}} \cos\left(2\pi t - \tfrac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{\tfrac{5}{3}} \cos\left(\tfrac{4\pi}{3} t + \tfrac{\pi}{2}\right) +$$

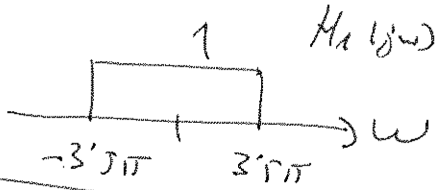
$$+ 2\sqrt{\tfrac{5}{3}} \cos\left(\tfrac{2\pi}{3} t\right)$$

(b) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-k)$ ($T_0 = 2$ seg)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/s

$x(t) \longrightarrow$ SLIT 1 $\longrightarrow$ SLIT 2 $\longrightarrow$

SLIT 1: filtro ideal:



$\Rightarrow$

$$\boxed{h_1(t) = \frac{\operatorname{sen}(3'5\pi t)}{\pi t}} \; ; \; \boxed{H_1(j\omega) = u(\omega + 3'5\pi) - u(\omega - 3'5\pi)}$$

SLIT 2: retardo de 1 segundo.

$$\boxed{h_2(t) = \delta(t-1)} \; ; \; \boxed{H_2(j\omega) = e^{-j\omega}}$$

Además, la TF de $x(t)$ es un tren de deltas que dependerá de los coeficientes del DSF.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t)\, e^{jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} (\delta(t) - \delta(t-1))\, e^{jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} \delta(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_{-0'5}^{1'5} e^{jk\omega_0} \delta(t-1)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{jk\pi}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - e^{jk\pi})\, \delta(\omega - k\pi)$$

Sabemos que $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$, por tanto:

$$Y(j\omega) = \pi \cdot e^{-j\omega} \cdot \sum_{k=-3}^{3} (1 - e^{jk\pi})\,\delta(\omega - k\pi) =$$

$$= \pi \cdot \sum_{k=-3}^{3} e^{-jk\pi} (1 - e^{jk\pi})\,\delta(\omega - k\pi) =$$

$$= \pi \sum_{k=-3}^{3} (e^{-jk\pi} - 1)\,\delta(\omega - k\pi)$$

b.6) $h(t) = 3e^{-2|t-2|}$; $r(t) = \dfrac{d^3 h(t+3)}{dt^3}$

Comenzamos por $h_1(t) = e^{-2|t|} \Rightarrow$

$$H_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-j\omega t} dt +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2-j\omega}\left[e^{(2-j\omega)t}\right]_{-\infty}^{0} +$$

$$+ \frac{1}{-2-j\omega}\left[e^{(-2-j\omega)t}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2-j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} =$$

$$= \frac{2+j\omega+2-j\omega}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

A partir de aquí aplicamos propiedades:

$$H(j\omega) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linealidad}}}{3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{desplazamiento } t-2}}{e^{-j\omega 2}} \cdot H_1(j\omega) = \frac{12\, e^{-j2\omega}}{4+\omega^2}$$

$$R_1(j\omega) = e^{+j\omega 3} H(j\omega) = \frac{12\, e^{j\omega}}{4+\omega^2}$$

$$\boxed{R(j\omega)} = \underset{\substack{d^3/dt^3 \\ \downarrow}}{(j\omega)^3} \frac{12\, e^{j\omega}}{4+\omega^2} \Rightarrow \boxed{R(j\omega) = \frac{12(-j)\omega^3 e^{j\omega}}{4+\omega^2}}$$