FÍSICA I

Profesora: MARÍA ENCARNACIÓN CÁMARA
(ecamara@etsii.upm.es)

14 temas

Magnitudes físicas. Unidades y medidas (5 hojas)
Vectores y sistemas de vectores (9)
Estática de sistemas (5)
Cinemática del punto (5)
Cinemática de los sistemas (4)
Cinemática relativa del punto (2)
Dinámica del punto (4)
Trabajo y energía I (3)
Trabajo y energía II (3)
Movimiento de un punto bajo fuerzas centrales (4)
Dinámica de los sistemas I (3)
Dinámica de los sistemas II (4)
Medios deformables I (2)
Medios deformables II (4)

Al final se incluyen los dos primeros controles de evaluación continua del curso 2012-2013 (sólo enunciados)

Laura Martín de Azcárate | 2012-13 |

T1 - MAGNITUDES FÍSICAS. UNIDADES Y MEDIDAS

1. Introducción a la Ciencia Física.

Física significa en griego "naturaleza"

Hasta S.XIX → Fenómenos naturales

Desde S.XIX → Fenómenos físicos

OBJETIVO → se consigue a partir de la teoría (ciencia formal) y de la observación (ciencia de la experimentación).

Pretende el estudio de los componentes de la materia y sus interacciones mutuas y, a partir de ello, explicar las propiedades, la materia y los fenómenos que observa en la naturaleza.

La validez de las teorías científicas no es de por vida; es válida hasta que se demuestre lo contrario. (Aristóteles → Galileo)

Para que una hipótesis sea científica, debe ser probada.

- Metodología científica

Observación de un fenómeno natural { Registro de la info; Análisis de la misma; Identificación de variables; Formulación de hipótesis }

↓

Diseño y realización del experimento

↓

MODELO, que dará lugar a una TEORÍA

↓

Comprobación

↓

Predicción

Modelo → ayuda a comprender una determinada cosa (luz - ondas en el agua)

Teoría → cuestión que intenta resolver el conjunto de cosas que encontramos a nuestro alrededor

Ley → enuncia la teoría y su validez es comprobada por los experimentos.

- Partes de la Física

FÍSICA CLÁSICA (teorías corpuscular y ondulatoria)
objetos grandes
velocidades pequeñas

- Mecánica → mov.
- Termodinámica → calor
- Acústica → sonido
- Óptica → luz
- Electromagnética

FÍSICA MODERNA:

- F. Relativista (1905, Lorentz y Einstein)
- F. Cuántica (1924, De Broglie. Dualidad onda-corpúsculo)

Objetos pequeños
Velocidades grandes

Principio de correspondencia (Bohr, 1923)

El principio postula una correspondencia (relación) entre la teoría clásica y cuántica en el sentido de alguna condición límite. Gracias a esto, se pueden realizar conexiones entre las frecuencias, intensidades y polarización de las líneas espectrales de la teoría cuántica, y las correspondientes cantidades de la teoría clásica.

2. Magnitudes, cantidades y unidades

$q_0, q_1, q_2 \dots \rightarrow$ conjunto de observables comparables dos a dos

⇓

Cantidades de una misma magnitud.

concreto, observable — abstracto

- Extensivas (masa, volumen, longitud, tiempo)
- Intensivas (temperatura, densidad) — no aditivas

Unidad de una magnitud → cantidad q_0 de una magnitud que se toma de referencia

Medir una cantidad es compararla con otra que se toma como unidad

q_0: unidad de la magnitud M

q_i: cantidad

$M(q_i)$: medida sobre q_0

$$\frac{q_i}{q_0} = M(q_i) \rightarrow q_i = q_0 \cdot M(q_i)$$

MAGNITUDES
- Primarias → se definen de forma cualitativa antes de establecer unidades y medidas (long., masa, fuerza)
- Secundarias → a partir de las primarias (velocidad, aceleración)

Si hablamos de los sistemas de unidades:

- Básicas o fundamentales → se eligen arbitrariamente para formar la base de un sistema dimensional.
  S.I: longitud, masa, tiempo
- Derivadas → no están en la base del sistema dimensional

• El sistema Internacional (SI)

Magnitudes fundamentales y unidades básicas
- Longitud → metro
- Masa → kilogramo
- Tiempo → segundo
- Temperatura termodinámica → kelvin
- Intensidad de corriente → amperio
- Intensidad luminosa → candela
- Cantidad de materia → moles

Unidades derivadas → unidad de superficie, velocidad, aceleración, ...
Unidades suplementarias → unidad de ángulo plano (radián) y de ángulo sólido (estereorradián).
(Tras 1997 son derivadas)

Múltiplos y submúltiplos de las unidades

Múltiplos			Submúltiplos		
deca	da	10	deci	d	10^{-1}
hecto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	K	10^3	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}
zetta	Z	10^{21}	zepto	z	10^{-21}
yotta	Y	10^{24}	yocto	y	10^{-24}

• Notación científica y órdenes de magnitud

Se utiliza para escribir valores muy grandes o muy pequeños.

Ej: Nº de Avogadro: $\underbrace{6,023}_{\text{Mantisa}} \cdot \underbrace{10^{23}}_{\text{potencia de 10}}$

El orden de magnitud es la potencia de 10 más cercana al número del que se habla.

3. Leyes Físicas y constantes universales

En una ley física intervienen magnitudes primarias, al menos una, y pueden intervenir también magnitudes secundarias, pero la forma de una ley física siempre se puede reducir a una expresión monómica (productos y potencias).

$$q \propto q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdots q_n^{\alpha_n} \quad \begin{cases} q_i = \text{cantidades} \\ \alpha_i = \text{n}^{\text{os}} \text{ fijos (grado de conexión o dependencia)} \end{cases}$$

proporcional

$$y = C\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \begin{cases} y = M(q) \rightarrow \text{medida de } q \\ C = \text{constante} \\ x_i = M(q_i) \end{cases}$$

La constante C depende de las unidades utilizadas y se puede considerar como una magnitud secundaria. Existen dos tipos de constantes:

- constante característica: depende de la naturaleza del cuerpo o material.
  Ej. Módulo de Young (Ley de Hooke)
  $$F \propto \frac{S \Delta L}{L} \rightarrow F = E \frac{S \Delta L}{L} \Rightarrow E = \frac{FL}{S \Delta L}$$
- constante universal: independiente de la naturaleza de la sustancia
  - Ineludibles → cte. de gravitación, velocidad de la luz en el vacío, cte. de Planck, cte. de Boltzman, nº de Avogadro, permitividad eléctrica en el vacío.
  - superfluas → pueden ignorarse adoptando unidades adecuadas.

4. Ecuaciones de dimensión: homogeneidad dimensional.

Ley física → $M(q) = C\, [M(q_1)]^{\alpha_1} [M(q_2)]^{\alpha_2} \cdots [M(q_n)]^{\alpha_n}$

$$M(q) = \frac{q}{q_0} = C \left(\frac{q_1}{q_{0_1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{q_2}{q_{0_2}}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{q_n}{q_{0_n}}\right)^{\alpha_n}$$

$$\frac{q}{q_0^*} = C^* \left(\frac{q_1}{q_{0_1}^*}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{q_2}{q_{0_2}^*}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{q_n}{q_{0_n}^*}\right)^{\alpha_n}$$

$$\frac{q_0^*}{q_0} = \frac{C}{C^*} \left(\frac{q_{0_1}^*}{q_{0_1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{q_{0_2}^*}{q_{0_2}}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{q_{0_n}^*}{q_{0_n}}\right)^{\alpha_n} \Rightarrow [Q] = C\, [Q_1]^{\alpha_1} [Q_2]^{\alpha_2} \cdots [Q_n]^{\alpha_n}$$

Ec. dimensional de una magnitud (expresión de una magnitud como producto de potencias que representan generalmente mag. básicas de un sistema)

Masa m $[m] = M$

Longitud l $[l] = L$

Tiempo t $[t] = T$

Velocidad v $[v] = \frac{[l]}{[t]} = L \cdot T^{-1}$

Aceleración a $[a] = \frac{[l]}{[t]^2} = L \cdot T^{-2}$

Con una ley física se va a cumplir el principio de homogeneidad, es decir, que las magnitudes son homogéneas entre sí, que tienen la misma dimensión.

Ejercicios.

1. Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = cte.$

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\frac{1}{2}\rho v^2] \rightarrow [\rho]\cdot[v]^2 = \frac{M}{L^3}\cdot\left(\frac{L}{T}\right)^2 = M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$$

$$[\rho g h] = (ML^{-3})\cdot(LT^{-2})\cdot L = M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$$

La ecuación de Bernoulli es correcta dimensionalmente.

2. Deducir, mediante análisis dimensional, la tercera ley de Kepler relativa al movimiento de los planetas, sabiendo que el periodo de una revolución planetaria es una expresión monomia del eje mayor (A), de la constante de gravitación universal (G) y de la masa del sol (M_S).

$$T^{\sigma} \propto A^{\alpha}\cdot G^{\beta}\cdot M_S^{\gamma}$$

$$[T]^{\sigma} = [A]^{\alpha}\cdot[G]^{\beta}\cdot[M_S]^{\gamma} \rightarrow T^{\sigma} = L^{\alpha}\left(\frac{L^3}{M\cdot T^2}\right)^{\beta}\cdot M^{\gamma} \Rightarrow T^{\sigma+2\beta} = L^{\alpha+3\beta}\cdot M^{\gamma-\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma+2\beta=0\\ \alpha+3\beta=0\\ \gamma-\beta=0\end{array}\right\} \boxed{\beta=1} \rightarrow \begin{array}{l}\sigma=-2\beta=-2\\ \alpha=-3\beta=-3\\ \gamma=\beta=1\end{array} \Rightarrow T^{-2}\propto A^{-3}\cdot G\cdot M_S \rightarrow \underline{T^2\propto A^3\cdot G^{-1}\cdot M_S^{-1}}$$

Mejor poner T elevado a 1 ⇒ se saca una de las incógnitas α, β o γ.

3. Un sistema de unidades tiene como magnitudes fundamentales la presión (p), la densidad (ρ) y la aceleración (a). Para medir las magnitudes utilizaremos: $p = kg(fuerza)/cm^2$; $\rho = 13{,}6g/cm^3$; $a = 9{,}8m/s^2$. Determinar las ecuaciones dimensionales en este sistema para el tiempo y la masa, así como la equivalencia entre la hora y la unidad derivada del tiempo en el sist. de unidades dado.

$$t = p^{\alpha}\cdot\rho^{\beta}\cdot a^{\gamma} \rightarrow [t] = [p]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[a]^{\gamma}$$

$$T = \left(\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{\beta}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\gamma} \rightarrow T = M^{\alpha+\beta}\cdot L^{-\alpha-3\beta+\gamma}\cdot T^{-2\alpha-2\gamma}$$

$$[p] = \frac{[F]}{[S]}$$

$$[\rho] = \frac{[M]}{[V]}$$

$$[a] = LT^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l}M: \alpha+\beta=0\\ L: -\alpha-3\beta+\gamma=0\\ T: -2\alpha-2\gamma=1\end{array}\right\}$$

$$\beta = -\alpha \rightsquigarrow \boxed{\beta=-1/2}$$

$$2\alpha+\gamma=0 \rightsquigarrow 2\alpha-1=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=1/2}$$

$$\begin{array}{r}-2\alpha-2\gamma=1\\ \hline -\gamma=1\end{array} \Rightarrow \boxed{\gamma=-1}$$

$$\underline{t = p^{1/2}\,\rho^{-1/2}\,a^{-1}}$$

$$m = p^{\alpha'} \cdot \rho^{\beta'} \cdot a^{\gamma'} \longrightarrow [m] = M = M^{\alpha'+\beta'} \cdot L^{-\alpha'-3\beta'+\gamma'} \cdot T^{-2\alpha'-2\gamma'}$$

$$\left.\begin{array}{l} M: \alpha' + \beta' = 1 \\ L: -\alpha' - 3\beta' + \gamma' = 0 \\ T: -2\alpha' - 2\gamma' = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{\alpha' = 3} \\ \boxed{\beta' = -2} \\ \boxed{\gamma' = -3} \end{array} \Rightarrow \underline{m = p^{3} \cdot \rho^{-2} \cdot a^{-3}}$$

Unidades de una misma magnitud:

$$\left(\frac{q_0^*}{q_0}\right) = \frac{C}{C^*}\left(\frac{q_{01}^*}{q_{01}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{q_{02}^*}{q_{02}}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{q_{0n}}{q_{0n}}\right)^{\alpha_n} \longrightarrow [Q] = C' [Q_1]^{\alpha_1} [Q_2]^{\alpha_2} \cdots [Q_n]^{\alpha_n}$$

$$\left(\frac{1s}{t}\right) = \left(\frac{1N \cdot m^{-2}}{9{,}8\, N \cdot cm^{-2}}\right)^{1/2}\left(\frac{kg \cdot m^{-3}}{13{,}6\, g \cdot cm^{-3}}\right)^{-1/2}\left(\frac{m \cdot s^{-2}}{9{,}8\, m \cdot s^{-2}}\right)^{-1} \longrightarrow \frac{1s}{t} = \left(\frac{1 \cancel{N} \cancel{m^{-2}}}{9{,}8 \cancel{N} \cdot 10^4 \cancel{m^{-2}}}\right)^{1/2}\left(\frac{\cancel{kg} \cancel{m^{-3}}}{13{,}6 \cdot 10^3 \cancel{kg} (10^{-2})^{-3} \cancel{m^{-3}}}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{\cancel{m s^{-2}}}{9{,}8 \cancel{m s^{-2}}}\right)^{-1}$$

$$\frac{1s}{t} = \sqrt{\frac{1}{9{,}8 \cdot 10^4}} \cdot \sqrt{13{,}6 \cdot 10^3} \cdot 9{,}8 = 3{,}651 \rightarrow 1s = 3{,}651\, t.$$

$$1h = 3600\, s = 3{,}651 \cdot 3600\, t \Rightarrow \underline{\underline{1h = 13143{,}6\, t}}$$

4. Calidad de la medida

- Medición de las magnitudes físicas

MEDIR $\rightarrow$ Tomar una cantidad (mensurando) y compararla con la unidad.

El resultado es la MEDIDA, que viene dada por un valor numérico, una incertidumbre (valoración de la calidad de la medida) y una unidad (la empleada).

Ej: $(3{,}25 \pm 0{,}01)\, m$

Para obtener el valor numérico, utilizamos los instrumentos de medida. Estos pueden ser de dos maneras:

- Directa: al aplicarlo sobre un mensurando facilita directamente una indicación

$$y = x' \qquad \begin{array}{l} y\text{: mensurando} \\ x'\text{: lectura del instrumento} \end{array}$$

- Indirecta: la indicación no se facilita directamente, sino con un patrón:

$$y = x' + x_0 \qquad x_0\text{: patrón}$$

Elementos de medida
- Campos de medida $\rightarrow$ Intervalo de valores en que se puede utilizar el instrumento
- División de escala $\rightarrow$ Cantidad de magnitud más pequeña que puede apreciar el instrumento.

EXACTITUD → indica la estimación de cuánto se acerca al valor real.

PRECISIÓN → depende de su división de escala.

Ej: Reloj – preciso porque da horas, minutos y segundos; pero no exacto porque no tiene porqué indicar la correcta

Medidas { Directas: por lectura del instrumento
Indirectas: a través de una relación en la que intervienen otros mesurandos, medidos previamente

• Magnitudes de influencia. Incertidumbre en la medida

Causas de imperfección en las medidas:

INSTRUMENTO { Precisión
Calibrado

MENSURANDO – No siempre se puede definir un valor numérico.

EL OPERADOR { Error visual (m. dir)
No utilizar la expresión adecuada (m. ind)

OTRAS – Presión, ~~temperatura~~, ...

Necesidad de tener calidad en la medida
- Controlar valores medios
- Determinar el campo de variabilidad de las magnitudes de influencia.

Magnitudes de influencia [No son objeto de nuestro estudio, pero perturban la medida
No se pueden determinar exactamente sus valores medios, ni reducirlos a cero.

Resultado: valor convencionalmente verdadero (Valor num. + incertidumbre)

$\boxed{\text{INCERTIDUMBRE}}$ Valoración de la calidad de la medida
Representa la semiamplitud de un intervalo donde se encuentra el valor verdadero $(x-u, x+u)$
Cantidad de la misma magnitud medida, referida a la unidad.

{ Incertidumbre absoluta (u)
Incertidumbre relativa $\left(\omega = \frac{u}{y}\right)$

Medidas indirectas $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$

y: valor de la magnitud
$x_1, x_2, \ldots, x_u$: cantidades de mag. estadísticamente indep.

$u(y)$ Incertidumbre de y $\quad y \pm u(y)$

Ley de propagación de incertidumbres: $u^2(y) = \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$

$U(y) = k\,u(y) \rightarrow k = 1,2,3$ K es el factor de recubrimiento

$\Downarrow$

$y \pm U(y)$

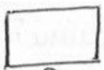
Derivadas $y = x^2 \rightarrow y = f(x)$

$$\frac{dx}{dy} = 2x$$

$y = x_1^2 \cdot x_2^3 \rightarrow y = f(x_1, x_2)$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 \cdot x_2^3 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1^2 \cdot 3x_2^2$$

Ej. 1. Calcular el área de un rectángulo



h B

$$A = Bh \qquad u_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)^2 u_B^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)^2 u_h^2$$

$$u_A^2 = h^2 u_B^2 + B^2 u_h^2 \longrightarrow u_A = \sqrt{h^2 u_B^2 + B^2 u_h^2} \Longrightarrow A \pm u_A$$

2. Conociendo u_D de una esfera D, determinar la incertidumbre absoluta y relativa en el cálculo de su volumen.
diámetro

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

$$u_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 u_D^2 = \left(\frac{3}{6}\pi D^2\right)^2 \cdot u_D^2 \rightarrow \underline{\underline{u_V = \frac{1}{2}\pi D^2 u_D}}$$

$$\underline{\underline{w_V}} = \frac{u_V}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi D^2 u_D}{\frac{1}{6}\pi D^3} = \underline{\underline{3\frac{u_D}{D} = 3w_D}}$$

3. Para determinar el valor de la variable dependiente y se utiliza la función $y = x_1^3 \cdot x_2^2$. Si se miden directamente los valores x_1 y x_2, se obtienen unas incertidumbres relativas $w_{x_1} = 1 \cdot 10^{-4}$ y $w_{x_2} = 2 \cdot 10^{-4}$. Determinar la incertidumbre relativa w_y del valor probable de y.

$$u_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u_{x_2}^2 = \left(3x_1^2 \cdot x_2^2\right)^2 (w_{x_1} \cdot x_1)^2 + (x_1^3 \cdot 2x_2)^2 (w_{x_2} \cdot x_2)^2$$

$$w_{x_1} = \frac{u_{x_1}}{x_1} \rightarrow u_{x_1} = w_{x_1} \cdot x_1$$

$$w_y^2 = \frac{u_y^2}{y^2} = \left(\frac{3x_1^{\cancel{2}} \cancel{x_2^2}}{x_1^{\cancel{3}} \cancel{x_2^2}}\right)^2 (w_{x_1} \cdot x_1)^2 + \left(\frac{\cancel{x_1^3} \cdot 2x_2}{\cancel{x_1^3} \cdot x_2^{\cancel{2}}}\right)^2 (w_{x_2} \cdot x_2)^2 = \left(\frac{3w_{x_1} \cancel{x_1}}{\cancel{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{2w_{x_2} \cancel{x_2}}{\cancel{x_2}}\right)^2$$

$$w_y^2 = (3w_{x_1})^2 + (2w_{x_2})^2 = 9 \cdot 10^{-8} + 4 \cdot 4 \cdot 10^{-8} = 25 \cdot 10^{-8} \Longrightarrow \underline{\underline{w_y = 5 \cdot 10^{-4}}}$$

4. Determine la incertidumbre relativa en el valor de la aceleración de la gravedad. Para medir la gravedad se utiliza un péndulo simple. Si las incertidumbres relativas en función de la longitud y el periodo es del 1% (0,01), determinar la incertidumbre relativa de la aceleración.

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \sqrt{g} = \frac{\sqrt{l}}{T} \Rightarrow g = \frac{l}{T^2} \qquad \omega_l = \omega_T = 0{,}01$$

$$u_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u_T^2 = \left(\frac{1}{T^2}\right)^2 u_l^2 + \left(-\frac{l}{T^4}\right)^2 u_T^2 = \left(\frac{1}{T^2}\right)^2 (\omega_l \cdot l)^2 + \left(-\frac{l}{T^4}\right)^2 (\omega_T \cdot T)^2$$

$$\omega_g^2 = \frac{u_g^2}{g^2} = \left(\frac{1 \cdot \cancel{T^2}}{\cancel{T^2}\, l}\right)^2 (\omega_l \cdot l)^2 + \left(\frac{-\cancel{l}\, T^2}{T^4 \cdot \cancel{l}}\right)^2 (\omega_T T)^2 = 1^2\, \omega_l^2 + (-1)^2 \omega_T^2 = 0{,}01^2 + 0{,}01^2 = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_g = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}}}$$

$T = f(g)$

f) Déterminer la [illegible] et [illegible] de la [illegible]. Pour [illegible] la précision [illegible] la [illegible] relative [illegible] de la longueur l et [illegible] est 1% $(0{,}01)$, [illegible] la [illegible] relative de la [illegible].

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow [illegible] \qquad \Delta l_g = \Delta l_r = 0{,}01$$

$$u_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u_T^2 = [illegible]$$

$$\left(\frac{u_g}{g}\right)^2 = [illegible] = 2\cdot 10^{-4}$$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{\Delta_g = 4{,}2\cdot 10^{-4}}}$$

TEMA 1. Magnitudes físicas: unidades y medidas (RESUMEN)

Física CLÁSICA $\begin{cases} \text{Mecánica} \\ \text{Termodinámica} \\ \text{Acústica} \\ \text{Óptica} \\ \text{Electromagnética} \end{cases}$ Física MODERNA $\begin{cases} \text{Relativista} \\ \text{Cuántica} \end{cases}$

- El Sistema Internacional (SI)

Magnitudes fundamentales →	Unidades básicas
Longitud	Metro (m)
Masa	Kilogramo (kg)
Tiempo	Segundo (s)
Temperatura termodinámica	Kelvin (K)
Intensidad de corriente	Amperio (A)
Intensidad luminosa	Candela
Cantidad de materia	Mol

<u>Múltiplos</u>

Deca (da) → 10^1	deci (d) → 10^{-1}
Hecto (h) → 10^2	centi (c) → 10^{-2}
Kilo (k) → 10^3	mili (m) → 10^{-3}
Mega (M) → 10^6	micro (μ) → 10^{-6}
Giga (G) → 10^9	nano (n) → 10^{-9}
Tera (T) → 10^{12}	pico (p) → 10^{-12}
Peta (P) → 10^{15}	femto (f) → 10^{-15}
Exa (E) → 10^{18}	atto (a) → 10^{-18}
Zetta (Z) → 10^{21}	zepto (z) → 10^{-21}
Yotta (Y) → 10^{24}	yocto (y) → 10^{-24}

- Incertidumbre

Incertidumbre absoluta → u
Incertidumbre relativa → ω $\Big\}$ $\omega = \frac{u}{y}$

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ → $u^2(y) = \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$

$y \pm u(y)$

T2 - VECTORES Y SISTEMAS DE VECTORES

1. Magnitudes escalares y vectoriales.

Magnitudes escalares: se identifican con solo los números.

Magnitudes vectoriales: no solo están identificadas con los números, sino que necesitamos una dirección y un sentido.

Vector → segmento orientado, por lo que está definido por dos extremos y posee simetría central, pero al estar orientado no es lo mismo el origen que el final.

$\vec{v} = \vec{AB}$ A: origen
B: extremo

Podemos definir tres tipos de vectores

Libres: están determinados conociéndose el módulo, la dirección y el sentido → suma, producto por escalares.
Deslizante: además, necesitamos saber cuál es la recta soporte del vector.
Ligado: además de lo del vector libre, necesitamos conocer cuál es su punto de aplicación.

Un espacio vectorial es un conjunto formado por vectores. Con respecto a la suma de vectores (ley interna) cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elementos neutro y simétrico (grupo abeliano). Con respecto al producto de escalares (ley externa), cumple las propiedas asociativa, ya sea con escalares o vectores, y la existencia del elemento unidad. Todas estas propiedades dotan a la cuaterna $(K^n, K, +, \cdot)$ de la estructura de espacio vectorial.

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ es un sistema generador si un vector se puede obtener por combinación lineal de dichos vectores.

$\vec{u} \in V \qquad \vec{u} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

Linealmente independientes: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$
Linealmente dependientes: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0 \Rightarrow \lambda_i \neq 0$

La base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes de orden máximo, es decir, un sistema de generadores del espacio y cuyo número máximo es el número del espacio.

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ $\qquad \vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \dots + u_n\vec{e}_n$

$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow$ componentes de $\vec{u}$: conjunto ordenado y
La descomposición de esta base es única

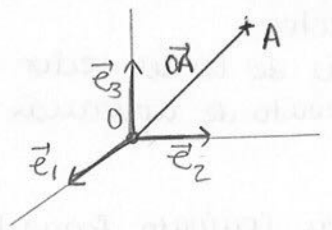
$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}\right] \text{ Componentes de los vectores de la base}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$
$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$$

2. Sistemas de referencia y orientación en el espacio.

Vamos a tomar el espacio de puntos o espacio afín. En este espacio vamos a elegir un sistema de referencia, formado por un punto que es origen del sistema (0) y por una base (1D $\{\vec{e}_1\}$, 2D $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, 3D $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$).

3D $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

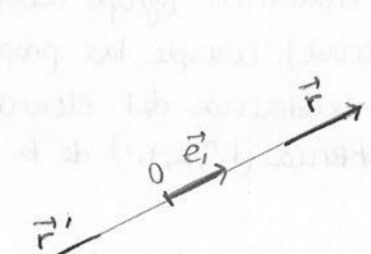


$\vec{OA} = \vec{r} = (q_1\vec{e}_1, q_2\vec{e}_2, q_3\vec{e}_3)$

(q_1, q_2, q_3) componentes de $\vec{r}$
y coordenadas de A
respecto a esa referencia.

Orientación

1D $(0, \vec{e}_1)$
RECTA

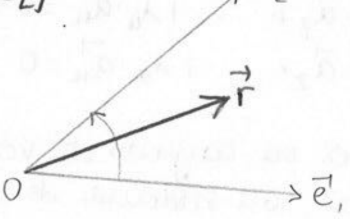


$\vec{r} = q_1 \vec{e}_1 \qquad (q_1 > 0)$
$\vec{r}\,' = q_1' \cdot \vec{e}_1 \qquad (q_1' < 0)$

Un eje es una recta direccionada por un vector, en este caso el vector $\vec{e}_1$

2D $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
PLANO

$\vec{r} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2$



Referencia a derechas: $\circlearrowleft +$
Referencia a izquierdas: $\circlearrowright -$
(siempre por el camino más corto del 1° al 2°)

Sistema cartesiano $\begin{cases} \text{abscisa}: q_1 = x;\ \vec{e}_1 = \vec{i} \\ \text{ordenada}: q_2 = y;\ \vec{e}_2 = \vec{j} \end{cases}$

Física
19/9/12

3D $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{r} = q_1 \cdot \vec{e}_1 + q_2 \cdot \vec{e}_2 + q_3 \cdot \vec{e}_3$$

Nº de inversiones

A derechas: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$, $(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ PAR

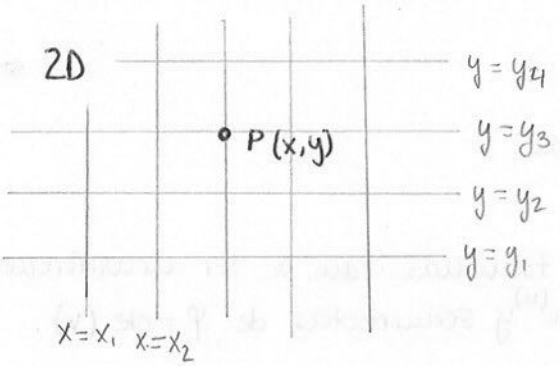
$2 \to 1$, $3 \to 1$ } 2 ; $3 \to 1$, $3 \to 2$ } 2

A izquierdas: $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$, $(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ IMPAR

$2 \to 1$ } 1 ; $3 \to 2$ } 1 ; $3 \to 2$, $3 \to 1$, $2 \to 1$ } 3

Analizar sistemas de referencia

2D



$P = (x_3, y_3)$

Las familias de curvas son RECTAS

3D Las familias de superficies son PLANOS

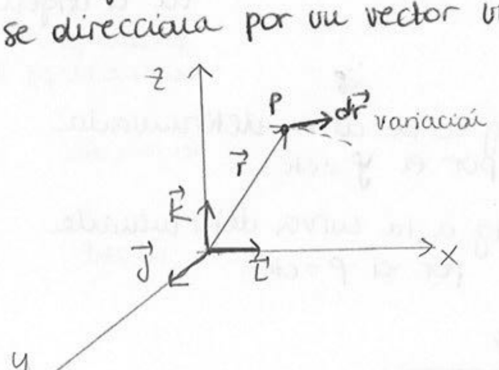
$P = (x_1, y_4, z_8)$

Plano: $O, \vec{i}, \vec{j}$
Espacio: $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Sistema de ejes ortogonales (⊥)
Si además tienen la misma medida, se les denomina ortonormales.

Los vectores del sistema de ejes coordenados son unitarios y forman una base unitaria.

Eje de coordenadas → intersección de dos planos que define una recta, que se direcciona por un vector unitario.

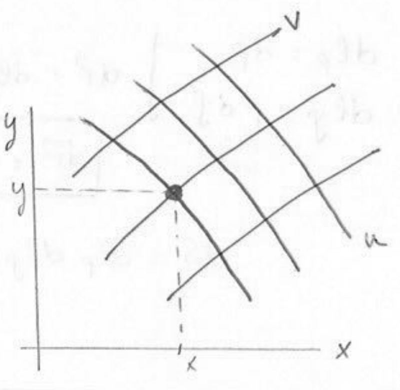


$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$dV = dx\,dy\,dz$ → sólo en cartesianas
Volumen

Un punto se puede presentar en diferentes sistemas de referencia



sistema de coordenadas curvilíneas

$P(x,y)$ $\qquad$ $P(u,v)$

$x = x(u,v)$ $\qquad$ $u = u(x,y)$

$y = y(u,v)$ $\qquad$ $v = v(x,y)$

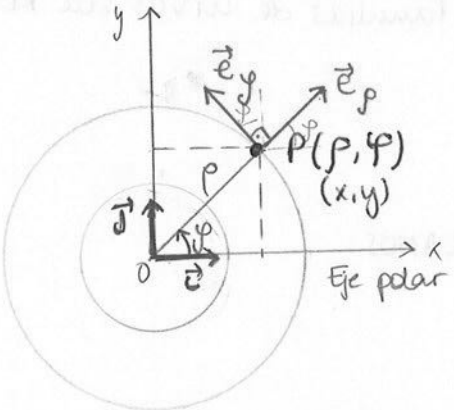
El sistema no degenera: JACOBIANO

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Un sist. degenera cuando por un punto del espacio pasa más de una familia u, v, w. Por un punto sólo debería pasar una de x, otra de y, otra de z (no degenerado).

Si salen puntos en los que $J=0 \rightarrow$ los ptos. están degenerados

PLANO $\rightarrow$ coordenadas polares planas



Nuestras familias van a ser circunferencias de $\rho = cte^{(u)}$ y semirrectas de $\varphi = cte\ (v)$.

$P \left[\begin{array}{l} \rho: \text{radio de la circunferencia por la que pasa} \\ \varphi: \text{ángulo en el que se encuentra} \end{array} \right.$

ρ y $\varphi \rightarrow$ sistema ordenado

$x = x(u,v) \longrightarrow x = \rho \cdot \cos\varphi$ $\qquad$ $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = y(u,v) \longrightarrow y = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi$ $\qquad$ $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\operatorname{sen}^2\varphi = \rho \longrightarrow$$

El sistema sólo degenera en el origen O.

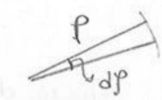
pueden pasar dos semirrectas por él $\rightarrow \varphi$?

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}$

$\vec{e}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

$\vec{e}_\rho$: tg a la curva determinada (semirrecta) por el $\varphi = cte$.

$\vec{e}_\varphi$: tg a la curva determinada (circunf.) por el $\rho = cte$.



$$\left.\begin{array}{l} dl_\rho = d\rho \\ dl_\varphi = \rho\, d\varphi \end{array}\right\} \quad d\vec{r} = dl_\rho \cdot \vec{e}_\rho + dl_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

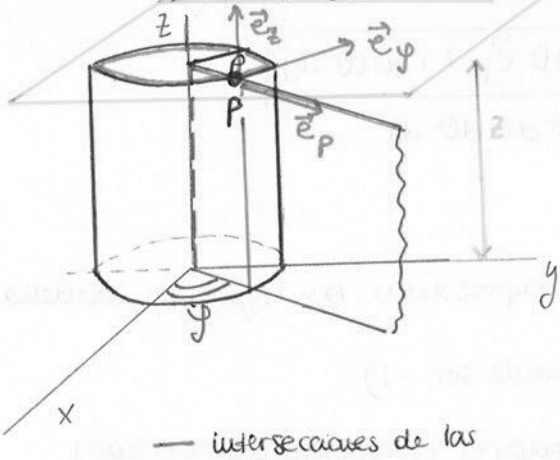
(línea curva)

$$\boxed{d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}$$

$$dS = dl_\rho\, dl_\varphi = \rho \cdot d\rho \cdot d_\varphi$$

ESPACIO → coordenadas cilíndricas

Está formado por 3 familias de superficies: un cilindro de $r = \rho$, un semiplano que forma un ángulo φ con el plano XOY y un plano que me da la coordenada $z = cte$.



— intersecciones de las 3 familias

$P(\rho, \varphi, z)$
$P(x, y, z)$

$$\left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi \\ z = z \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \text{arctg}\,\frac{y}{x} \\ z = z \end{array}$$

(≡ coord. polares) $J = \rho$

- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ → perpendiculares entre sí y donde está P; unitarios

$\vec{e}_\rho$: tg a línea de $\varphi = cte$
$\vec{e}_\varphi$: tg a la circunferencia
$\vec{e}_z$: tg a la generatriz del cilindro

El sistema es degenerado en el eje z

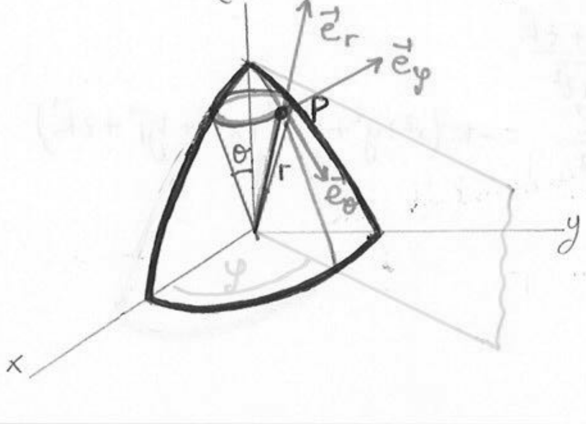
$$\left.\begin{array}{l} dl_\rho = d\rho \\ dl_\varphi = \rho\, d\varphi \\ dl_z = dz \end{array}\right\} \boxed{\vec{dr} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z}$$

$dS_{\rho\varphi} = \rho\, d\rho \cdot d\varphi$
$dS_{\rho z} = d\rho \cdot dz$
$dS_{\varphi z} = \rho\, d\varphi\, dz$

$dV = \rho\, d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$

ESPACIO → coordenadas esféricas

P : 3 familias de superfice | esfera $r = cte$ —
cono $\theta = cte$ —
semiplano $\varphi = cte$



$P(r, \theta, \varphi)$

$\vec{e}_r$: tg a la generatriz del cono
$\vec{e}_\theta$: tg al meridiano
$\vec{e}_\varphi$: tg a la circunferencia

$x = r \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\varphi$ $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$y = r \cdot \cancel{\text{sen}} \cos\theta \cdot \text{sen}\,\varphi$ $\qquad \theta = \text{arctg}\,\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\qquad J = r^2 \cdot \text{sen}\,\theta$

$z = r \cdot \cos\theta$ $\qquad \varphi = \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

$\downarrow$ Sistema degenerado en el origen y en el eje z.

$$\left.\begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\theta &= r\,d\theta \\ dl_\varphi &= r\,\text{sen}\,\theta\, d\varphi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\boxed{d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r\,d\theta\, \vec{e}_\theta + r\,\text{sen}\,\theta\, d\varphi} \\ &dV = r^2\,\text{sen}\,\theta\, dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \end{aligned}$$

<u>Ejercicios</u>.

1. ¿En qué sistema de coordenadas están expresadas las siguientes coordenadas?

$(-1, \pi/3) \rightarrow$ coordenadas cartesianas (ρ no puede ser -1)

$(0, \pi/2) \rightarrow$ coord. cartesianas (el 0 en polares es un pto. degenerado)

$(\pi/2, 0) \rightarrow$ ambas: cartesianas o polares

2. Un punto tiene de coord. cartesianas $(1,1,2)$. Obtener las coordenadas esféricas

Esféricas (r, θ, φ)

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{\ }$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1+1}}{2} = \text{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \text{arctg}\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad} \wedge 45^\circ.$$

3. $P(r, \theta, \varphi) \rightarrow (5, \pi/4, \pi/3)$. Obtener las coord. cartesianas

$$x = r \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \cos\varphi = 5 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$y = r \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\,\varphi = 5 \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

$$z = r \cdot \cos\theta = 5 \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$

4. Expresar en la base de coord. cartesianas el campo de fuerzas que en coord. esféricas viene dado por: $\underbrace{\vec{F}(r)}_{\hookrightarrow \rho} = -kr^2\,\vec{u}_r$ $\Big|$ k: cte. $\vec{u}_r$: v. unitario en la direc. de $\vec{r}$, que representa a $\vec{e}_r$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \rightsquigarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{F}(r) = \vec{F}(x,y,z) = -k\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}} = -k\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$$

Física
25/9/12

5. Expresar en la base de coord. cartesianas que en coord. esféricas viene dado por $\vec{F}(r,\theta) = -kr^2\cos\theta\,\vec{u}_r$ y representa el primer vector de la base de coord. esféricas aplicado en el punto $\overset{(r-0z)}{P}$.

$$z = r\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{z}{r}$$

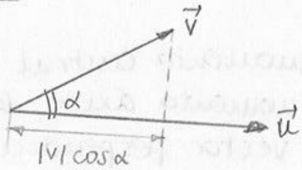
$$\vec{F}(r,\theta) = \vec{F}(x,y,z) = -k\cdot \cancel{r^2}\cdot\frac{z}{\cancel{r}}\cdot\frac{\vec{r}}{\cancel{r}} = -k\cdot z\,(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

3. Operaciones vectoriales

Producto escalar $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$ $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = u\cdot \text{proy}_u\vec{v} = v\cdot\text{proy}_v\vec{u}$

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{u}\parallel\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$



Propiedades:

1. Conmutativo: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. Asociativo respecto al producto por escalares: $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\,\lambda\vec{v}$
3. Distributivo respecto a la suma de vectores: $\vec{w}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v}$
4. Nulidad del producto: $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{0}$ o $\alpha = 90°$
5. Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ no implica $\vec{v}=\vec{w}$, a menos que se verifique $\forall\vec{u}$
6. $-u\cdot v \le \vec{u}\cdot\vec{v} \le u\cdot v$

$$\left.\begin{aligned}\vec{u} &= u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\\ \vec{v} &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\vec{u}\,\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}$$

Aplicaciones:
- obtener el módulo de un vector
- Conocer el ángulo entre dos vectores dados
- Definición de la norma de un vector ($\text{nor}\,\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{u} = u^2$)
  - $\text{nor}(\vec{u}+\vec{v}) = \text{nor}\,\vec{u} + \text{nor}\,\vec{v} + 2(\vec{u}\vec{v})$
  - $\text{nor}(\lambda\vec{u}) = \lambda^2\,\text{nor}\,\vec{u}$

Producto vectorial $\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w}}$

Módulo: $u\,v\,\text{sen}\,\alpha$
Dirección: $\perp$ a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
Sentido: ↻+ ↺−

Propiedades:

1. Anticonmutativo: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
2. Asociativo respecto a escalares: $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v}$
3. Distributivo respecto a la suma de vectores: $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$
4. Nulidad del producto: $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ o $\alpha = 0°$.
5. Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ no implica que $\vec{v} = \vec{w}$, a menos que se verifique para todo vector $\vec{u}$
6. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \end{array}\right\} \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_yv_z - u_zv_y, u_zv_x - u_xu_z, u_xv_y - u_yv_x)$$

Aplicaciones:

- Calcular el momento central de un vector deslizante
- Calcular el momento áxico de un vector deslizante
- Obtener un vector perpendicular a un plano

<u>Producto mixto</u> $\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = |\vec{u} \times \vec{v}| w \cos\alpha = S \cdot h = V$ (volumen del paralelepípedo)

Propiedades:

1. Circularmente conmutativo: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) =$
$= -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$
2. Asociativo respecto al producto por escalares: $\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) =$
$= (\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w})$
3. Distributivo respecto a la suma de vectores: $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$
4. Nulidad del producto mixto: a) $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$ o $\vec{w} = \vec{0}$
b) Dos de ellos con la misma dirección
c) Los tres son ∥ a un mismo plano
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow$ linealmente dependientes

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \\ \vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k} \end{array}\right\} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (u_xv_yw_z, u_yv_zw_x, v_xw_yu_z, -u_zv_yw_x, -u_yv_xw_z, -u_xv_zw_y)$$

Física
25/9/12

Otras operaciones vectoriales

- **Doble producto vectorial**

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{c})}_{\lambda}\cdot\vec{b} - \underbrace{(\vec{b}\cdot\vec{c})}_{\mu}\vec{a} = \lambda\vec{b} - \mu\vec{a}$$

$$\vec{a}=\vec{0},\ \vec{b}=\vec{0}\ \text{o}\ \vec{c}=0$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0} \rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{0} \ \Big|\ \begin{array}{l}\vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\end{array} \quad \lambda=\mu=0$$

- **Producto escalar de dos productos vectoriales**

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{w} = (\vec{a},\vec{b},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{a},\vec{b}) = [(\vec{c}\times\vec{d})\times\vec{a}]\,\vec{b} =$$

$$= [(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{d} - (\vec{d}\cdot\vec{a})\vec{c}]\,\vec{b} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

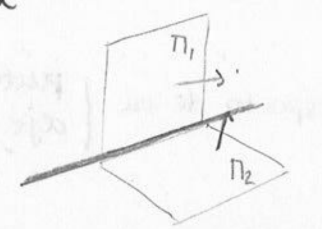
- Norma del producto vectorial

$$\text{nor}(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b}) = \text{nor}\,\vec{a}\cdot\text{nor}\,\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})^2$$

- **Producto vectorial de dos productos vectoriales**

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{w} = (\vec{a}\,\vec{w})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{w})\,\vec{a} = (\vec{w}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{w}\cdot\vec{b})\,\vec{a} =$$

$$= (\vec{c},\vec{d},\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{c},\vec{d},\vec{b})\,\vec{a}$$

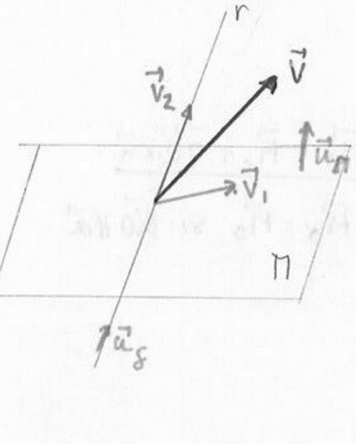


$\vec{a},\vec{b}\in\Pi_1 \quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\Pi_1$

$\vec{c},\vec{d}\in\Pi_2 \quad \vec{c}\times\vec{d}\perp\Pi_2$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UNA RECTA O UN PLANO

$$3D \ \Big|\ \begin{array}{l}2D\ (\text{plano})\\ 1D\ (\text{recta})\end{array}$$



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \Big|\ \begin{array}{l}\vec{v}_1 : \text{proyec}_{\pi/\delta}\,\vec{v}\\ \vec{v}_2 : \text{proyec}_{\delta/\pi}\,\vec{v}\end{array}$$

$$\vec{v}_1,\vec{v}_2\ ? \longrightarrow \vec{v},\vec{u}_\delta,\vec{u}_\pi$$

$\vec{v}_1$ $\quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{u}_\delta\times\vec{v} = \vec{u}_\delta\times\vec{v}_1 + \cancel{\vec{u}_\delta\times\vec{v}_2}^{\,0\,(\parallel)}$

$$(\vec{u}_\delta\times\vec{v})\times\vec{u}_\pi = (\vec{u}_\delta\times\vec{v}_1)\times\vec{u}_\pi = (\vec{u}_\delta\cdot\vec{u}_\pi)\,\vec{v}_1 - \cancel{(\vec{v}_1\cdot\vec{u}_\pi)}^{\,0\,(\perp)}\,\vec{u}_\delta$$

$$\boxed{\vec{v}_1 = \frac{(\vec{u}_\delta\times\vec{v})\times\vec{u}_\pi}{\vec{u}_\delta\cdot\vec{u}_\pi}}$$

$\vec{V_2}$ $\quad \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \longrightarrow \vec{V}\cdot\vec{u}_\pi = \cancel{\vec{V_1}\cdot\vec{u}_\pi} + \vec{V_2}\cdot\vec{u}_\pi = \underbrace{V_2}_{\vec{V_2}}(\vec{u}_\delta\cdot\vec{u}_\pi)$

$$V_2 = \frac{\vec{V}\cdot\vec{u}_\pi}{\vec{u}_\delta\cdot\vec{u}_\pi} \qquad \boxed{\vec{V_2} = \frac{(\vec{V}\cdot\vec{u}_\pi)\,\vec{u}_\delta}{\vec{u}_\delta\cdot\vec{u}_\pi}}$$

Proyecciones ortogonales: $\delta \perp \pi \to \vec{u}_\delta = \vec{u}_\pi = \vec{u}$

$$\vec{V_1} = (\vec{u}\times\vec{V})\times\vec{u} \qquad \vec{V_2} = (\vec{V}\cdot\vec{u})\cdot\vec{u}$$

Ej: Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{c} = \vec{k}$, determinar la proyec. ortogonal del vector $\vec{c}$ sobre el plano que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$\text{proy}_\pi \vec{c} = (\vec{u}\times\vec{c})\times\vec{u}$

$\vec{u} \perp \pi \qquad \vec{u} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$

así es unitario

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k} \qquad \vec{u}\times\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i}-\vec{j})$$

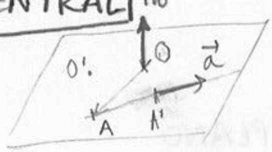
$$(\vec{u}\times\vec{c})\times\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$$

4. Vectores deslizantes

Características

Momento de un vector deslizante respecto de un $\begin{cases} \text{punto} \to \text{central} \\ \text{eje} \to \text{áxico} \end{cases}$

$\boxed{\text{CENTRAL}}$ $\vec{M_0}$



$\vec{M_0} = \vec{OA}\times\vec{a}$

1. El momento es indep. del punto A elegido sobre la recta soporte.

$$\vec{M_0} = \vec{OA'}\times\vec{a} = (\vec{OA}+\vec{AA'})\times\vec{a} = \vec{OA}\times\vec{a} + \underbrace{\vec{AA'}\times\vec{a}}_{0\ (\parallel)}$$

2. Nulidad del momento central

$\vec{M_0} = \vec{0}$ si O pertenece a la recta soporte

3. $\vec{M_{O'}} = \vec{O'A}\times\vec{a} = (\vec{O'O}+\vec{OA})\times\vec{a} = \vec{O'O}\times\vec{a} + \vec{OA}\times\vec{a} \Rightarrow \vec{M_{O'}} = \vec{M_0} + \vec{O'O}\times\vec{a}$

$\vec{M_{O'}} = \vec{M_0}$ si $\vec{O'O} \parallel \vec{a}$

Expresión analítica

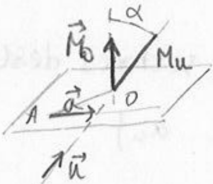
$O(x_0, y_0, z_0)$

$A(x, y, z)$

$\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{ÁXICO}}$ Es un escalar, proyección ortogonal sobre el eje del que estamos calculando el momento central de un vector deslizante respecto a un punto que pertenece al eje.



$$M_u = \vec{M}_o \cdot \vec{u} = (\vec{OA} \times \vec{a}) \cdot \vec{u} = (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})$$

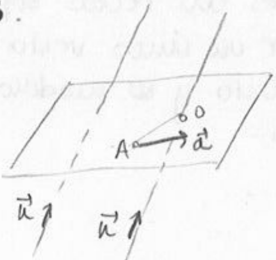
1. Es independient del punto O elegido

$O' \in (\delta)$ eje $\quad M'_u = (\vec{O'A}, \vec{a}, \vec{u}) = (\vec{O'O} + \vec{OA}, \vec{a}, \vec{u}) = \underbrace{(\vec{O'O}, \vec{a}, \vec{u})}_{\substack{0 \\ (\vec{O'O} \parallel \vec{u})}} + \underbrace{(\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})}_{M_u}$

2. Condición de nulidad

$\vec{M}_u = 0$ si $\vec{O'O}$ y $\vec{a}$ en el mismo plano

3.



$$M_u = (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u}) = (\vec{OO'} + \vec{O'A}, \vec{a}, \vec{u}) = (\vec{OO'}, \vec{a}, \vec{u}) + (\vec{O'A}, \vec{a}, \vec{u})$$

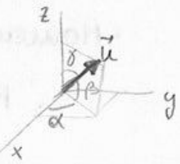
$$\underline{M_u = M'_u + (\vec{OO'}, \vec{a}, \vec{u})}$$

$$M_u = M'_u \quad \text{si} \quad (\vec{OO'}, \vec{a}, \vec{u}) = 0$$

Expresión analítica

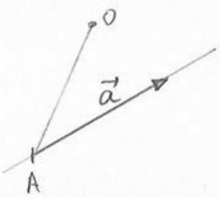
$$M_u = \begin{vmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0) \\ a_x & a_y & a_z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

Un vector unitario está representado por los cosenos directores.

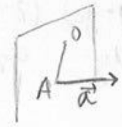


5. Vectores ligados

Virial $\mathcal{V}_0 = \vec{OA} \cdot \vec{a}$



$\mathcal{V}_0 = 0$ si $\vec{OA} \perp \vec{a}$



Expresión analítica: $\mathcal{V}_0 = (x-x_0)\,a_x + (y-y_0)\,a_y + (z-z_0)\,a_z$

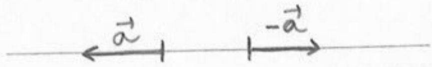
6. Sistemas de vectores deslizantes

$\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$

<u>Equivalencia entre sistemas de vectores deslizantes</u>

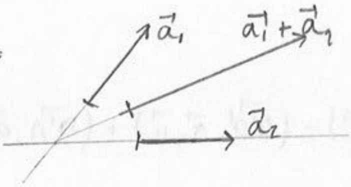
Los sistemas son equivalentes cuando podemos pasar de uno a otro mediante las siguientes operaciones:

1,2.



Suprimir o añadir dos vectores que están sobre la misma recta soporte de igual módulo y sentidos contrarios.

3,4.



Sumar o descomponer dos vectores con rectas soportes que concurren en un punto por un único vector cuya recta soporte pase por dicho punto y su módulo sea la suma de los otros dos vectores.

5,6. Se puede añadir o quitar el vector $\vec{0}$.

- Resultante de la suma de vectores

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

- Momento total del sistema respecto de un punto

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{PA} \times \vec{a}_i$$

- Momento de un sistema respecto a dos puntos cualesquiera

$$\vec{M}_Q = \Sigma\, \vec{QA}_i \times \vec{a}_i$$

$$\vec{M}_Q = \Sigma (\vec{QP} + \vec{PA}_i) \times \vec{a}_i = \Sigma \vec{QP} \times \vec{a}_i + \Sigma \vec{PA}_i \times \vec{a}_i = \vec{QP}\, \Sigma \vec{a}_i + \vec{M}_P$$

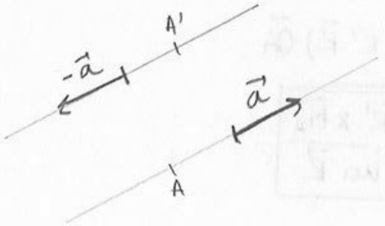
$$\underline{\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{QP} \times \vec{R}}$$

Física
26/9/12

Sistema formado por un par de vectores deslizantes

Vectores con mismo módulo, misma dirección y sentido contrario

$\{\vec{a}, -\vec{a}\}$



$\vec{R} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$\vec{M}_P = \vec{PA} \times \vec{a} + \vec{PA'} \times (-\vec{a}) = (\vec{PA} - \vec{PA'}) \times \vec{a} = (\vec{A'P} + \vec{PA}) \times \vec{a}$

$\downarrow$

$\vec{M}_P = \vec{A'A} \times \vec{a}$

$\vec{M}_Q = \vec{A'A} \times \vec{a}$

El momento de un par de vectores es el mismo para cualquier punto del espacio.

Reducción de un sistema de vectores deslizantes

$S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$

$\underline{P}$ $\{\vec{R}, \vec{M}_P\}$ $\qquad \underset{\text{torsor}}{\mathbb{C}} [\vec{R}, \vec{M}_P]$

$\{\vec{R}, \underbrace{\vec{p}, -\vec{p}}_{\text{con } \vec{M}_P}\}$

$S \begin{cases} P \left[\vec{R}, \vec{M}_P \right] \\ Q \left[\vec{R}, \vec{M}_Q \right] \end{cases} \longrightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R}$

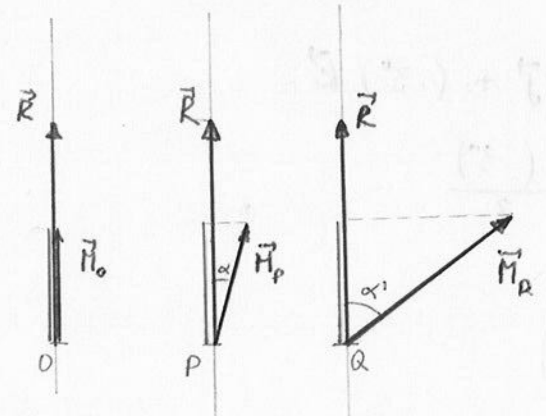
$\left. \begin{array}{l} \mathbb{C}[\vec{R}, \vec{M}_P] \\ \mathbb{C}[\vec{R'}, \vec{M}_Q] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{R'} \\ \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R} \end{array}$

Momento de módulo mínimo

$S \longrightarrow \vec{R}$

$\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \times \vec{R}$ $\left| \begin{array}{l} \vec{R} = 0 \longrightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \\ \vec{R} \neq 0 \longrightarrow \vec{M}_P \cdot \vec{R} = \vec{M}_Q \cdot \vec{R} + \cancel{(\vec{PQ} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}} \end{array} \right.$

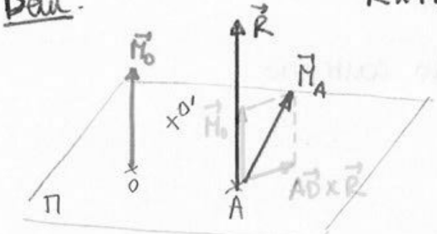
$|\vec{R}| \operatorname{proy}_R M_P = |\vec{R}| \operatorname{proy}_R M_u = \text{cte.}$



$\vec{R} \parallel \vec{M}_o \Rightarrow$ Momento de módulo mínimo

Se obtiene, al menos, en un pto. donde al reducir el sist. la resultante y el momento respecto de ese punto sean vectores paralelos. $\quad \vec{R} \times \vec{M}_o = \vec{0}$

Dem.



$$\vec{R}\times\vec{M}_0 = 0 \quad (\vec{R} \parallel \vec{M}_0)$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_A + \vec{OA}\times\vec{R}$$

$$\vec{M}_0 \times \vec{R} = \vec{M}_A \times \vec{R} + (\vec{OA}\times\vec{R})\times\vec{R}$$

$$\vec{0} = \vec{M}_A\times\vec{R} + \cancel{(\vec{OA}\cdot\vec{R})}\vec{R} - (\vec{R}\cdot\vec{R})\cdot\vec{OA}$$

$$\vec{OA} = \frac{\vec{M}_A\times\vec{R}}{\mathrm{mod}\,\vec{R}} \longrightarrow \boxed{\vec{AO} = \frac{\vec{R}\times\vec{M}_A}{\mathrm{mod}\,\vec{R}}}$$

Vamos a buscar el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo momento sea paralelo a la resultante.

$O' \notin \Pi$

$$\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0 + \vec{O'O}\times\vec{R}$$

$$\vec{M}_{0'}\times\vec{R} = \vec{M}_0\times\vec{R} \quad (\vec{O'O}\times\vec{R})\times\vec{R}$$

$$0 = 0 + (\vec{O'O}\cdot\vec{R})\cdot\vec{R} - (\vec{R}\cdot\vec{R})\cdot\vec{O'O}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda\vec{R} - \mu\vec{O'O} = 0 \\ \mu \neq 0 \end{matrix}\right\} \vec{R} \text{ y } \vec{O'O} \text{ son linealmente dependientes}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{R} \parallel \vec{O'O}$$

Todos los puntos cuyo momento es de módulo mínimo se encuentran en una recta ∥ a la resultante que recibe el nombre de ecuación del eje central:

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$$

$O \in E.C$ (eje central)

$$\left.\begin{matrix} \vec{M}_A\ (L,M,N) \\ \vec{R}\ (X,Y,Z) \end{matrix}\right\} \vec{M}_0 = \vec{M}_A + \vec{OA}\times\vec{R} = (L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_0 = (\ 1^\circ\ )\vec{i} + (\ 2^\circ\ )\vec{j} + (\ 3^\circ\ )\vec{k}$$

$$\frac{(\ 1^\circ\ )}{X} = \frac{(\ 2^\circ\ )}{Y} = \frac{(\ 3^\circ\ )}{Z}$$

Física
2/10/12

Ej ① Dado el siguiente sistema:

$\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ que pasa por $A(1,0,0)$

$\vec{V}_2 = 8\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ $B(0,1,0)$

$\vec{V}_3 = -10\vec{i} + 2\vec{j} - 9\vec{k}$ $C(0,0,1)$

y dos momentos: $\vec{M}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{M}_2 = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

Sistema discreto

$\vec{R} = 0$

↳ Los 7 vectores los hemos reducido hasta un par de vectores

a) Reducir el sistema al origen de coordenadas (encontrar $\vec{R}$ y $\vec{M}_0$)

$$O \left| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0} \rightarrow \text{al ser nulo, el momento da igual en cualquier punto} \\ \vec{M}_0 = \vec{OA} \times \vec{V}_1 + \vec{OB} \times \vec{V}_2 + \vec{OC} \times \vec{V}_3 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{array} \right.$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 2 & -9 \end{vmatrix} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \underline{\underline{7\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k}}}$$

b) ¿Cuál es el torsor equivalente?

$$\mathcal{Z}\left[\vec{R}, \vec{M}_0\right]$$

c) Momento resultante en el punto $P(1,1,1)$

$$\vec{M}_p = \vec{M}_0 + \vec{PO} \times \vec{R} = \vec{M}_0 + \vec{R} \times \vec{OP} = \vec{M}_0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{M}_0 = 7\vec{i} - 16\vec{j} + 2\vec{k}$$

(es equiv para cualq. pto. de esp)

d) Momento de módulo mínimo

M^* → en este caso no existe eje central ($\vec{R} = \vec{0}$) y, por tanto, no se puede hablar del momento de módulo mínimo.

② Dado un sistema cuyos módulos son: $|\vec{a}|=14$, $|\vec{b}|=21$ y $|\vec{c}|=18$ y las rectas soportes pasan por $A(2,0,3)$, $B(1,1,2)$ y $C(2,2,-1)$. Los cosenos directores son proporcionales a $(-2,-3,6)$, $(1,2,2)$ y $(1,-4,-8)$

a) Resultante del sistema

$$\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{u}_a = \underline{-4\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k}}$$

$$\vec{u}_a = \frac{-2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}}{\sqrt{4+9+36}}$$

$$\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\vec{u}_b = 21\cdot\frac{\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \underline{7\vec{i}+14\vec{j}+14\vec{k}}$$

$$\vec{c} = |\vec{c}|\cdot\vec{u}_c = 18\cdot\frac{\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}}{\sqrt{1+16+64}} = \underline{2\vec{i}-8\vec{j}-16\vec{k}}$$

$$\vec{R} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \underline{\underline{5\vec{i}+10\vec{k}}}$$

b) Momento resultante respecto al origen

$$\vec{M}_o = \vec{OA}\times\vec{a} + \vec{OB}\times\vec{b} + \vec{OC}\times\vec{c} = \underline{\underline{-36\vec{i}-6\vec{j}-25\vec{k}}}$$

c) Calcular las invariantes del sistema

- $|\vec{R}| = \sqrt{25+100} = \underline{5\sqrt{5}}$

proyección del momento sobre la resultante $\vec{R}\cdot\vec{M}_o = 5(-36)+0(-6)+10(-25) = \underline{\underline{-430}}$

d) Momento mínimo

$$\vec{M}^*\cdot\vec{R} = \vec{M}_o\cdot\vec{R} \rightarrow |\vec{M}^*||\vec{R}| = \vec{M}_o\cdot\vec{R} \Rightarrow M^* = \frac{\vec{M}_o\cdot\vec{R}}{R} = \frac{-430}{5\sqrt{5}}$$

$$\left(M^* = \vec{M}_o\cdot\vec{u}_R\right)$$

e) Ec. del eje central

$A(x,y,z)\in E.C.$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_o + \vec{R}\times\vec{OA} = -36\vec{i}-6\vec{j}-25\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 10 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$(x-x_0)$

$$\vec{M}_A = (-36-10y)\vec{i} + (-6+10x-5z)\vec{j} + (-25+5y)\vec{k}$$ para un punto cualquiera

$A\in E.C \Rightarrow \vec{M}_A /\!/ \vec{R} \rightarrow \vec{M}_A\times\vec{R} = \vec{0}$ (comps. prop.)

$$\frac{-36-10y}{5} = \frac{-6+10x-5z}{0} = \frac{-25+5y}{10} = \lambda$$ Ec. continua

Tb $r \equiv \Pi_1 \cap \Pi_2$
- $-6+10x-5z=0 \rightarrow 10x-5z=6$
- igualar los otros térm. $y = -\frac{47}{25}$

Física
2/10/12

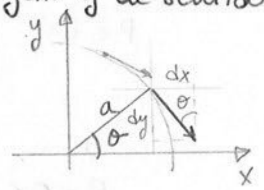
f) Ángulo que forma la resultante con el momento resultante respecto del pto. P (1,1,1)

$\alpha \rightarrow (\vec{M}_P, \vec{R})$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OP} = -46\vec{i} - \vec{j} - 20\vec{k}$$

$$\vec{M}_P \cdot \vec{R} = |\vec{M}_P| \cdot |\vec{R}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{M}_P \cdot \vec{R}}{|\vec{M}_P||\vec{R}|} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{M}_P||\vec{R}|} \Longrightarrow \alpha \simeq 140°$$

(3) En cada punto de un cuadrante de circunferencia de radio a se considera un vector de dirección tg a la circunf. en dicho punto, módulo ydx y de sentido indicado en la figura. Se pide:



a) Resultante del sistema

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} \Longrightarrow \underline{\underline{\vec{R} = \frac{2}{3}a^2\vec{i} - \frac{a^2}{3}\vec{j}}}$$

$$dX = (ydx) \cdot \text{sen}\,\theta = -a^2 \,\text{sen}^3\theta \cdot d\theta$$
$$dY = -(ydx) \cdot \cos\theta = +a^2 \cdot \text{sen}^2\theta \cos\theta \cdot d\theta$$

$$x = a \cdot \cos\theta \rightarrow dx = a \overbrace{(-\text{sen}\,\theta) \cdot d\theta}^{\text{derivada}}$$
$$y = a \cdot \text{sen}\,\theta$$

flechas dibujo

$$X = \int_{\pi/2}^{0} dX = \int_{\pi/2}^{0} -a^2 \,\text{sen}^3\theta \, d\theta = -a^2 \int_{\pi/2}^{0} \text{sen}\,\theta (1 - \cos^2\theta) d\theta = -a^2\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_{\pi/2}^{0} = \frac{2}{3}a^2$$

$$Y = \int_{\pi/2}^{0} dY = a^2 \int \text{sen}^2\theta \cdot \cos\theta d\theta = a^2 \cdot \frac{\text{sen}^3\theta}{3}\Big|_{\pi/2}^{0} = \underline{-\frac{a^2}{3}}$$

b) Momento resultante respecto al origen

$$dM_O = \underset{\text{radio}}{\overset{\vec{r}}{-a}} \cdot \underset{\text{mód.}}{ydx} \;(\vec{OP} \times yd\vec{u}) = a(-a^2 \cdot \text{sen}^2\theta \, d\theta) = +a^3 \cdot \text{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$M_O = \int_{\pi/2}^{0} a^3 \,\text{sen}^2\theta \, d\theta = a^3 \int_{\pi/2}^{2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = a^3 \cdot \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{0} = \underline{-\frac{a^3\pi}{4}} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{M}_O = -\frac{\pi a^3}{4}\vec{k}}}$$

c) Momento mínimo y ec. del eje central

M^* en sistemas coplanarios es nulo $(\vec{M}^* \cdot \vec{R} = \overset{0\,(\perp)}{\vec{M}_O \cdot \vec{R}})$

$$P(x, y, z) \in E.C \rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OP} = -\frac{\pi a^3}{4}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2/3\,a^2 & -\frac{a^2}{3} & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\frac{-a^2/3\, z}{2/3\, a^2} = \frac{-2/3\, a^2 z}{-a^2/3} = \frac{-\pi a^3/4 + \frac{2}{3}a^2 y + \frac{a^2}{3}x}{0}}} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a^2 y + \frac{a^2}{3}x = \frac{\pi a^3}{4} \\ z = 0 \text{ (no se puede resolver el sistema sino)} \end{cases}$$

d) Reducir → se reduce en el eje central $M^* = 0$ → lo mínimo a lo que se puede reducir el sist. es la R

④ Se da al sistema de vectores deslizantes formado por los vectores: $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v}_2 = \vec{i}$, que pasan por rectas soportes $A_1 = (0,3,0)$ y $A_2(1,0,0)$. Determinar el sistema equivalente dado con el menor número de vectores indicando su correspondiente recta soporte.

$$O \left| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{j} \\ \vec{M}_O = \vec{OA}_1 \times \vec{v}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{v}_2 = 3\vec{j} \times (-\vec{i}+\vec{j}) + \vec{i} \times \vec{i} = +3\vec{k} + 0 + 0 = \underline{\underline{3\vec{k}}} \end{array} \right] \vec{R} \perp \vec{M}_O \Downarrow M^* = 0$$

$M^* = 0 \rightarrow$ el sistema se puede reducir a la resultante (un único vector) siempre que el punto pertenezca al eje central.

$$P \in EC \left| \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_P = \vec{M}^* \rightarrow |\vec{M}^*| = 0 \Rightarrow |\vec{M}_P| = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} O \\ P \in EC \end{array} \left| \ \vec{OP} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{\text{nor } \vec{R}} = \frac{\vec{j} \times 3\vec{k}}{1} = 3\vec{i} \right. \rightarrow \vec{OP} \text{ resulta de tomar el punto O como } (0,0,0) \text{ y el punto P como } (3,0,0)$$

(nor $\vec{R} = \vec{R} \cdot \vec{R}$)

$$EC \cdot EC \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$$

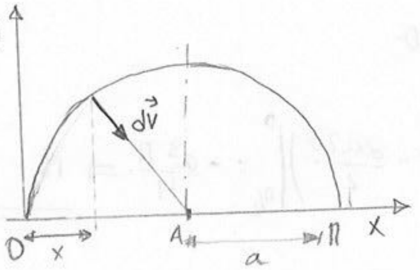
⑤ Un sistema de vectores deslizantes tiene como resultante $\vec{R} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$ y el momento respecto al origen vale $\vec{M}_O = -4\vec{k}$. Determinar el valor de λ para que el eje central pase por el punto A $(4,4,0)$.

$$\vec{R} \perp \vec{M}_O \rightarrow M^* = 0$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OA} = \vec{0} = \vec{M}^* \rightarrow -4\vec{k} + (\lambda\vec{i} + \vec{j}) \times (4\vec{i} + 4\vec{j}) = \vec{0}$$

$$-4\vec{k} + 4\lambda\vec{k} - 4\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}$$

⑥



En cada punto de una semicircunferencia de radio a y en sentido radial, como se indica en la figura, se considera un vector de módulo x dS siendo dS el elemento de arco. Se pide resultante de este sist. continuo de vectores deslizantes, el momento resultante respecto el origen y el momento mínimo y eje central.

$$dS = a \cdot d\theta$$

$$x = a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta)$$

$$\vec{R} = -\frac{a^2}{2}(\pi\vec{i} + \vec{j})$$

Descomponer $d\vec{V}$ $\left\| \begin{array}{l} dX = dV \cdot \cos\theta \\ dY = -dV \cdot \text{sen}\theta \end{array} \right.$

$$\vec{M}_O = -2a^3\vec{k}$$

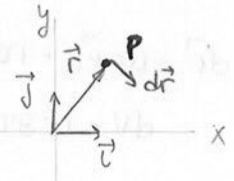
Por A pasan todas las rectas soporte $\rightarrow \vec{M}_A = \vec{0}$ $\vec{M}_O = \cancel{\vec{M}_A} + \vec{OA} \times \vec{R}$

TEMA 2. Vectores y sistemas de vectores (RESUMEN)

- Sistemas de referencias | Punto, origen del sistema $\rightarrow O$
  Base $\rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ n dimensiones

Coordenadas CARTESIANAS

2D

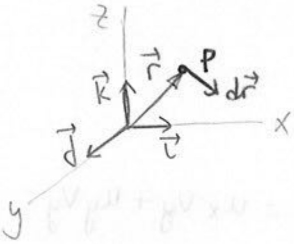


$P(x,y)$ $\quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

$dS = dx \cdot dy$

3D

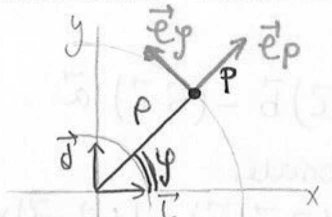


$P(x,y,z)$ $\quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$dV = dx \cdot dy \cdot dz$

Coordenadas POLARES PLANAS (2D)



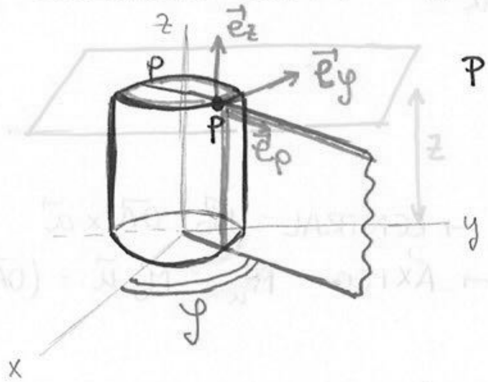
$P(\rho, \varphi)$

$x = \rho \cdot \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} dl_\rho = d\rho \\ dl_\varphi = \rho \cdot d\varphi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \end{array}$$

Coordenadas CILÍNDRICAS (3D)



$P(\rho, \varphi, z)$

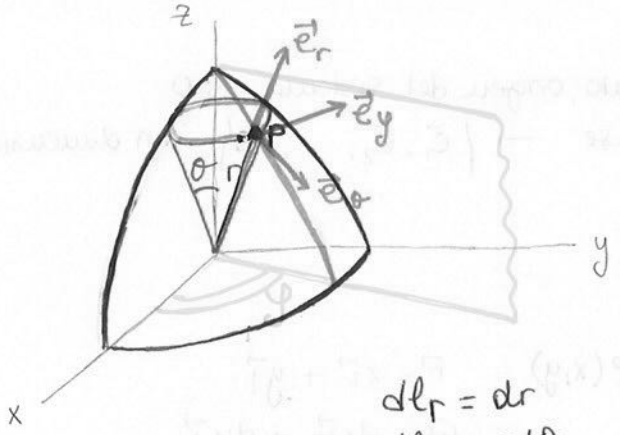
$x = \rho \cdot \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

$z = z \qquad z = z$

$$\left.\begin{array}{l} dl_\rho = d\rho \\ dl_\varphi = \rho \cdot d\varphi \\ dl_z = dz \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z \\ dV = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz \end{array}$$

Coordenadas ESFÉRICAS (3D)



$P(r, \theta, \varphi)$

$x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$y = r \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$z = r \cdot \cos\theta \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$\left.\begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\theta &= r\,d\theta \\ dl_\varphi &= r \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} d\vec{r} &= dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\operatorname{sen}\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ dV &= r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \end{aligned}$$

- Operaciones vectoriales

→ Producto escalar: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cdot\cos\alpha = u_x \cdot v_x + u_y v_y$

→ Producto vectorial: $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w} = (u_y v_z - v_y u_z,\ u_z v_x - v_z \cdot u_x,\ u_x v_y - v_x u_y)$

→ Producto mixto: $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

→ Doble producto vectorial: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$

→ Producto escalar de dos productos vectoriales:

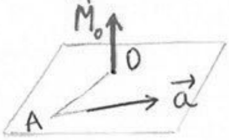
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{w} = (\vec{a},\vec{b},\vec{w}) = (\vec{w},\vec{a},\vec{b}) = [(\vec{c}\times\vec{d})\times\vec{a}]\,\vec{b} =$$
$$= [(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{d} - (\vec{d}\cdot\vec{a})\cdot\vec{c}]\,\vec{b} = (\vec{a}\,\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d}) - (\vec{a}\,\vec{d})(\vec{b}\,\vec{c})$$

→ Producto vectorial de dos productos vectoriales:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{w} = (\vec{a}\cdot\vec{w})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{w})\vec{a} = (\vec{w}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{w}\,\vec{b})\vec{a} =$$
$$= (\vec{c},\vec{d},\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{c},\vec{d},\vec{b})\cdot\vec{a}$$

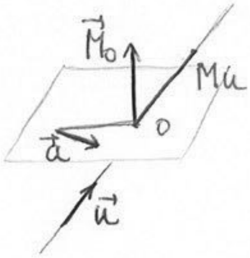
∘ Vectores deslizantes

– Momento CENTRAL (respecto de un PUNTO)



$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{a}$$

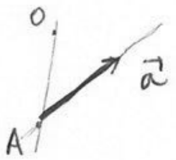
– Momento ÁXICO (respecto de un EJE)



$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = (\vec{OA}, \vec{a}, \vec{u})$$

∘ Vectores ligados

Virial



$$V_O = \vec{OA} \cdot \vec{a}$$

∘ Sistemas de vectores deslizantes

~ Resultante de la suma de vectores: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$

~ Momento total del sistema respecto de un punto: $\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{PA} \times \vec{a}_i$

~ Momento de un sistema respecto de dos puntos: $\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{QP} \times \vec{R}$

~ Momento de módulo mínimo: $\vec{M}^* \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \longrightarrow M^* = \frac{\vec{M}_O \vec{R}}{R}$

Física
3/10/12

T3 - ESTÁTICA DE SISTEMAS

1. Definiciones de punto material, sólido rígido, masa y fuerza

Pto material → ente sin dimensiones pero con masa. Sirve para resolver problemas, pues simplifica mucho los cálculos (no hay que tener en cuenta la rotación del cuerpo).

Sólido rígido → cuerpo en el que la posición relativa de dos puntos permanece constante en el tiempo. Así, las fuerzas que actúan sobre el sistema pueden ser consideradas vectores deslizantes.

Masa → cantidad de materia que tiene un cuerpo; constante

Peso → representa la fuerza con que un campo de gravedad atrae a dicho cuerpo o masa. El concepto de fuerza aparece siempre que haya dos masas cerca.

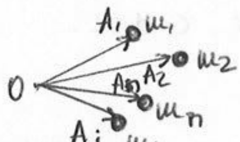
2. Momentos estáticos respecto a puntos

Los momentos estáticos son productos de distancias a puntos, rectas o planos. Los momentos de inercia tienen las distancias al cuadrado.

- Masa puntual

$$\vec{M}_0 = m \cdot \vec{OA}$$

- Distribución discreta de masa



$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{OA_i}$$

- Distribución continua de masa

$$\vec{M}_0 = \int \vec{r}\,dm = \begin{cases} dm = \lambda \cdot dl \Rightarrow \vec{M}_0 = \int \lambda \vec{r}\,dl \\ dm = \sigma\, dS \Rightarrow \vec{M}_0 = \int \sigma \vec{r}\,dS \\ dm = \rho\, dV \Rightarrow \vec{M}_0 = \int \rho \vec{r}\,dV \end{cases}$$

línea; ρ lineal de masa

ρ superficial de masa; integral doble

integral triple

~ Respecto a dos puntos del espacio

- Distribución discreta

$$\vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{O'A_i} \cdot m_i = \sum (\vec{O'O} + \vec{OA_i})\, m_i = \sum \vec{O'O}\, m_i + \sum \vec{OA_i} \cdot m_i$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0 + \vec{O'O}\, M.$$

3. Centro de masas de un sistema. Teoremas de Guldin

Centro de masas → pto. respecto al cual el momento lineal es cero.

$$\vec{M}_C = \vec{O} = \sum \vec{CA_i}\, m_i$$

No tiene por qué tener masas ni coincidir con el centro geométrico

1. Existe $\vec{M}_C = \vec{O} = \vec{M}_O + \vec{CO}\, M \Rightarrow \vec{OC} = \frac{\vec{M}_O}{M}$

2. Unicidad $\exists O' \quad \vec{M}_{O'} = \vec{O}$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O}\, M \rightarrow O = O + \vec{O'O}\, M \quad M \neq O \Rightarrow \vec{O'O} = \vec{O}$$

$C = (x_c, y_c, z_c) \qquad \vec{OC} = (x_c, y_c, z_c) = \frac{\vec{M}_O}{M} \qquad \vec{M}_O = \sum \vec{OA_i}\, m_i$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

$$x_c = \frac{\int x\, dm}{M} \qquad y_c = \frac{\int y\, dm}{M} \qquad z_c = \frac{\int z\, dm}{M} \quad \left| \begin{array}{l} dm = \lambda\, dl \\ dm = \sigma\, dS \\ dm = \kappa\, dV \\ \quad (\rho) \end{array} \right.$$

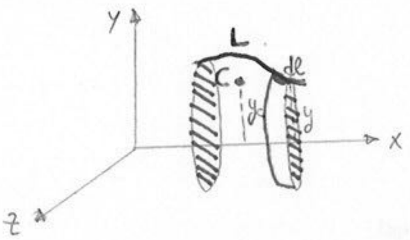
Propiedad del centro de masas

↳ Posibilidad de concentrar toda la masa del sistema en el c.d.m. a efectos de calcular momentos estáticos

$$\vec{M}_C = \vec{O} = \vec{M}_O + \vec{CO}\, M \Rightarrow \vec{M}_O = M \cdot \vec{OC}$$

1 Teoremas de Guldin

Con distribución continua de masa en una línea o superficie, se puede aplicar los teoremas de Guldin para calcular c.d.m.

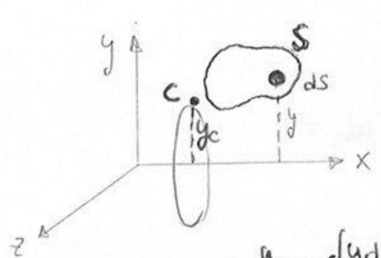


La superficie que engendra dl al girar sobre el eje x → $dS = 2\pi y\, dl$

$$\Downarrow$$

$$S = 2\pi \int y\, dl$$

$$y_c = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int \lambda y\, dl}{\int \lambda\, dl} = \frac{\int y\, dl}{\int dl} = \frac{\int y\, dl}{L} \qquad \boxed{S = 2\pi y_c \cdot L}$$



Al girar la superficie, se forma un volumen

$$dV = 2\pi y\, dS$$

$$\Downarrow$$

$$V = 2\pi \int y\, dS$$

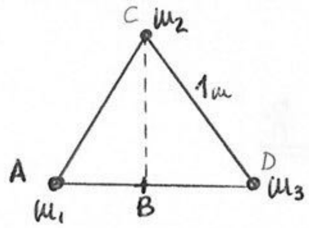
$$y_c = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\iint \sigma y\, dS}{\iint \sigma\, dS} = \frac{\iint y\, dS}{\iint dS} = \frac{\iint y\, dS}{S} \qquad \boxed{V = 2\pi y_c \cdot S}$$

Ejercicios

I) Distribuciones en el plano

A) Distribución discreta de masa

1. Tres partículas de masas $m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$ y $m_3 = 3kg$ están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de $l = 1m$. Calcular el c.d.m. respecto del punto A y del B.



$\boxed{A} \rightarrow$ $m_1 = (0,0)$, $m_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $m_3 = (1,0)$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{0 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 1}{1+2+3} = \frac{2}{3} m$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{0 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0}{1+2+3} = \frac{\sqrt{3}}{6} m$$

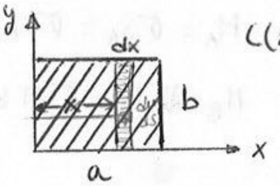
$\boxed{B} \rightarrow$ $m_1 = (-1/2, 0)$, $m_2 = (0, \sqrt{3}/2)$, $m_3 = (1/2, 0)$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{-1/2 + 0 + 3/2}{1+2+3} = \frac{1}{6} m$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{0 + 2\cdot\sqrt{3}/2 + 0}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} m.$$

B) Distribución continua de masa

1.



$C(x_c, y_c)$

$$x_c = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\,\sigma b\,dx = \frac{\sigma b}{M}\int_0^a x\,dx = \frac{1}{M}\sigma b\cdot\frac{a^2}{2}$$

$dm = \sigma dS = \sigma\cdot b\cdot dx$

$M = \sigma S = \sigma ab$

$$\Downarrow$$

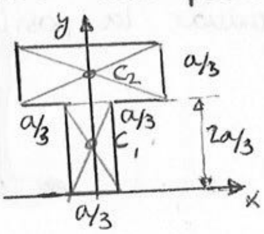
$$x_c = \frac{\sigma b a^2}{2\sigma ab} = \frac{a}{2}$$

$$y_c = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^b y\,\sigma a\,dy = \frac{\sigma a}{M}\int_0^b y\,dy = \frac{\sigma a}{M}\cdot\frac{b^2}{2} = \frac{\sigma a b^2}{2\sigma ab} = \frac{b}{2}$$

$dm = \sigma dS = \sigma a dy$

El c.dm está en el corte de las dos diagonales

2. En secciones planas



$$\left.\begin{array}{l} y_{c_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{3}a \\ y_{c_2} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)a = \frac{5}{6}a \end{array}\right\} \text{Dos puntos materiales}$$

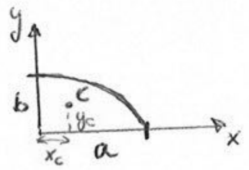
$$y_c = \frac{m_1 y_{c_1} + m_2 y_{c_2}}{m_1 + m_2} = \frac{\cancel{\sigma} S_1 \cdot y_{c_1} + \cancel{\sigma} S_2 y_{c_2}}{\cancel{\sigma} S_1 + \cancel{\sigma} S_2}$$

$S_1 = \frac{1}{3}a\cdot\frac{2}{3}a$

$S_2 = a\cdot\frac{1}{3}a$

$$y_c = \frac{\frac{2}{9}\cancel{a^2}\cdot\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}\cancel{a^2}\cdot\frac{5}{6}a}{\frac{2}{9}\cancel{a^2} + \frac{1}{3}\cancel{a^2}} = \frac{\frac{19}{54}a}{\frac{5}{9}} = \frac{19}{30}a$$

C) Teorema de Guldin



x_c : Gira en torno al eje Y → superficie engendra un volumen, que será la mitad de un elipsoide bda ngby

$$V = 2\Pi \cdot x_c \cdot S \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\Pi a^2 b\right) = 2\Pi \cdot x_c \cdot \frac{1}{4}(\Pi ab)$$

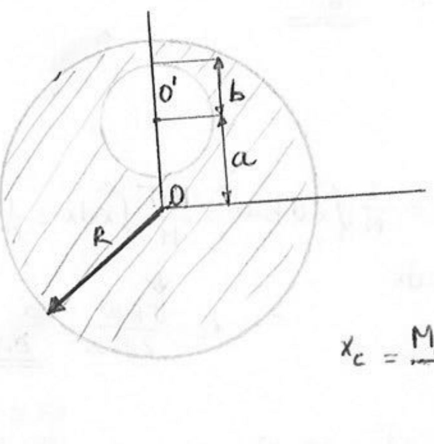
$$\Downarrow$$

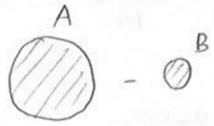
$$\underline{\underline{x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\Pi}}}$$

y_c : Gira en torno al eje X → $V = 2\Pi y_c \cdot S$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\Pi b^2 a\right) = 2\Pi \cdot y_c \cdot \frac{1}{4}(\Pi \cdot ba) \Rightarrow \underline{\underline{y_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\Pi}}}$$

Cuerpo de espesor despreciable, de centro O, radio R y densidad superficial σ, de masa constante





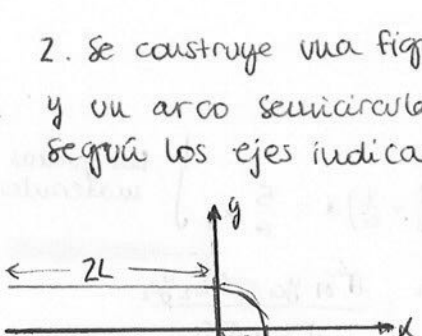
$$A\,(x_c', y_c') \rightarrow (0,0) \qquad M_A = \sigma S_A = \sigma \Pi R^2$$

$$B\,(x_c'', y_c'') \rightarrow (0, a) \qquad M_B = \sigma S_B = \sigma \Pi b^2$$

$$x_c = \frac{M_A x_c' - M_B x_c''}{\underset{\text{taladro}}{M_A - M_B}} = \frac{0 - 0}{R^2 - b^2} = \underline{\underline{0}}$$

$$y_c = \frac{M_A y_c' - M_B y_c''}{M_A - M_B} = \underline{\underline{\frac{-b^2 a}{R^2 - b^2}}}$$

2. Se construye una figura de alambre homogéneo con dos lados de 2L y un arco semicircular de radio R. Determinar la posición del c.d.m. según los ejes indicados en la figuras



$$C(x_c, y_c) = (x_c, 0)$$

$$x_c \begin{cases} x_{2L} \rightarrow -L \\ x_{2L} \rightarrow -L \\ x_R \rightarrow \text{Guldin} \end{cases}$$

Superficie de una esfera

$$S = 2\Pi x_R \cdot L \rightarrow 4\Pi R^2 = 2\Pi x_R \cdot \frac{1}{2} 2\Pi R$$

$$x_R = \frac{2}{\Pi} R$$

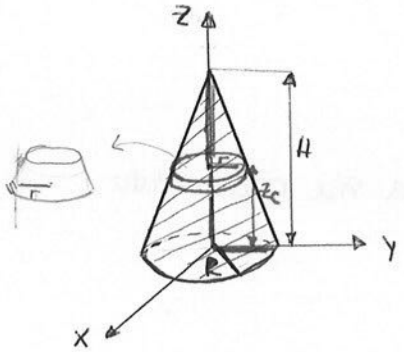
$$x_c = \frac{m_1 \cdot x_{2L} + m_2 \cdot x_{2L} + m_3 \cdot x_R}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{-\cancel{\lambda}2L^2 - \cancel{\lambda}2L^2 + \cancel{\lambda}2\Pi R^2/\Pi}{\cancel{\lambda}2L + \cancel{\lambda}2L + \cancel{\lambda}\Pi R} = \underline{\underline{\frac{-4L^2 + 2R^2}{4L + \Pi R}}}$$

$$m = \lambda L \begin{cases} \lambda 2L \\ \lambda 2L \\ \lambda \frac{1}{2}(2\Pi R) \end{cases}$$

II Distribuciones en el espacio

A) Distribución continua de masa

1. Calcular c.d.m de un cuerpo homogéneo que tiene forma de cono



$$C = (x_c, y_c, z_c) = (0, 0, z_c)$$

$$z_c = \frac{1}{M}\int z\,dm = \frac{1}{M}\int_0^H z \cdot \rho \cdot \pi \frac{R^2}{H^2}(H-z)^2\,dz$$

$$dm = \rho\,dV = \rho\,\pi r^2 dz$$

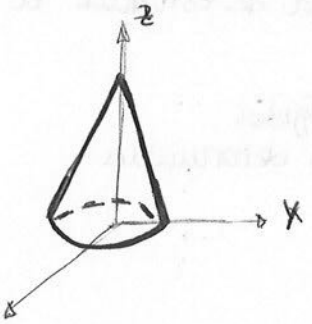
$$\frac{H}{R} = \frac{H-z}{r} \rightarrow r = \frac{R}{H}(H-z)$$

$$z_c = \frac{1}{M}\cdot\rho\pi\cdot\frac{R^2}{H^2}\int_0^H (H^2 z + z^3 - 2Hz^2)\,dz = \frac{1}{M}\rho\pi\frac{R^2}{H^2}\underbrace{\left[\frac{H^2z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \frac{2Hz^3}{3}\right]_0^H}_{H^4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)\ \frac{6+3-8}{12}}$$

$$M = \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho$$

$$\Rightarrow z_c = \frac{\rho\pi}{\frac{1}{3}\pi R^2 H\rho}\cdot\frac{R^2}{H^2}\cdot H^4\cdot\frac{1}{12} = 3\cdot\frac{1}{12}H \Rightarrow \underline{\underline{z_c = \frac{1}{4}H}}$$

2. De una superficie cónica



$$C = (x_c, y_c, z_c) = (0, 0, z_c)$$

$$\cancel{V = 2\pi z_c S \rightarrow z_c = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{2\pi(\pi r^2 + \pi r h)}}$$

Triángulo $\rightarrow z_c = \frac{1}{3}H$

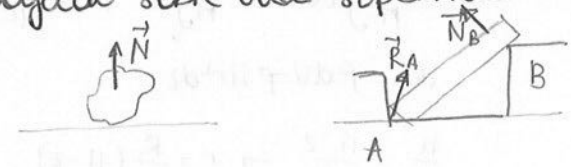
4. Reacciones y esfuerzos interiores

Fuerzas activas → actúan sobre el sistema

Fuerzas pasivas o ligaduras → surgen como resultado de las activas y las restricciones impuestas al sistema.

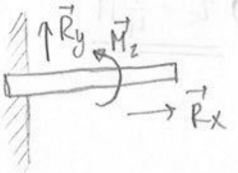
Ej.

1. Cuerpo apoyado sobre una superficie lisa sin rozamiento



2. Cuerpo sujeto por unas cuerdas

3. Cuerpo empotrado en paredes



ESTÁTICA ⟹ Ciencia de la Física que se encarga de estudiar el equilibrio de fuerzas

Fuerzas | Vectores deslizantes → sobre sólidos rígidos
Vectores ligados → sobre sistemas deformables

Equilibrio $(a=0)$ | Estático $(v=0)$
Dinámico $(v=cte)$

1. Estática del punto material $(a=0)$

$$\vec{a}=0 \rightarrow \vec{R}=\sum \vec{F}_i=\vec{0}$$
$$\vec{M}_P=\vec{0} \quad \forall P$$

El torsor (R, M) de las fuerzas que actúan sobre un punto material en equilibrio es nulo.

Casos particulares.

1. E. del pto. material libre $\vec{R}=\sum \vec{F}_i=\vec{0}$
2. E. del pto. material ligado a una superficie $\sum \vec{F}_i+\vec{R}_S=\vec{0}$, $f(x,y,z)=0$
3. E. del pto. material ligado a una curva $\sum \vec{F}_i+\vec{R}_S=\vec{0}$, $\vec{R}\cdot\vec{T}=0$, $F(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$

Física
9/10/12

~ Estática del sólido rígido ($a=0$)

Como $\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{R}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow C$ en reposo

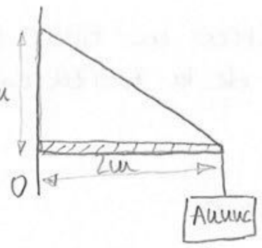
Pero el sólido podría girar $\rightarrow \vec{M}_c = \vec{0}$

Para otro punto: $\vec{M}_p = \vec{M}_c + \vec{PC} \times \vec{R}_{ext} = \vec{0}$

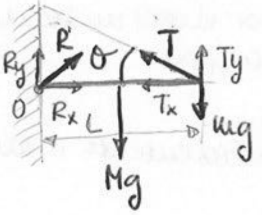
El momento resultante respecto a cualquier punto debe ser cero.

$\vec{a} = \vec{0} \longrightarrow \vec{R}_{ext} = \vec{0}$
$\vec{M}_{p,ext} = \vec{0}$

Ej. Un anuncio de $m = 20$ kg cuelga del extremo de una barra de 2m de longitud y $M = 4$ kg. Un cable sujeta el extremo de la barra a un pto. de la pared que está 1m por encima del punto O. Determinar la tensión del cable y la fuerza ejercida por la pared en el pto. O.



1º.- Establecemos el diagrama de fuerzas



$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ $\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow R_x - T_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_y + T_y - Mg - mg = 0 \end{cases}$

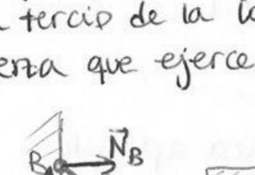
$\sum \vec{M}_0 = \vec{0} \rightarrow -Mg\left(\frac{L}{2}\right) - mgL + T_y \cdot L = 0$

$tg\theta = \frac{T_y}{T_x} = \frac{1}{2}$

4 ecs, 4 incógnitas

$R_x = T_x = 432N$
$T_y = 216N$
$R_y = 19{,}2N$.

Ej. La escalera AB de peso P está apoyada sobre una pared lisa formando un ángulo φ con la horizontal. Un hombre de peso Q se haya en un punto D situado a un tercio de la longitud de la escalera a partir del extremo superior. Hallar la fuerza que ejerce la escalera sobre la pared y sobre el apoyo.



$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$ $\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow N_B - R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \rightarrow R_y - Q - P = 0 \end{cases}$

$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \rightarrow -N_B(L\,sen\varphi) + Q\left(\frac{1}{3}L\cos\varphi\right) + P\left(\frac{L}{2}\cos\varphi\right) = 0$

$tg\varphi = \frac{R_y}{R_x}$

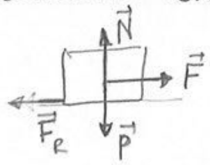
$h_1 = L \cdot sen\varphi$
$h_2 = \frac{2}{3}L \cdot \cos\varphi$
$h_3 = \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi$

Ej. Una partícula está sometida a una fuerza $F = (x+y-3)\vec{i} + (z-x-2)\vec{j} + (z-y-1)\vec{k}$ para una posición genérica (x,y,z). Hallar la posición de equilibrio.

$$\Sigma \vec{F_i} = 0 \begin{cases} x-y-3=0 \\ z-x-2=0 \\ z-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{P(1,2,3)}$$

5. Rozamiento estático. Leyes de Coulomb

El rozamiento estático surge como consecuencia de deslizar un cuerpo



Leyes de Coulomb: leyes experimentales

1. La fuerza de rozamiento máxima es independiente de la superficie en contacto
2. Depende del estado y naturaleza de estas
3. Es proporcional a la componente normal de la interacción mutua entre superficies.

$F_{RE} \in [0, F_{RE_{máx}}]$ → la fuerza de rozamiento estático no tiene un valor determinado, depende de la fuerza aplicada al cuerpo

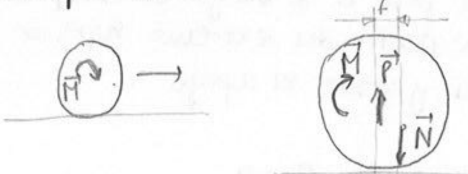
$|F_{RE_{máx}}| = \mu_E |N|$ μ_E: coeficiente de rozamiento estático

Si el cuerpo se desliza → $|F_{RE_{máx}}| = \mu_D \cdot |N|$ μ_D: coeficiente de rozamiento dinámico

$\underline{\mu_E > \mu_D}$

~ Rozamiento a la rodadura (traslación + giro)

Disco que rueda sin deslizar



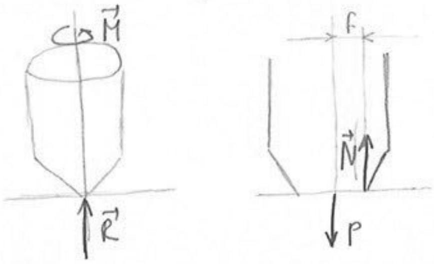
$M \geq N \cdot f$ $[f] = L$

→ el cuerpo está a punto de pararse

$\vec{M}$, momento del par aplicado

$(\vec{P}, \vec{N})$, par que se opone a que la rueda gire

~ Rozamiento al pivotamiento



$M \geq N \cdot f$

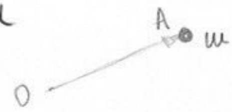
$\vec{M}$, par aplicado

$M < N \cdot f$, condición de equilibrio en rodadura y pivotamiento

TEMA 3. Estática de sistemas (RESUMEN)

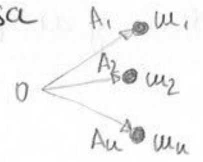
◦ Momentos estáticos

→ Masa puntual



$$\vec{M_O} = \vec{OA} \cdot m$$

→ Distribución discreta de masa



$$\vec{M_O} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{OA_i}$$

→ Distribución continua de masa

$$\vec{M_O} = \int \vec{r}\, dm$$

Lineal: $dm = \lambda\, dl \Rightarrow \vec{M_O} = \lambda \int \vec{r}\, dl$

Superficial: $dm = \sigma\, dS \Rightarrow \vec{M_O} = \sigma \int \vec{r}\, dS$

Volumétrica: $dm = \rho\, dV \Rightarrow \vec{M_O} = \rho \int \vec{r}\, dV$

◦ Centro de masas de un sistema

$$\vec{M_C} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{CA_i} = \vec{0}$$ → cdm: punto respecto al cual el momento lineal es nulo

$C(x_c, y_c, z_c)$

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Distr. discreta

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Distr. continua

$$x_c = \frac{\int x\, dm}{M} \qquad y_c = \frac{\int y\, dm}{M} \qquad z_c = \frac{\int z\, dm}{M}$$

◦ Teoremas de Guldin

Se pueden aplicar para calcular el c.d.m. si hay una distribución CONTINUA de masa en una LÍNEA o SUPERFICIE

$$S = 2\pi x_c L \quad \vee \quad S = 2\pi y_c L$$

$$V = 2\pi x_c S \quad \vee \quad V = 2\pi y_c S$$

- <u>Estática</u> ($\vec{a}=0$)

$$\vec{a}=0 \longrightarrow \begin{array}{l}\vec{R}=\Sigma\vec{F}_i=\vec{0}\\ \vec{M}_P=\vec{0} \quad \forall P\end{array}$$

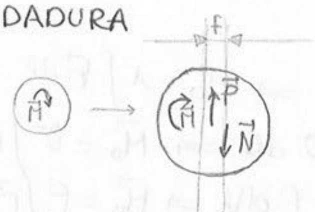
→ Rozamiento estático

$$|F_{RE}|=\mu_E|N| \qquad F_{RE}\in[0, \underset{\mu=1}{F_{RE\,máx}}]$$

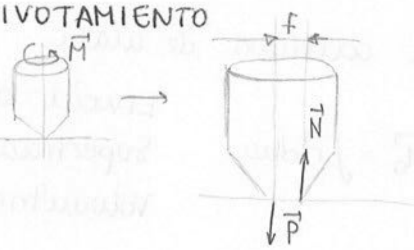
~ Rozamiento a la rodadura y al pivotamiento

$$M \geq N\cdot \underset{\text{distancia}}{f}$$

RODADURA



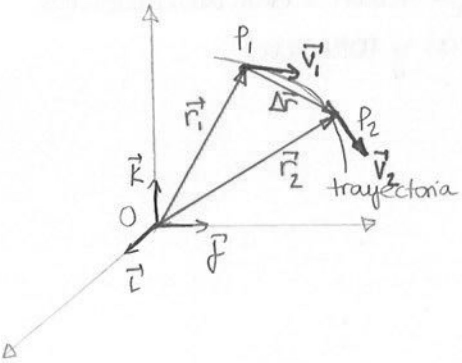
PIVOTAMIENTO



Física
9/10/12

T4-CINEMÁTICA DEL PUNTO

1. Velocidad y aceleración



$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$

Velocidad media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{OP_2} - \vec{OP_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{V_i} = \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

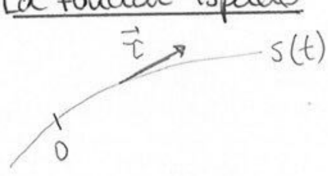
Aceleración media:

$$\vec{a_m} = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{d^2t} = \frac{d^2x}{d^2t}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k}$$

~ La función espacio



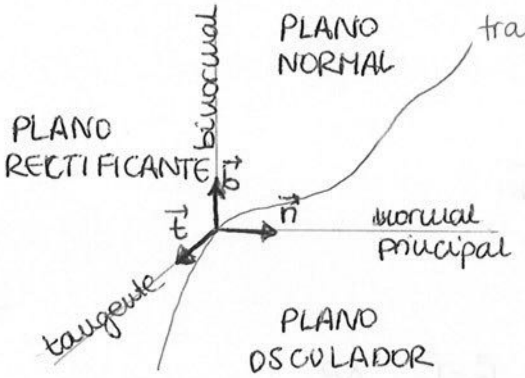
Velocidad como escalar: $v = \vec{v} \cdot \vec{\tau}$ $\left| \begin{array}{l} v<0 \\ v>0 \end{array} \right.$

Velocidad como vector: $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{\tau}$ $\left| \begin{array}{l} |\vec{v}| \neq v \\ |\vec{v}| = |v| \end{array} \right.$ a veces, v puede ser negativo

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt \rightarrow d\vec{r} \cdot \vec{\tau} = \vec{v} \cdot \vec{\tau} \cdot dt \Rightarrow ds = v \cdot dt$$

Escalares $\left| \begin{array}{l} s(t): \text{función espacio, función horaria} \\ v(t): \text{función cinemática} \end{array} \right.$

2. Triedro intrínseco

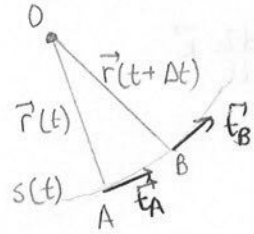


Al ser intrínseco, el triedro va siempre moviéndose con el punto, de forma que tendrá dos movimientos (traslación y rotación)

$$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$$

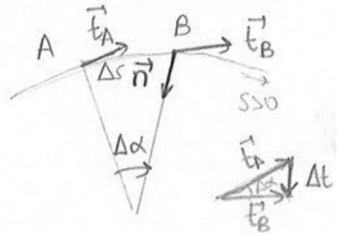
~ Vectores unitarios

- Vector tangente ($\vec{t}$)



$$\boxed{\vec{t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$

- Vector normal ($\vec{n}$)



$$\boxed{\vec{n} = \lim_{\Delta \alpha \to 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta \alpha} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha}}$$

- Vector binormal ($\vec{b}$) $\boxed{\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}}$

Curvatura de flexión $\quad \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$

ρ ↓ radio de curvatura de flexión

Curvatura de torsión $\quad \left| \frac{1}{\tau} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \beta}{\Delta s} \right|$ $\quad$ β ángulo que forman las binormales

~ Derivada de un vector de módulo constante ($\vec{u}$ = cte)

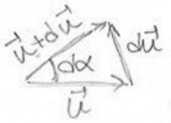
nor $\vec{u}$ = cte $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = cte$

$$\underbrace{2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = 0}_{\text{derivada de } \vec{u}\,\vec{u} = cte} \rightarrow \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{u} \neq 0,\ \vec{u} \text{ perpendicular a } \frac{d\vec{u}}{ds}$$

una variable

~ Derivada de un vector de módulo unidad

$|\vec{u}| = 1$



$$\left|\frac{d\vec{u}}{ds}\right| = \frac{|d\vec{u}|}{ds} = \frac{|\vec{u}|\,d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}$$

El módulo de la derivada es igual a la variación angular del vector respecto de la variable

Fórmulas de Frenet

$\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ Son funciones de la longitud de arco s
Esta referencia varía al pasar de un punto a otro

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta s} = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ \Delta\alpha \to 0}} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n} \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\tau}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{\tau} - \frac{\vec{t}}{\rho}$$

Vector de Darboux

Movimiento de un triedro $\begin{cases} \text{Desplazamiento de su origen} \\ \text{Giro alrededor de un eje que pase por el origen} \end{cases}$

Vector de DARBOUX → representa el giro del triedro intrínseco

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{\rho}\vec{b} + \frac{1}{\tau}\vec{t}$$

No existe giro en torno a la normal principal
Este vector está contenido en el plano rectificante

- Relación vector de Darboux – Fórmulas de Frenet

$$\vec{\Omega} \times \vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds} \qquad \vec{\Omega} \times \vec{n} = \frac{d\vec{n}}{ds} \qquad \vec{\Omega} \times \vec{b} = \frac{d\vec{b}}{ds}$$

Componentes intrínsecas de la velocidad y de la aceleración

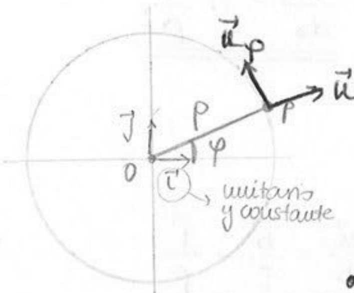
$d\vec{r} = ds\,\vec{t} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\cdot\vec{t} \rightarrow \boxed{\vec{v} = v\cdot\vec{t}}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + v\cdot\frac{d\vec{t}}{dt} = \boxed{\frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \vec{a}} \rightarrow \vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$

$|a| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$

6. Componentes polares de la velocidad y de la aceleración



$\vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \text{sen}\,\varphi\,\vec{j}$

$\vec{u}_\varphi = -\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

$\vec{OP} = \rho\cdot\vec{u}_\rho$

• $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\cdot\vec{u}_\rho + \rho\cdot\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \overset{\text{derivada}}{\dot{\rho}}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\vec{u}}_\rho$

$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\underbrace{(-\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})}_{\text{derivada de } \vec{u}_\rho} = \dot{\varphi}\cdot\vec{u}_\varphi$

(no aparece la derivada de $\vec{i}$ y $\vec{j}$ porque son ctes.)

$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\cdot\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi}$

⇓

Derivar un vector unitario y constante significa obtener un vector también unitario y perpendicular a él pero de sentido arbitrario.

• $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \overbrace{\ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\underbrace{\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}}_{\substack{\dot{\varphi}\cdot\vec{u}_\varphi \\ \text{(hallado para } \vec{v})}}}^{1^{er}\text{ término de } \vec{v}} + \overbrace{\dot{\rho}\cdot\dot{\varphi}\cdot\vec{u}_\varphi + \underbrace{\rho\cdot\ddot{\varphi}\cdot\vec{u}_\varphi + \rho\cdot\dot{\varphi}\boxed{\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}}}_{\rho\cdot\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi)}}^{2^{o}\text{ término}}$

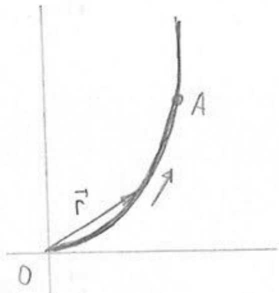
$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\underbrace{(-\cos\varphi\,\vec{i} - \text{sen}\,\varphi\,\vec{j})}_{\vec{u}_\rho} = -\dot{\varphi}\cdot\vec{u}_\rho$

$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\cdot\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\cdot\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi}$

Física
10/10/12

Ej. El eje de una parábola es el OY y la curva pasa por los puntos $O(0,0)$ y $A(R, \frac{3R}{4})$. El vector binormal coincide con el 3^er vector cartesiano. La curva se orienta positivamente según las abscisas crecientes. Hallar en función de x elos vectores tangente y normal, vector arco elem. $(\vec{dl})$ y arco elemental (dl)

$$y = ax^2 \rightarrow \frac{3R}{4} = aR^2 \rightarrow a = \frac{3}{4R} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{4R}x^2}}$$



$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dx} \cdot \frac{dx}{dl} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3x}{2R})^2}}\left(\vec{\imath} + \frac{3x}{2R}\vec{\jmath}\right)}}$$

arco, equivalente al s de las fórmulas

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x\vec{\imath} + \frac{3}{4R}x^2\vec{\jmath} = \vec{r}(x)$$

¿? $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)} = dx\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2R}\right)^2} \longrightarrow \frac{dx}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3x}{2R})^2}}$

¿Cómo se calcula? ¿Por qué así?

$\hookrightarrow$ ¿No sería $\frac{dy}{dx}$?

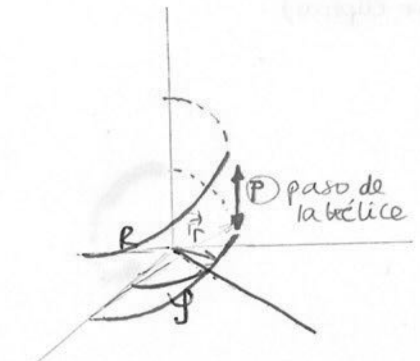
$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \vec{k} \times \vec{t} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3x}{2R})^2}}\left[\vec{\jmath} + \frac{3x}{2R}(-\vec{\imath})\right]}}$$

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\boxed{\underline{\underline{\vec{dl}}} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}} = dx\,\vec{\imath} + \frac{3x}{2R}dx\,\vec{\jmath} = \underline{\left(\vec{\imath} + \frac{3x}{2R}\vec{\jmath}\right)dx}$$

$$\underline{\underline{dl}} = \sqrt{\text{nor}\,\vec{dl}} = \underline{dx\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2R}\right)^2}}$$

Ej. Hélice en coordenadas paramétricas



$$x = R\cos\varphi = R\cdot\cos(\omega t)$$
$$y = R\cdot\operatorname{sen}\varphi = R\cdot\operatorname{sen}(\omega t)$$
$$z = p\cdot\frac{\varphi}{2\pi} = p\cdot\frac{\omega t}{2\pi}$$
$$\varphi = \omega t$$

→ Vectores de posición, velocidad y aceleración

$$\vec{r} = R\cdot\cos(\omega t)\vec{\imath} + R\operatorname{sen}(\omega t)\vec{\jmath} + \frac{p\omega t}{2\pi}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega\operatorname{sen}(\omega t)\vec{\imath} + R\omega\cos(\omega t)\vec{\jmath} + \frac{p\omega}{2\pi}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\cos(\omega t)\vec{\imath} - R\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)\vec{\jmath}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \left| \begin{array}{l} = cte \\ \neq cte \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ si } v = cte \\ a_n \end{array} \right.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

→ Vectores tangente, normal y binormal

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (\vec{t} \text{ unitario})$$

$\vec{n}$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \longrightarrow \vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} \qquad \vec{n} \parallel \frac{d\vec{t}}{ds}$$

(Frenet)

no aparece ρ porque es un escalar y sólo estamos prestando atención al vector

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{|d\vec{t}/ds|} \longrightarrow \rho = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}$$

→ Componentes intrínsecas de la aceleración

$|\vec{a}|, a_n, a_t$

$a_t = 0 \longrightarrow a_n = |\vec{a}|$

$a_t \neq 0 \longrightarrow \left[\begin{array}{ll} a_t = \frac{dv}{dt} & a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} & a_t = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_n^2} \end{array}\right.$

$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$

$\vec{a}\,\vec{t} = a_t \longrightarrow a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

3. Estudio de algunos movimientos

Según la TRAYECTORIA [Rectilíneos / Curvilíneos | Planos (circular, elíptico) / Alabeados

Según la relación "arco recorrido" y "tiempo" [Uniformes / Variados

~ Rectilíneos

Mov. uniforme ($v = cte$) $\longrightarrow ds = v\,dt$

$$s = s_0 + v(t - t_0)$$

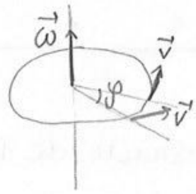
Mov. uniformemente variable ($a = cte$) $\longrightarrow dv = a\,dt$

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$s = s_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Mov. variado → MAS

~ Curvilíneos Circular → la trayectoria descrita es una circunferencia



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

∘ Uniforme $\omega = cte \Rightarrow \alpha = 0$ $\left| \begin{array}{l} a_t = 0 \\ a_n = \omega^2 r \end{array} \right.$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

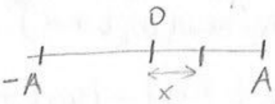
∘ Uniformemente variado

$$\alpha = cte \begin{cases} a_t = \alpha R \\ a_n = \omega^2 R \end{cases}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

~ Movimiento armónico simple



$$x = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

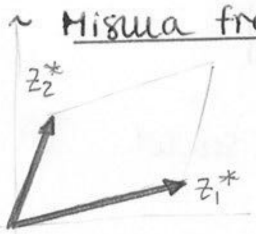
$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot x$$

Relación MAS - circular uniforme: cuando un punto se mueve con mov. circular uniforme, su proyección realiza un MAS.

4. Composición de movimientos

- Barquita (dos movs. rectilíneos uniformes)
- Proyectil (un mov. rectilíneo unif. y otro mov. rectilíneo unif. variado)
- Movimientos armónicos:

~ Misma frecuencia, distinta fase



$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$
$$v = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$$
$$a = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\to y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1)$$
$$\to y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2$$

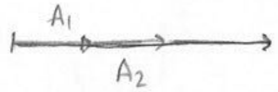
$$\left. \begin{array}{l} z_1^* = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + i A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) \\ z_2^* = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) + i A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2) \end{array} \right\} \text{Números complejos}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta}$$

$$\boxed{\delta = \alpha_1 - \alpha_2}$$

1º.- $\delta = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ Movimiento en fase

$$A = A_1 + A_2$$



2º.- $\delta = \pi \rightarrow$ Mov. oposición de fase

$$A = A_1 - A_2 \quad A_1 > A_2$$
$$A = A_2 - A_1 \quad A_2 > A_1$$
$$\Rightarrow A = |A_1 - A_2|$$

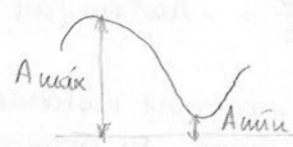
3º.- $\delta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ Mov. en cuadratura

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

~ Misma fase, distinta frecuencia

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha)$$
$$y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha)$$
$$\delta = (\omega_1 t + \alpha) - (\omega_2 t + \alpha) = (\omega_1 - \omega_2)t$$
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t} = A(t)$$

$$A\,máx \longrightarrow A_1 + A_2$$
$$A\,mín \longrightarrow |A_1 - A_2|$$



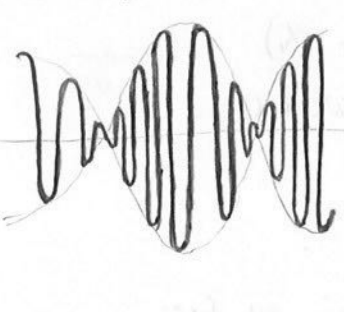
$$\boxed{\omega_1 \simeq \omega_2}$$

A pesar de ser distintas, los valores son muy próximos

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$A_1 = A_2 = A$, $\alpha = 0$ → para facilitar cálculos

$$y = y_1 + y_2 = A\,(\operatorname{sen}\omega_1 t + \operatorname{sen}\omega_2 t)$$
$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$y = 2A\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right]$$
$$y = \left[2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right]\operatorname{sen}\omega t = A(t)\cdot\operatorname{sen}\omega t$$



La amplitud no es constante, sino que está modulada. Los máximos de amplitud se denominan pulsaciones, que se producen cuando las frecuencias son distintas pero próximas.

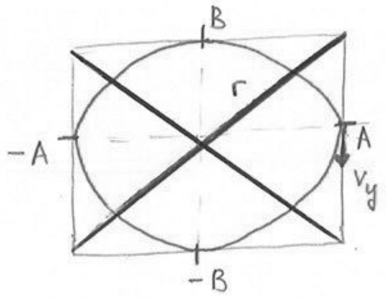
~ Bases perpendiculares

→ Frecuencias iguales

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

desviación, incluye ambas α

$$y = B \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$



a) $\boxed{\delta = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} x = A \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t) \end{array}\right\} \frac{x}{A} = \frac{y}{B} \rightarrow y = \frac{B}{A} x$$

Ec. de una recta con pendiente positiva —

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(\omega t)$$

b) $\boxed{\delta = \pi}$ $\left\{\begin{array}{l} x = A \operatorname{sen} \omega t \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t + \pi) = -B \operatorname{sen}(\omega t) \end{array}\right.$

$$\frac{x}{A} = -\frac{y}{B} \rightarrow y = -\frac{B}{A} x$$ Ec. de una recta con pendiente negativa

El punto se mueve según la otra diagonal —

c) $\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$ $\left\{\begin{array}{l} x = A \operatorname{sen}(\omega t) \\ y = B \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t \end{array}\right.$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \operatorname{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Ec. de una elipse —

Ahora, vamos a ver la dirección que sigue el punto:

$$x = A \qquad \operatorname{sen} \omega t = 1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -B\omega \operatorname{sen} \omega t \xrightarrow[\text{en } A]{\text{Aplicado}} v_{y_A} = -B\omega \Rightarrow \text{Sentido horario}$$

→ Frecuencias distintas FIGURAS DE LISSAJOUS

Ej. Un punto móvil se mueve de manera que $x = 3 \operatorname{sen}(5t)$ e $y = 3 \operatorname{sen}(5t + \pi)$. Determinar la ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.

$$y = 3 \operatorname{sen}(5t + \pi) = -3 \operatorname{sen}(5t)$$

$$y = \frac{-3}{3} x \Longrightarrow \underline{y = -x}$$

TEMA 4: Cinemática del punto (RESUMEN)

Velocidad:

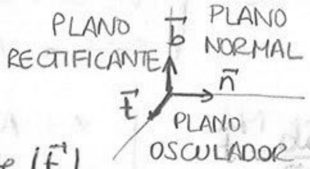
Media $\rightarrow \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ Instantánea $\rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Aceleración:

Media $\rightarrow \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ Instantánea $\rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k}$

Función espacio:

Velocidad $\left|\begin{array}{l} \text{Escalar: } v = \vec{v}\cdot\vec{t} \\ \text{Vector: } \vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{t})\cdot\vec{t} \end{array}\right|$ $ds = v \cdot dt$



- <u>Triedro intrínseco</u>

Vectores unitarios $\left|\begin{array}{l} \text{Tangente } (\vec{t}) \\ \text{Normal } (\vec{n}) \\ \text{Binormal } (\vec{b}) \end{array}\right.$ $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ $\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{d\alpha}$ $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

$\hookrightarrow \vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$; $\vec{n} = \dfrac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}$

Curvaturas: Flexión $\rightarrow \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}\right| = \frac{d\alpha}{ds}$

Torsión $\rightarrow \left|\frac{1}{\tau}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \beta}{\Delta s}\right| = \frac{d\beta}{ds}$ β: ángulo que forman las binormales

Fórmulas de Frenet: $\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{n}\cdot\frac{1}{\rho}$ $\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{\tau} - \frac{\vec{t}}{\rho}$ $\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\tau}$

Vector de Darboux: $\vec{\Omega} = \frac{1}{\rho}\vec{b} + \frac{1}{\tau}\vec{t}$

Relación fórmulas de Frenet - vector de Darboux

$\vec{\Omega} \times \vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds}$ $\vec{\Omega} \times \vec{n} = \frac{d\vec{n}}{ds}$ $\vec{\Omega} \times \vec{b} = \frac{d\vec{b}}{ds}$

Velocidad y aceleración. Componentes

Intrínsecas $\left|\begin{array}{l} \vec{v} = v\cdot\vec{t} \\ \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \end{array}\right.$

Polares $\begin{array}{l} \vec{u}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \\ \vec{r} = \rho\,\vec{u}_\rho \end{array}$ $\left|\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \\ \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\cdot\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\cdot\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi \end{array}\right.$

Hélice en coordenadas paramétricas

$x = R\cos\varphi = R\cos(\omega t)$

$y = R\,\text{sen}\,\varphi = R\,\text{sen}(\omega t)$

$z = p \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = p\,\frac{\omega t}{2\pi}$

paso de hélice

$\vec{r} = R\cos(\omega t)\vec{i} + R\,\text{sen}(\omega t)\vec{j} + p\,\frac{\omega t}{2\pi}\vec{k}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega\,\text{sen}(\omega t)\vec{i} + R\omega\cos(\omega t)\vec{j} + \frac{p\omega}{2\pi}\vec{k}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\cos(\omega t)\vec{i} + R\omega^2\,\text{sen}(\omega t)\vec{j}$

$\hookrightarrow \vec{a} = -R\omega^2\left[\cos(\omega t)\vec{i} + \text{sen}(\omega t)\vec{j}\right]$

- Movimientos

RECTILÍNEOS ($a_n = 0$)

- M.R.U $\rightarrow a_t = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte$ | $ds = v\,dt$; $s = s_0 + v(t - t_0)$
- M.R.U.A $\rightarrow a_t \neq 0$, $a = cte$ | $dv = a\,dt$; $v = v_0 + a(t-t_0)$; $s = s_0 + v(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$
- MR Variado $\rightsquigarrow$ MAS | $x = A\cos(\omega t + \varphi)$; $v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$; $a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

CURVILÍNEOS ($a_n \neq 0$)

- M.C.U $\rightarrow \rho = cte$, $a_t = 0$ $\Rightarrow \omega = cte \rightarrow \alpha = 0$ | $a_t = 0$; $a_n = \omega^2\rho$

  $\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$
- M.C.U.A $\rightarrow \rho = cte$, $a_t \neq 0 = cte$ $\Rightarrow \alpha = cte$ | $a_t = \alpha\rho$; $a_n = \omega^2\rho$ $\quad \omega = \omega_0 + \alpha(t-t_0)$; $\varphi = \varphi_0 + \omega(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$
- MC $\rightsquigarrow$ Proyectil (Tiro parabólico)

  $\hookrightarrow$ Eje X : MRU $\rightarrow X = X_0 + v(t-t_0)$

  Eje Y : MRUA $\rightarrow y = y_0 + v(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

Física
16/10/12

CINEMÁTICA DE LOS SISTEMAS

1. Sistema indeformable

Sistema indeformable → la distancia entre los puntos que lo forman permanece constante en el transcurso del tiempo

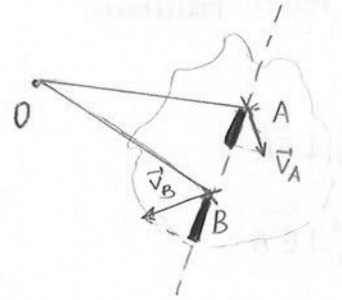
$A, B \quad \frac{d}{dt} \text{ mor } \vec{AB} = 0$

Queda perfectamente definido cuando conocemos tres puntos de él que no estén alineados.

~ Sistema discreto

~ Sistema continuo → SÓLIDO RÍGIDO

2. Teorema de las velocidades proyectadas



O: punto exterior

$$\frac{d}{dt} \text{ mor } \vec{AB} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{AB}\cdot\vec{AB}) = 2\vec{AB}\cdot\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\vec{AB}\cdot\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{AB}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{OB}-\vec{OA}) = 0$$

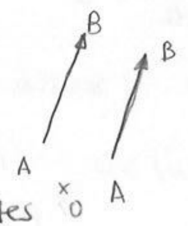
$$\vec{AB}\,\frac{d\vec{OA}}{dt} = \vec{AB}\cdot\frac{d\vec{OB}}{dt} \Longrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{v}_A = \vec{AB}\cdot\vec{v}_B$$

$\cancel{|\vec{AB}|}\ \text{proyec}_{AB}\vec{v}_A = |\vec{AB}|\ \text{proyec}_{AB}\vec{v}_B = cte$ La proyección de la velocidad en la línea que une los puntos es la misma.

3. Movimiento de traslación

Un sistema indeformable tiene un mov. de traslación cuando se verifica que dados dos puntos cualesquiera A, B en un instante la derivada del vector que los une es cero

$A, B \quad \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$



Vectores equipolentes
(∥, mismo módulo, direc. y sentido)

$$\frac{d}{dt}(\vec{OB}-\vec{OA}) = 0 \rightarrow \frac{d\vec{OB}}{dt} = \frac{d\vec{OA}}{dt}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

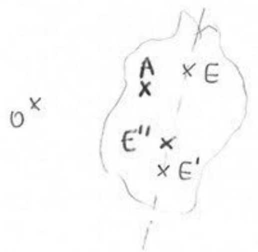
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Un sistema diremos que tiene un movimiento de traslación cuando las trayectorias y las velocidades sean las mismas en un instante determinado.

4. Movimiento de rotación

Un sistema indeformable realiza un mov. de rotación cuando se mantienen fijos dos puntos del sistema.

E, E' fijos $\longrightarrow \vec{V}_E = \vec{V}_{E'} = 0 \quad \forall t$



$$\frac{d\,\vec{OE}}{dt} = \frac{d\,\vec{OE'}}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}(\vec{OE'} - \vec{OE}) = 0 \Rightarrow \frac{d\,\vec{EE'}}{dt} = 0$$

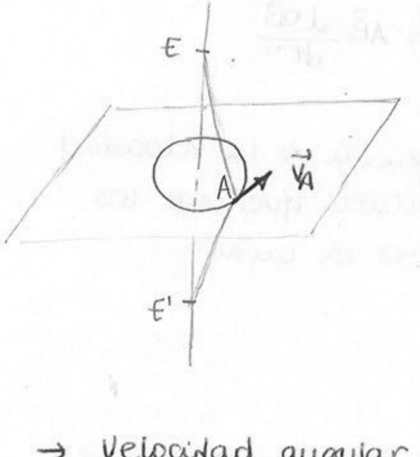
$\underline{\underline{E''}}$ $\quad \vec{EE''} = \lambda \vec{EE'}$

$$\frac{d\,\vec{EE''}}{dt} = \lambda \frac{d\,\vec{EE'}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\,\vec{EE''}}{dt} = 0 \qquad \vec{V}_{E''} = 0$$

Todos los puntos que ~~unen~~ pertenecen a la recta EE'' van a tener también velocidad nula

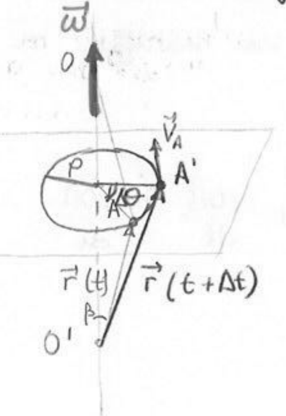
$\underline{\underline{A}}$ $\quad \frac{d}{dt} \operatorname{mod} \vec{EA} = 0 \longrightarrow 2\vec{EA} \cdot \frac{d\vec{EA}}{dt} = 0 \qquad \vec{EA} \cdot \vec{V}_A = 0 \longrightarrow \vec{V}_A \perp \vec{EA}$

$\quad \frac{d}{dt} \operatorname{mod} \vec{E'A} = 0 \longrightarrow 2\vec{E'A} \cdot \frac{d\vec{E'A}}{dt} = 0 \qquad \vec{E'A} \cdot \vec{V}_A = 0 \longrightarrow \vec{V}_A \perp \vec{E'A}$



Todos los puntos que no estén en la recta que une E con E', van a describir una trayectoria circular

→ Velocidad angular



Se define el módulo de velocidad angular como:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Para calcular el sentido: $(\vec{r}(t), \vec{r}(t+\Delta t), \vec{\omega}) > 0$

$$(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}, \vec{\omega}) > 0 \rightarrow (\vec{r}, d\vec{r}, \vec{\omega}) > 0$$

$$(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{\omega}) > 0 \Rightarrow (\vec{r}, \vec{v}, \vec{\omega}) > 0$$

$$(\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}) > 0 \rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} > 0$$

$\vec{\omega} \times \vec{r} \parallel \vec{v}$ y de igual sentido

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$dr = \rho\, d\theta \rightarrow v = \frac{dr}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho\omega$$

$$v = r\omega \operatorname{sen}\beta \rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA}$$

$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB}$ → En un sistema indeformable, todos los puntos tienen la misma velocidad angular.

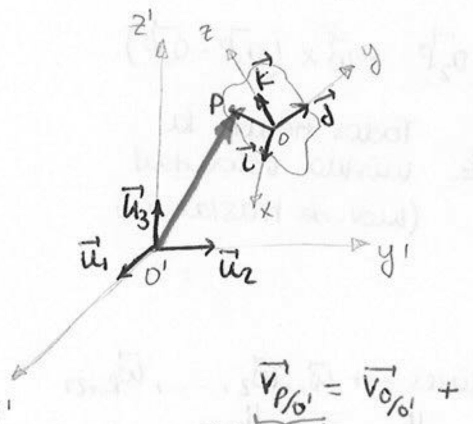
$\vec{v}_A = \vec{AO} \times \vec{\omega} = \vec{M}_A(\vec{\omega})$ $\qquad A\,\underbrace{(\vec{\omega}, \vec{v}_A)}_{\text{GRUPO CINEMÁTICO}}$ en un instante t

→ Aceleración angular ($\vec{\alpha}$)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} \longrightarrow \vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \boxed{\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} \quad — \quad \begin{array}{l} a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ a_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{array}$$

5. Campo de velocidades y aceleraciones en el movimiento general de un sistema



$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad |\vec{OP}| = cte \rightarrow x, y, z = ctes.$$

$$\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$$

$$\frac{d\vec{O'P}}{dt} = \frac{d\vec{O'O}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} \rightarrow \vec{v}_{P/O'} = \vec{v}_{O/O'} + \left(x\underbrace{\frac{d\vec{i}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\vec{i}} + y\overbrace{\frac{d\vec{j}}{dt}}^{\vec{\omega}\times\vec{j}} + z\overbrace{\frac{d\vec{k}}{dt}}^{\vec{\omega}\times\vec{k}}\right)$$

módulo constante

$$\underbrace{\vec{v}_{P/O'}}_{\text{Velocidad respecto de P en un sistema fijo}} = \vec{v}_{O/O'} + \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \underbrace{\vec{v}_{O/O'}}_{\text{Velocidad de TRASLACIÓN del sist. indeformable}} + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

→ Mov. de ROTACIÓN del pto. P en torno a un eje que pasa por O

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}}$$

Un sistema indeformable puede realizar dos movimientos: uno de traslación y otro de rotación

El punto O' que utilicemos puede variar, pues escogiendo otro punto O'' la velocidad absoluta no varía. Además, ω permanece constante.

$$\vec{v_P} = \vec{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{OP} \longrightarrow \vec{a_P} = \frac{d\vec{v_P}}{dt} = \vec{a_o} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{OP}}{dt}$$

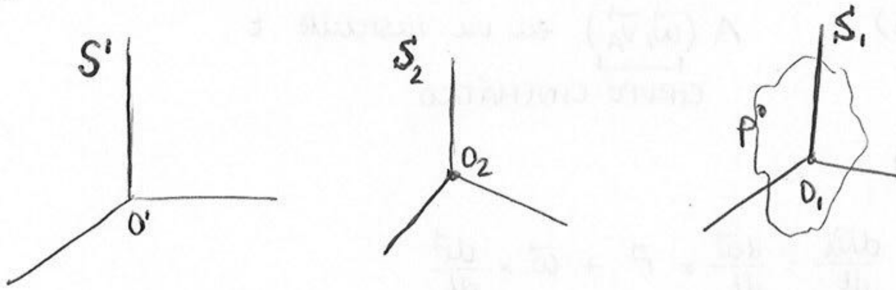
$$\boxed{\vec{a_P} = \vec{a_o} + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{OP}}_{a_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{a_n}}$$

6. Movimiento relativo de un sólido rígido

El movimiento relativo es el movimiento que realiza el sistema S_1 respecto al S_2 $(\vec{v_{o_1}}, \vec{\omega_1})$.

El mov. de arrastre es el que realiza el sistema S_2 con respecto al S' $(\vec{v_{o_2}}, \vec{\omega_2})$

El mov. absoluto es el que realiza el sistema S_1 con respecto a S'



$$\vec{v_P} = \vec{v}_{relat.} + \vec{v}_{arrastre} \longrightarrow \vec{v_P} = \vec{v_{o_1}} + \vec{\omega_1} \times \vec{O_1P} + \vec{v_{o_2}} + \vec{\omega_2} \times \vec{OP_2}$$

$$\boxed{\vec{v_P} = \sum \vec{v_{o_i}} + \sum \vec{\omega_i} \times \vec{O_iP}}$$

→ No hay velocidad de traslación y tenemos un par de vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_{o_1}} = \vec{v_{o_2}} = \vec{0} \\ \vec{\omega_1} = -\vec{\omega_2} = \vec{\omega} \end{array}\right\} \quad \vec{v_P} = \vec{\omega} \times \vec{O_1P} - \vec{\omega} \times \vec{O_2P} = \vec{\omega} \times (\vec{O_1P} - \vec{O_2P})$$

$$\underline{\vec{v_P} = \vec{\omega} \times \vec{O_1O_2}}$$

Todos tienen la misma velocidad (mov. de traslación)

Un par de rotaciones equivale a una traslación

→ T traslaciones → 2T rotaciones
R rotaciones

$$\left.\right\} R+2T \text{ rotaciones} \rightarrow \vec{\omega_1}, \vec{\omega_2}, \dots, \vec{\omega}_{R+2T}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\vec{\Omega} = \sum \vec{\omega_i}} \approx \vec{R}$$

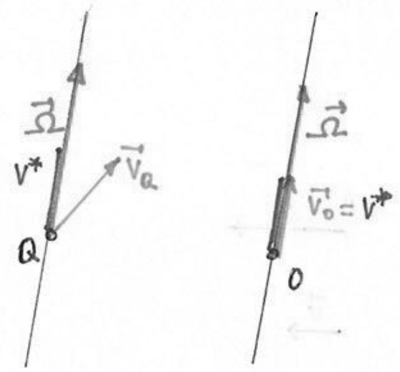
$$\underline{\vec{v_P} = \sum \vec{\omega_i} \times \vec{O_iP}} \approx \vec{M_P}$$

$$\underbrace{\mathbb{C}(\vec{\Omega}, \vec{v_P})}$$

Grupo cinemático del sistema en un instante

Física
17/10/12

Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo (Eje central)



$$\vec{v}_0 = \vec{v}_Q + \vec{OQ} \times \vec{\Omega} = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times \vec{QO}$$

$$O \in E.I.R. \quad \vec{v}_0 \parallel \vec{\Omega} \Longrightarrow \vec{v}_Q + \vec{OQ} \times \vec{\Omega} = \lambda \vec{\Omega}$$

$$(1^\circ)\vec{i} + (2^\circ)\vec{j} + (3^\circ)\vec{k} = \lambda\left(\Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}\right)$$

$$\Downarrow$$

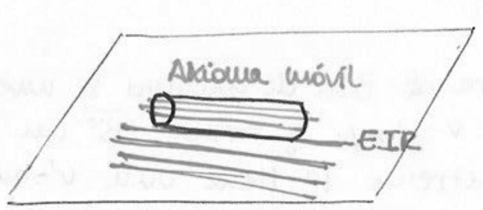
$$\frac{(1^\circ)}{\Omega_x} = \frac{(2^\circ)}{\Omega_y} = \frac{(3^\circ)}{\Omega_z}$$

$$\vec{OP} = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{v}_P}{\text{mor}\,\vec{\Omega}} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \Longrightarrow \frac{x - x_0}{\Omega_x} = \frac{y - y_0}{\Omega_y} = \frac{z - z_0}{\Omega_z}$$

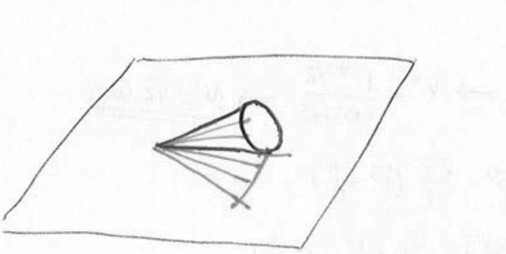
Todo esto es para un instante. Para hallarlo para cualquier instante, hay que ir calculando los distintos EIR, que forman una superficie que recibe el nombre de axoide.

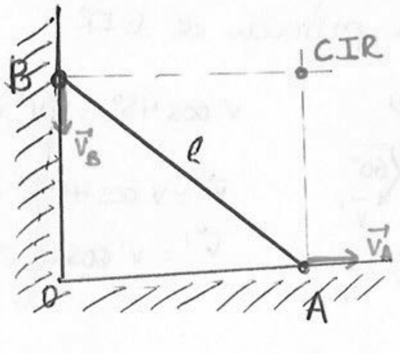
Existen dos tipos de axoides, los fijos y los móviles, que son perpendiculares entre sí y la recta tangente a ambos axoides es el EIR.

El centro instantáneo de rotación es el punto en el que el vector velocidad es perpendicular al plano. Por ello, va cambiando de posición en cada instante describiendo una curva. Si dicha curva la ve un observador móvil se llama ruleta y, si es el observador fijo, se llama base. Estamos en el plano de dos dimensiones.



La velocidad de los punto situados en el EIR es nula, la más pequeña que hay. (En el EIR se encuentra la velocidad de módulo mínimo)



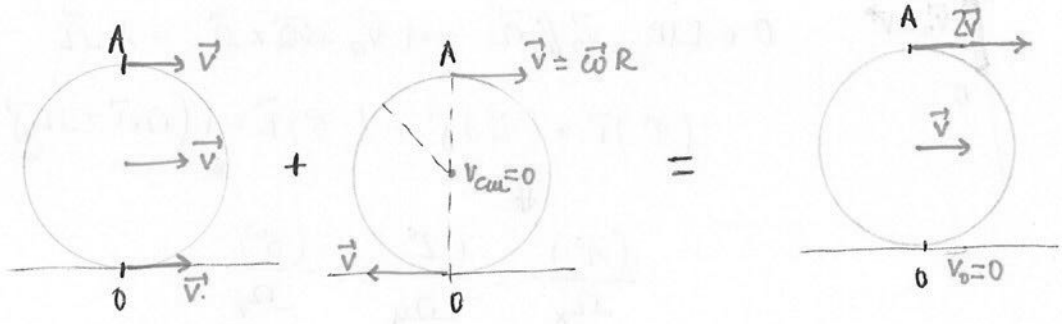


El observador fijo en O vería una circunferencia de radio ℓ.

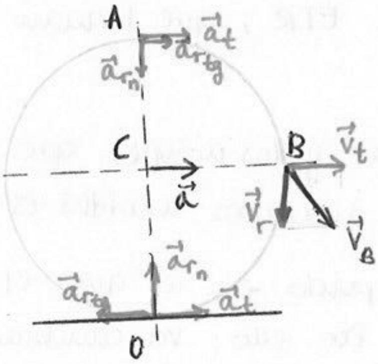
Movimiento de rodadura o rodamiento

Ocurre cuando un cuerpo rueda pero no desliza

RODADURA | Traslación —
| Rotación —



Ej. Una bola de radio R rueda sin deslizar por un plano horizontal de manera que su centro se mueve con aceleración constante a. Al cabo de un cierto tiempo de iniciado el mov. su posición es como indica la figura. Hallar la velocidad de los ptos A y B y la aceleración en los ptos. A y O.



$$v_C = at$$

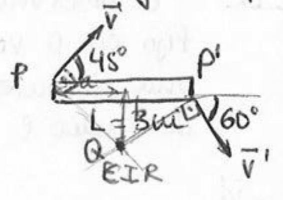
$$\underline{\underline{v_A}} = 2v_C = \underline{2at}$$

$$\underline{\underline{v_B}} = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = \sqrt{(at)^2 + (at)^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\, at}}$$

$$\underline{\underline{a_A}} = \sqrt{\underbrace{a_t^2 + \left(\frac{dv_r}{dt}\right)^2}_{a_{r_{tg}}^2} + \underbrace{\left(\frac{v_r^2}{R}\right)^2}_{a_{r_n}^2}} = \underline{\underline{\sqrt{2a^2 + \left(\frac{a^2t^2}{R}\right)^2}}}$$

$$\underline{\underline{a_0}} = \frac{v_r^2}{R} = \underline{\underline{\frac{a^2t^2}{R}}}$$

Ej. En un instante determinado, una barra de 3 m de longitud se mueve en un plano horizontal. Su extremo P tiene una $v = 1\,m/s$ y forma 45° con la dirección PP'. Sabemos también que su extremo P' tiene una v' que en ese instante forma −60° en la misma dirección. Hallar $v_{P'}$, ω en ese instante y la posición de EIR



$$v \cos 45° = v' \cos(-60°) \rightarrow v' = \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{\cos 60°} \Rightarrow \underline{\underline{v' = \sqrt{2}\, m/s}}$$

$$\vec{v} = v \cos 45°\, \vec{i} + v \sin 45°\, = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{v}\,' = v' \cos 60°\, \vec{i} - v' \sin(60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$$

$v = v_P$; $v' = v_{P'}$

Física
17/10/12

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{PP'} \times \vec{\omega} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\sqrt{3}\vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix}$

$\vec{PP'} = (L,0,0)$

$\vec{\omega} = (0,0,\omega)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + (-L\omega) \rightarrow 3\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$

$\Downarrow$

$\omega = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{6}$ rad/s

$\vec{v}\,' = \cancel{\vec{v}_Q}^{\,0} + \vec{PQ} \times \vec{\omega} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & -b & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = -b\omega\vec{i} - a\omega\vec{j} + 0\vec{k}$

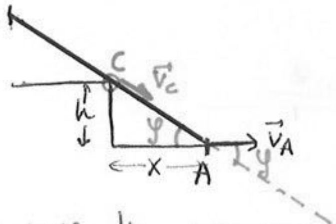
$\vec{v}\,' = \cancel{\vec{v}_Q}^{\,0} + \vec{P'Q} \times \vec{\omega}$

$b = -\frac{\sqrt{2}}{2\omega} = \frac{-\sqrt{2}\cdot 6}{-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{3}{\sqrt{3}+1} = a$

$\vec{PQ} = (a,-b,0)$

$\vec{P'Q} = (-(L-a),-b,0)$

Ej. Una barra de 3m de longitud resbala por el suelo apoyándose en un escalón donde $x=\sqrt{3}$ m y $h = 1$m. El pto. A tiene $V_A = 1$m/s. Calcular $\vec{V_B}$ y $\vec{\omega}$.



$tg\,\varphi = \frac{h}{x} \rightarrow \underline{\varphi = 30°}$

$V_A = 1$m/s $\longrightarrow V_c = V_A \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s

$L = 3$m

$x = \sqrt{3}$m

$h = 1$m

$\downarrow$

$\vec{V_c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 30°\,\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 30°\,\vec{j}$

$\vec{V_A} = \vec{i}$

$\vec{V_c} = \vec{V_A} + \vec{CA} \times \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{\omega} = -\frac{1}{4}\vec{k}$

$\vec{CA} = (x,-h,0)$

$\vec{\omega} = (0,0,\omega)$

$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{BA} \times \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{V_B} = \frac{5}{8}\vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\vec{j}$

$\vec{BA} = (L\cos\varphi, -L\operatorname{sen}\varphi, 0)$

Ej. La velocidad en un pto. A de un sólido rígido es $\vec{V_A} = \vec{i}$ en A (1,0,0)

a) ¿Por qué la velocidad de un pto. B del sólido rígido no puede ser cualquiera? (B=(0,1,0))

Porque tiene que cumplir el teorema de velocidad proyectadas

b) Demostrar que $\vec{v_B} = -\vec{j}$

$\vec{AB}\cdot\vec{V_A} = \vec{AB}\cdot\vec{V_B} \rightarrow (-1,1,0)(1,0,0) = (-1,1,0)(0,-1,0)$

$-1+0+0 = -0-1+0 \checkmark \Longrightarrow \underline{\underline{V_B = -\vec{j}}}$

c) Conocidas $\vec{V_A} = \vec{i}$, $\vec{V_B} = -\vec{j}$ y $\vec{V_C} = \vec{k}$ siendo $C = (1,1,0)$, calcular la expresión del vector velocidad angular.

$\vec{\omega} = (x,y,z) \Longrightarrow \boxed{\vec{\omega} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}$

$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \times \vec{BA} \longrightarrow \vec{i} = -\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \vec{i} = -\vec{j} + z\vec{i} + z\vec{j} - (x+y)\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}: 1 = z \\ \vec{j}: 0 = -1 + z \\ \vec{k}: x + y = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{z = 1} \quad x + y = 0$$

$$\vec{V_A} = \vec{V_C} + \vec{\omega} \times \vec{CA} \longrightarrow \vec{i} = \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \vec{i} = \vec{k} + z\vec{i} + 0\vec{j} - x\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}: z = 1 \checkmark \\ \vec{j}: 0 = 0 \checkmark \\ \vec{k}: 1 - x = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{x = 1} \quad (x + y = 0) \rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$\vec{V_B} = \vec{V_C} + \vec{\omega} \times \vec{CB} \longrightarrow -\vec{j} = \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow -\vec{j} = \vec{k} + 0\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}: 0 = 0 \checkmark \\ \vec{j}: -1 = -z \checkmark \\ \vec{k}: 1 + y = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{y = -1}$$

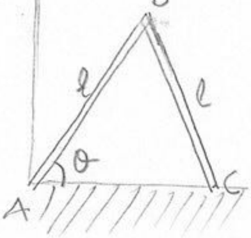
d) Ecuaciones que determinan el EIR

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V_P} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{OP} = (-z-y-2)\vec{i} + (-z+x+2)\vec{j} + (y+x+4)\vec{k} \\ \vec{V_0} = \vec{\omega} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \vec{OB} + \vec{\omega} \times \vec{OC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \end{array}\right\} \quad \frac{-y-z-2}{1} = \frac{x-z+2}{-1} = \frac{x+y+4}{1}$$

e) Expresión vectorial del mínimo deslizamiento

$$\vec{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V_0}}{\mathrm{mod}\,\vec{\omega}} = \frac{-6\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}}{3} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

Ej. Dos barras de 1 m de longitud están unidas en B por una risagra, estando apoyadas en el suelo. El extremo A es un punto fijo. Se deja el sistema en libertad cuando el ángulo θ forma 20° con la horizontal. Si $\omega_{AB} = 0{,}2$ rad/s, determinar la velocidad del extremo C de la barra BC.



$\theta = 20°$

$\omega = 0{,}2$ rad/s

v_C ?

$$AB: \vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ l\cos\theta & l\,\mathrm{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = +\omega l\,\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} - \omega l\cos\theta\,\vec{j}$$

$\vec{\omega} = (0, 0, -\omega)$

$\vec{AB} = (l\cos\theta, l\,\mathrm{sen}\theta, 0)$

$$BC: \vec{V_C} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \times \vec{BC} \longrightarrow \vec{V_C} = (\omega l\,\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} - \omega l\cos\theta\,\vec{j}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ l\cos\theta & -l\,\mathrm{sen}\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$

$\vec{BC} = (l\cos\theta, -l\,\mathrm{sen}\theta, 0)$

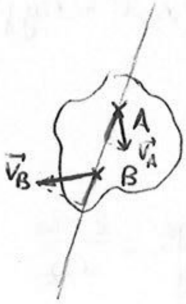
$$\vec{V_C} = (\omega l\,\mathrm{sen}\theta + \omega l\,\mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (-\omega l\cos\theta + \omega l\cos\theta)\vec{j}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{V_C} = 2\omega l\,\mathrm{sen}\theta\,\vec{i}$$

TEMA 5: Cinemática de los sistemas (RESUMEN)

Sistema INDEFORMABLE: la distancia entre los puntos que lo forman permanece constante en el transcurso del tiempo. Queda perfectamente definido con tres puntos no alineados.



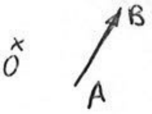
A, B $\quad \frac{d}{dt} \text{ mod } \vec{AB} = 0 \quad \forall t$

$\downarrow$

$\vec{AB} \cdot \vec{v_A} = \vec{AB} \cdot \vec{v_B} \implies \text{Proyec}_{AB} \vec{v_A} = \text{proyec}_{AB} \vec{v_B} = \text{cte}$

La proyección de la velocidad en la línea que une los puntos es la misma (TEOREMA de las VELOCIDADES PROYECTADAS)

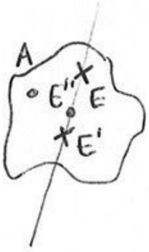
~ Movimiento de TRASLACIÓN



Dados dos puntos A y B cualesquiera en un instante, la derivada del vector que los une es cero.

A, B $\quad \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{OA}}{dt} = \frac{d\vec{OB}}{dt} \implies \vec{v_A} = \vec{v_B} \rightarrow \vec{a_A} = \vec{a_B}$

~ Movimiento de ROTACIÓN



Se mantienen fijos dos puntos del sistema

E, E' fijos $\rightarrow \vec{v_E} = \vec{v_{E'}} = 0 \quad \forall t$

E'': Todos los puntos que pertenecen a la recta EE' van a tener también velocidad nula

A: Todos los puntos que no estén en la recta EE' van a describir una trayectoria circular

$\rightarrow$ Velocidad angular: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\rightarrow$ Aceleración angular: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\qquad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ $\quad a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$, $\; a_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

En el movimiento general de un sistema:

$\vec{v_P} = \vec{v_O} + \vec{\omega} \times \vec{OP}$ $\quad \rightarrow \vec{v}_{traslación} = \vec{v_O}$, $\quad \vec{v}_{rotación} = \vec{\omega} \times \vec{OP}$

$\downarrow$

$\vec{v_P} = \vec{v}_{relativa} + \vec{v}_{arrastre} = \sum \vec{v_{O_i}} + \sum \vec{\omega_i} \times \vec{OP_i}$ $\quad \left| \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \sum \vec{\omega_i} \\ \vec{v_P} = \sum \vec{\omega_i} \times \vec{OP_i} \end{array} \right. \quad \mathcal{T}(\vec{\Omega}, \vec{v_P})$

$\vec{a_P} = \vec{a_O} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo $\rightarrow$ EIR

$$\vec{V_0} = \vec{V_Q} + \vec{OQ} \times \vec{\Omega} \rightarrow \vec{V_0} = \vec{V_Q} + \vec{\Omega} \times \vec{QO}$$

- $O \in EIR \quad \vec{V_0} \parallel \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{V_0} = \vec{V_Q} + \vec{\Omega} \times \vec{QO} = \lambda \vec{\Omega}$

$$(1^o)\vec{i} + (2^o)\vec{j} + (3^o)\vec{k} = \lambda(\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k})$$

$$\frac{1^o}{\Omega_x} = \frac{2^o}{\Omega_y} = \frac{3^o}{\Omega_z}$$

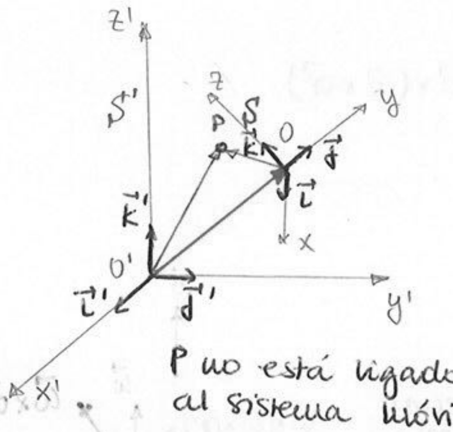
- $\vec{OQ} = \dfrac{\vec{\Omega} \times \vec{V_Q}}{mor\ \vec{\Omega}} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \Rightarrow \dfrac{x - x_0}{\Omega_x} = \dfrac{y - y_0}{\Omega_y} = \dfrac{z - z_0}{\Omega_z}$

Centro instantáneo de rotación $\rightarrow$ CIR

Punto en el que el vector velocidad es perpendicular al plano

T6 - CINEMÁTICA RELATIVA DEL PUNTO

1. Definiciones de movimientos relativos, de arrastre y absolutos - Composición de velocidad de arrastre y absoluta



$$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + k\vec{z}$$

$$\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$$

$$\vec{v}_{P/S'} = \vec{v}_{O/S'} + \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_{O/S'} + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) +$$
$$+ x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + z(\vec{\omega}\times\vec{k})$$

P no está ligado al sistema móvil

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}$$

$$\underbrace{\vec{v}_{P/S'}}_{V_{absoluta}} = \vec{v}_{O/S'} + \underbrace{\vec{v}_{P/S}}_{V_{relativa}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{OP}}_{V_{arrastre}}$$

Movimiento relativo de P → mov. que tiene P respecto al sistema móvil S

Movimiento de arrastre de P → mov. que tiene el sistema móvil S respecto al sistema fijo S'

Movimiento absoluto de P → mov. que tiene P respecto al sist. fijo (S'), que resulta ser la suma de los movimientos relativo y de arrastre.

2. Composición de aceleración: aceleraciones relativa, de arrastre, de Coriolis y absoluta

$$\vec{a}_{P/S'} = \vec{a}_{O/S'} + (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) + \left[\dot{x}(\vec{\omega}\times\vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega}\times\vec{j}) + \dot{z}(\vec{\omega}\times\vec{k})\right] + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{OP} +$$
$$+ \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{a}_{P/S'} = \vec{a}_{O/S'} + \vec{a}_{P/S} + (\vec{\omega}\times\vec{v}_{P/S}) + \vec{\alpha}\times\vec{OP} + \vec{\omega}\times\left[(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + (x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + z(\vec{\omega}\times\vec{k}))\right]$$

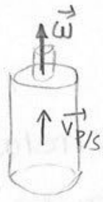
$$\vec{a}_{P/S'} = \vec{a}_{O/S'} + \vec{a}_{P/S} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{P/S} + \vec{\alpha}\times\vec{OP} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{P/S} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OP})$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\vec{a}_{P/S'}}_{a_{abs\,P}} = \underbrace{\vec{a}_{P/S}}_{a_{rel\,P}} + \underbrace{\vec{a}_{O/S'} + \vec{\alpha}\times\vec{OP} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{OP})}_{a_{arrastre}} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{P/S}}_{a_{coriolis}}$$

- <u>Condiciones para la anulación de una o varias componentes de la aceleración</u>

- $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S} = 0 \longrightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{v}_{P/S}$



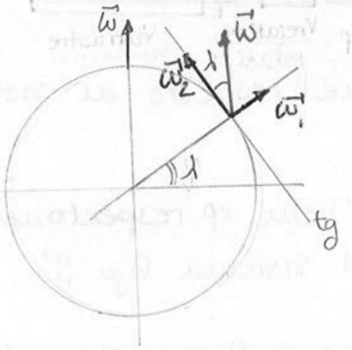
Solo afecta a observadores que se mueven con el sistema móvil

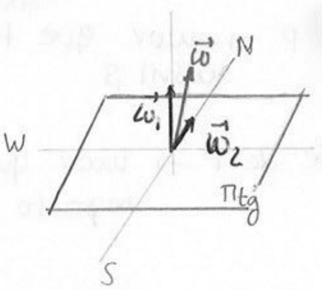
- $\omega = cte \rightarrow \vec{\alpha} \times \vec{OP} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{arrastre} = \vec{a}_{O/S'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$

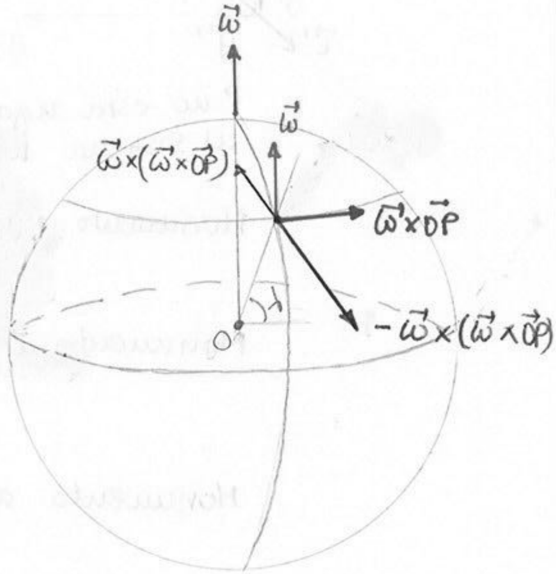
$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

$$\underset{(\text{Tierra})}{|\vec{\omega}|} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7{,}292 \cdot 10^{-5} \ rad/s = cte.$$

$$\vec{a}_{P/S} = \vec{g}_0 \underbrace{- \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{a_{centrífuga}} \underbrace{- 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S}}_{a_{coriolis}}$$

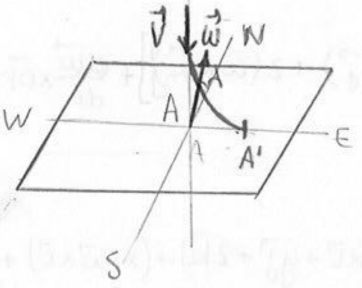






- $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S} \rightarrow$ La aceleración de Coriolis tiene especial interés porque afecta tanto a cuerpos que caen en la tierra como a los que se desplazan.

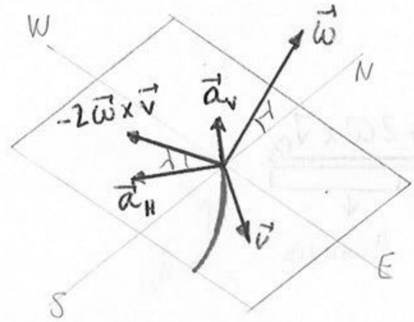
a) CAIDA



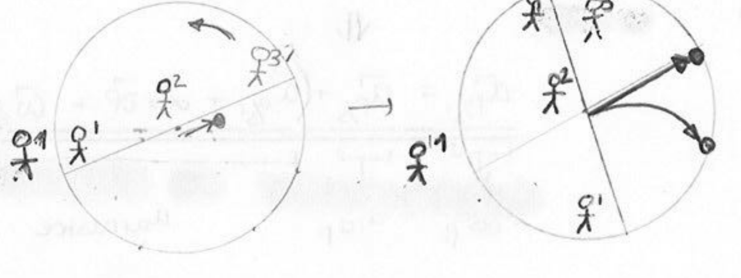
$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & -v \end{vmatrix} = -v\omega_2 \vec{i}$$

$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = +v\omega_2 \vec{i} \Rightarrow$ Afecta a cuerpos que caen en la Tierra

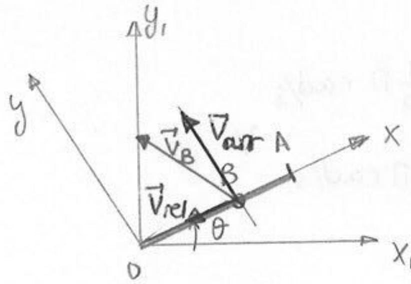
b) DESPLAZAMIENTO



Movimiento giratorio



Ej: Un brazo OA de longitud 1m gira en sentido antihorario alrededor de un brazo perpendicular, estando definido $\theta = 0,15t^2$ siendo θ el ángulo expresado en radianes que forma OA con la horizontal y t expresado en segundos. A lo largo del brazo se mueve un pto. B de tal forma que la distancia $\overrightarrow{OB} = 1 - 0,13t^2$. Calcular la velocidad y la aceleración del pto. B en el instante en el que el ángulo vale 30°.



$\theta = 0,15t^2$ $\qquad \theta = 30° = \pi/6 \text{ rad} \rightarrow \frac{\pi}{6} = 0,15t^2 \Rightarrow \underline{t = 1,868 s}$

$\overrightarrow{OB} = 1 - 0,13t^2$

$\vec{V}_B, \vec{a}_B$?

$$\vec{V}_{rel_B} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = -0,26t\,\vec{i}$$

$$\vec{V}_{arr_B} = \underbrace{\cancel{\vec{V}_0}}_{0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} = 0,3t\,\vec{k} \times (1-0,13t^2)\,\vec{i} = 0,3t(1-0,13t^2)\,\vec{j}$$

solo gira, no se desplaza

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 0,3t \quad \Big| \quad \overrightarrow{OB} = (1-0,13t^2)\,\vec{i}$

$\vec{\omega} = 0,3t\,\vec{k}$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{abs_B} = \vec{V}_{rel_B} + \vec{V}_{arr_B} = -0,26t\,\vec{i} + 0,3t(1-0,13t^2)\,\vec{j} = \underline{-0,486\,\vec{i} + 0,306\,\vec{j} \text{ m/s}}$$

↳ Con respecto al sistema móvil

Para cambiarlo al otro sistema, al fijo:

$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}_1$

$\vec{j} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}_1 + \cos\theta\,\vec{j}_1$

$\vec{k} = \vec{k}_1$

$$\vec{a}_{rel_B} = \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_{rel_B}}{dt} = -0,26\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{arr_B} = \cancel{\vec{a}_0} + \vec{\alpha} \times \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}) = 0,3\vec{k} \times (1-0,13t^2)\,\vec{i} + 0,3t\,\vec{k} \times \big(\underbrace{0,3t\vec{k} \times (1-0,13t^2)\,\vec{i}}_{0,3t(1-0,13t^2)\vec{j}}\big)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0,3\,\vec{k}$$

$$\vec{a}_{arr_B} = 0,3\cdot(1-0,3t^2)\,\vec{j} + 0,3t\cdot 0,3t(1-0,13t^2)(-\vec{i}) \Rightarrow \vec{a}_{arr_B} = 0,3(1-0,13t^2)\,\vec{j} - (0,3t)^2(1-0,13t^2)\,\vec{i}$$

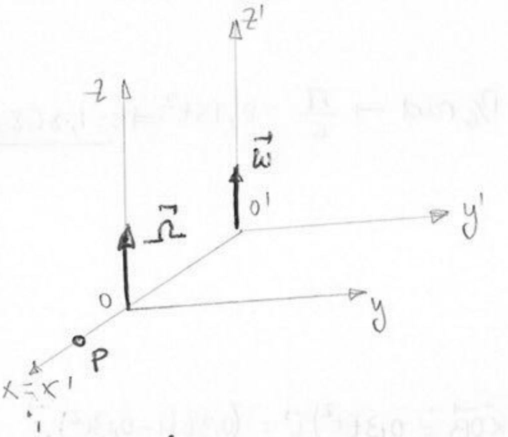
$$\vec{a}_{coriolis_B} = -2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel_B} = -2\cdot 0,3t\,\vec{k} \times (-0,26t\,\vec{i}) = +0,6\cdot 0,26\,\vec{j} = 0,156\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{abs_B} = \vec{a}_{rel_B} + \vec{a}_{arr_B} + \vec{a}_{coriolis_B} = -\left[0,26 + 0,09t^2(1-0,13t^2)\right]\vec{i} + \left[0,3(1-0,13t^2) + 0,156\right]\vec{j}$$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{\vec{a}_B = -0,432\,\vec{i} + 0,32\,\vec{j} \text{ m/s}^2}}$$

Ej: Un helicóptero da vueltas en un plano horizontal alrededor de una torre siguiendo un mov. circular uniforme de 50 m de radio a razón de 6 vueltas por minuto. Las aspas del helicóptero giran también con velocidad cte. de 10 rps siendo la longitud de cada aspa de 1 m. Calcular la velocidad y la aceleración del extremo de un aspa primero para un observador situado en el interior del helicóptero y segundo para otro en la torre.



$$|\vec{O'O}| = 50\,m$$

$$\omega = 6\text{ vueltas/min} = \frac{6\cdot 2\pi}{60} = \frac{1}{5}\pi \text{ rad/s}$$

$$\Omega = 10\text{ rps} = 10\cdot 2\pi = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$|\vec{OP}| = 1\,m$$

$$\vec v_P, \vec a_P\ ?$$

- $\vec v_{rel} = \vec\Omega \times \vec{OP} = |\vec\Omega||\vec{OP}|(\vec k\times\vec\imath) = \underline{20\pi\vec\jmath \text{ m/s}} = \vec v_{P/S}$ observador en el interior

$$\vec v_{arr} = \vec v_0 + \vec\omega\times\vec{OP} = \vec\omega\times\vec{O'O} + \vec\omega\times\vec{OP} = \vec\omega\times\vec{O'P} = |\vec\omega||\vec{O'P}|(\vec k\times\vec\imath) = \frac{51}{5}\pi\vec\jmath \text{ m/s}$$

- $\vec v_{abs} = \vec v_{rel} + \vec v_{arr} = 20\pi\vec\jmath + \frac{51}{5}\pi\vec\jmath = \underline{\frac{151}{5}\pi\vec\jmath \text{ m/s}} = \vec v_{P/S'}$ torre

varía direc. y sentido

- $\vec a_{rel} = \frac{d\vec v_{rel}}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{d\vec\Omega}{dt}}}_{0\ (\vec\Omega = cte)}\cancel{\times\vec{OP}} + \vec\Omega\times\frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec\Omega\times(\underbrace{\vec\Omega\times\vec{OP}}_{\vec k\times\vec\imath}) = |\vec\Omega|^2|\vec{OP}|(-\vec\imath) = \underline{-400\pi^2\vec\imath \text{ m/s}^2 = \vec a_{P/S}}$

$$\vec k \times \vec\jmath \to -\vec\imath$$

- $\vec a_{abs} = \vec a_{rel} + \vec a_{arr} + \vec a_{coriolis} = -\vec\imath\left(400\pi^2 + \frac{51}{25}\pi^2 + 8\pi^2\right) = \underline{-410{,}04\,\pi^2\vec\imath = \vec a_{P/S'}}$

- $\vec a_{arr} = \vec a_0 + \cancel{\vec\alpha\times\vec{OP}} + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{OP}) = -|\vec\omega|^2|\vec{O'O}|\vec\imath - |\vec\omega|^2|\vec{OP}|\vec\imath = \underline{-\frac{51}{25}\pi^2\vec\imath \text{ m/s}^2}$

$$\vec\alpha = \frac{d\vec\omega}{dt} = 0\ (\vec\omega = cte)$$

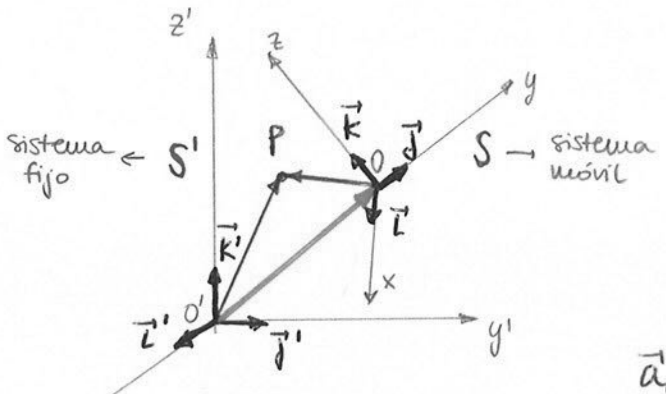
$$\vec a_0 = \frac{d\vec v_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec{O'O}) = \underbrace{\cancel{\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec{O'O}}}_{0\ (\vec\omega = cte)} + \vec\omega\cdot\frac{d\vec{O'O}}{dt} = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec{O'O})$$

$$\vec k \times (\vec k \times \vec\imath) = \vec k\times\vec\jmath \to -\vec\imath$$

$$\vec a_{coriolis} = 2\vec\omega\times\vec v_{rel} = 2\,\vec\omega\times(\vec\Omega\times\vec{OP}) = |\vec\omega||\vec v_{rel}|(-\vec\imath) = \underline{-8\pi^2\vec\imath \text{ m/s}^2}$$

$$\vec k \times \vec\jmath = -\vec\imath$$

TEMA 6: Cinemática relativa del punto (RESUMEN)



P no está ligado al sistema móvil

$$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\underbrace{\vec{v}_{P/S'}}_{\text{Velocidad absoluta}} = \underbrace{\vec{v}_{O/S'}}_{\text{Velocidad relativa}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S} + \vec{\omega} \times \vec{OP}}_{\text{Velocidad de arrastre}}$$

$$\underbrace{\vec{a}_{P/S'}}_{\text{Aceleración absoluta}} = \underbrace{\vec{a}_{P/S}}_{\text{Aceleración relativa}} + \underbrace{\vec{a}_{O/S'} + \vec{\alpha} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})}_{\text{Aceleración de arrastre}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P/S}}_{\text{Aceleración de Coriolis}}$$

Movimiento relativo de P: mov. que tiene P respecto al sistema móvil S

Movimiento de arrastre de P: mov. que tiene el sistema móvil S respecto al sistema fijo S'

Movimiento absoluto de P: mov. que tiene P respecto al sistema fijo S'

T7 - DINÁMICA DEL PUNTO

1. Objetivo de la Dinámica. Leyes de Newton

Dinámica → estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo provocan. Con ello, aparecen los sistemas de referencia

- Dinámica del punto
- Dinámica de sistemas
  - Continuo/discreto
  - Homogéneo/heterogéneo

~ Leyes de Newton

<u>1ª LEY → Principio de inercia</u>

Un cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme si no actúa ninguna fuerza sobre él o si la resultante de todas ellas es nula (sistemas inerciales)

<u>2ª LEY → Ley Fundamental de la Dinámica</u>

Si sobre un punto material o un cuerpo rígido actúa una fuerza resultante $\vec{F}$, este adquiere una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a su masa.

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

$\vec{F} \parallel \vec{a}$, misma dirección y sentido

m: masa inerte, que representa la oposición que opone el cuerpo al movimiento, y que siempre es constante

F: Fuerza motriz, que provoca movimiento

<u>3ª LEY → Principio de acción y reacción</u>

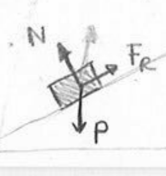
Si un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo, este a su vez ejerce sobre el primero una fuerza (reacción) con el mismo módulo y dirección, pero de sentido contrario. Ambas fuerzas se producen simultáneamente.

~ Ejemplos

- Cuerpo lanzado formando ángulo con la horizontal

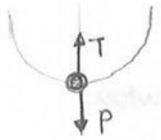
El peso representa la interacción con la Tierra.

- Cuerpo que desliza por un plano inclinado



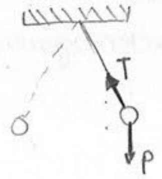
Peso: interacción cuerpo - Tierra
Normal: interacción cuerpo - superficie
Rozamiento

- Cuerpo atado a una cuerda que gira sobre su plano vertical



Peso : interacción cuerpo - Tierra
Tensión : interacción cuerpo - cuerda
Fuerza centrípeta : $F_c = P - T$ (la diferencia entre las anteriores, por eso no es acción - reacción)

- Péndulo simple



$\Longrightarrow$ Cuerpos que interactúan $\rightarrow$ Fuerzas aplicadas
\+
Comportamiento anterior $\rightarrow$ Condiciones iniciales

} Carácter del movimiento
$\Downarrow$
Establecer la relación entre fuerzas aplicadas

2. Componentes intrínsecas de la Dinámica

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \Longrightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a} = F_t \vec{t} + F_n \cdot \vec{n} + F_b \cdot \vec{b} = m\frac{dv}{dt}\vec{t} + m\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

La fuerza que actúa sobre un pto. siempre está situada en el plano osculador

F_t varía en función del módulo de la velocidad

F_n varía en función de la dirección de la velocidad

~ Cantidad de movimiento : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Momento lineal

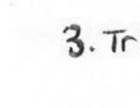
~ Impulso : $d\vec{I} = \vec{F} \cdot dt \rightarrow \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$

~ Momento cinético | angular : $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$L_{eje} = \vec{L}_0 \cdot \vec{u}_{eje} = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{u})$$

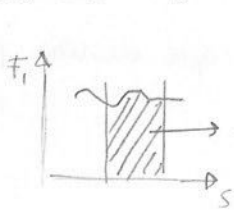
3. Trabajo y potencia

TRABAJO



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos\theta = |\vec{F}|\, dS \cos\theta = F_t \cdot ds$$

$$W_{12} = \int_{1}^{2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$



Física
24/10/12

POTENCIA

Potencia media $\langle P \rangle = \dfrac{W}{t_2 - t_1}$

Potencia instantánea $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Sistema de unidades	Fuerza	Trabajo	Potencia
SI	Newton	Julio	Watio
cgs	Dina	Ergio	Ergio/s
Técnico	Kilopondio	Kilopondímetro	Kpm/s

$1J = 10^7$ erg.
$1kp = 9{,}8 J$
$1kW/h = 3{,}6 \cdot 10^6 J$
$1CV = 736 W$

4. Teoremas Fundamentales de la Dinámica

~ Teorema de la cantidad de movimiento

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

si $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{p} = cte \Rightarrow \vec{p}_{antes} = \vec{p}_{después}$
$(\Delta \vec{p} = 0)$

~ Teorema del impulso

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt = dI \rightarrow \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt \Rightarrow m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt$$

~ Teorema de la proyección de la cantidad de movimiento

• Proyección sobre un eje: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F}\vec{u} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \dfrac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{u})$

$$proy_{\delta} \vec{F} = \frac{d}{dt} proy_{\delta} \vec{p}$$

• Proyección sobre un plano: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow (\vec{u} \times \vec{F}) \times \vec{u} = (\vec{u} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt}) \times \vec{u}$

$$proy_{\Pi} \vec{F} = \frac{d}{dt} proy_{\Pi} \vec{p}$$

Aplicaciones: $\vec{F} \perp \delta \;\; \forall t \Rightarrow proy_{\delta} \vec{p} = cte \Rightarrow proy_{\delta} \vec{v} = cte$

$\vec{F} \perp \Pi \;\; \forall t \Rightarrow proy_{\Pi} \vec{p} = cte \Rightarrow proy_{\Pi} \vec{v} = cte$

~ Teorema del momento cinético

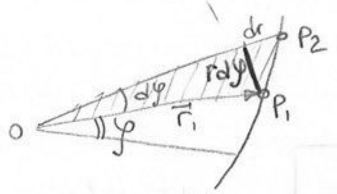
• Momento cinético central: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

Aplicación: Fuerza central $\rightarrow \vec{M}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = cte.$

La trayectoria descrita es plana y L_0 es perpendicular al plano del movimiento $(\vec{r}, \vec{v})$

$\vec{L_0} = \vec{r} \times m\vec{v} = cte \to |r \times \vec{v}| = \frac{|\vec{L_0}|}{m} = \frac{cte}{m} = C$ (cte. de la ley de áreas)



$$dA = \underbrace{\frac{1}{2} r \cdot r\, d\varphi}_{\text{área triángulo}} = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

Velocidad aereolar $\leftarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C_1$

$\vec{OP} = \rho \vec{u}_\rho$

$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{u}_\varphi$

$$\vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\varphi & \vec{u}_z \\ \rho & 0 & 0 \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{u}_z$$

$$\downarrow$$

$$\frac{|\vec{L_0}|}{m} = \rho^2 \cdot \dot{\varphi} = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2C_1 = cte.$$

- Momento axial: $L_u = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{u}) \to \frac{dL_0}{dt} = \cancel{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}, \vec{u}\right)} + \left(\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{u}\right) + \cancel{\left(\vec{r}, \vec{p}, \frac{d\vec{u}}{dt}\right)}$

($\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, 2 vectores $\parallel$) $\vec{u}$ no es variable (eje fijo)

$$\frac{dL_u}{dt} = (\vec{r}, \vec{F}, \vec{u}) = \vec{M_0} \cdot u = M_u$$

Aplicación: Fuerza coplanaria con el eje $(\vec{f}, u)$

$$\frac{dL_0}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{Si } \frac{dL_0}{dt} = 0 \to L_u = \vec{L_0} \cdot \vec{u} = cte \Rightarrow (\vec{r} \times m\vec{v})\, \vec{u} = cte$$

~ Teorema de la energía cinética

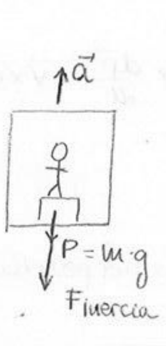
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m \vec{v}\, d\vec{v} = d\Big(\frac{1}{2} m \cdot \underbrace{\text{mor}\, \vec{v}}_{\vec{v} \cdot \vec{v}}\Big)$$

$$\int_A^B dW = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m \cdot \text{mor}\, \vec{v}\right) \to W_{AB} = \frac{1}{2} m \cdot \text{mor}\, v_B - \frac{1}{2} m\, \text{mor}\, v_A \Rightarrow W_{AB} = E_{C_B} - E_{C_A} = \Delta E_C$$

5. Fuerzas de inercia

(el efecto)
Están presentes en sistemas con aceleración, cuando el sistema en el que nos encontremos sea no inercial (el cuerpo pretende seguir en reposo y por eso aparecen).

$\underline{F_{iner} = -m \cdot a}$ solo tiene lugar en sistemas en los que aparece una aceleración.



$R = mg + ma = m(g+a)$ Inicio (El ascensor comienza a subir)

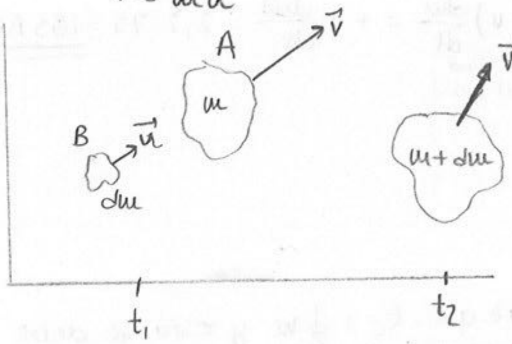
$R = mg - ma = m(g-a)$ Final (El ascensor para en el piso)

6. Sistemas de masa variable

Ejemplos: cohete, gota de agua que se convierte o no en lluvia.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$ (Teorema de la cantidad de movimiento)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



$$\vec{p_2} - \vec{p_1} = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - m\vec{v} - \vec{u}\,dm =$$

$$= \cancel{m\vec{v}} + m\,d\vec{v} + \vec{v}\,dm + \cancel{dm\,d\vec{v}} - \cancel{m\vec{v}} - \vec{u}\,dm$$

$$\downarrow$$

$$\vec{p_2} - \vec{p_1} = m\,d\vec{v} - (\vec{u}-\vec{v})\,dm = m\,d\vec{v} - \vec{v_e}\,dm$$

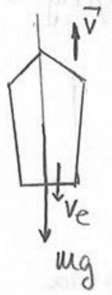
$\vec{v_e}$: velocidad de escape

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\cdot\frac{dm}{dt}$$

$\dot{m}$	v_e	
+	+	B alcanza a A
+	−	Choque frontal
−	+	Disparo hacia delante
−	−	Disparo hacia atrás (cohete)

+ : aumenta
− : disminuye

Ej 1. Tenemos un cohete que despeja verticalmente bajo la acción de la gravedad. Encontrar la velocidad en función del tiempo.



$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$
$$\vec{v} = v\vec{k}$$
$$\vec{v_e} = -v_e\vec{k}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v_e}\cdot\frac{dm}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - v_e\frac{dm}{dt} \rightarrow dv = -g\,dt - v_e\frac{dm}{m}$$

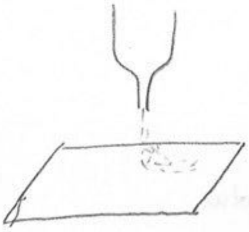
$$v = -gt - v_e\ln m + C \quad \Big|\ t=0 \quad m = m_0,\ v = v_0$$

$$v_0 = -v_e\ln m_0 + C \rightarrow C = v_0 + v_e\ln m_0$$

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 - gt - v_e\ln\left[\frac{m}{m(t)}\right]}}$$

$$-\left(mg + v_e\frac{dm}{dt}\right) > 0 \rightarrow mg + v_e\frac{dm}{dt} < 0 \rightarrow |mg| < \left|v_e\frac{dm}{dt}\right|$$

2. Se va a diseñar un sistema transportador para una cantera de grava. Se tiene una tolva que deja caer grava a razón de 75 kg/s que se mueve con una rapidez de 2,2 m/s. Determinar la fuerza necesaria para mantener en movimiento a la banda. ¿Qué potencia debe tener el motor que impulsa a la banda?



$$\frac{dm}{dt} = 75\,\frac{kg}{s} \qquad v = 2{,}2\,m/s$$

$$F = m\cancel{\frac{dv}{dt}} - (\cancel{u} - v)\frac{dm}{dt} = +v\cdot\frac{dm}{dt} = 2{,}2\cdot 75 = \underline{\underline{165\,N}}.$$

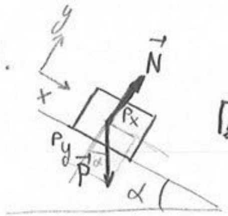
(v = cte) (velocidad inicial nula)

$$P = Fv = v^2\cdot\frac{dm}{dt} = (2{,}2)^2\cdot 75 = \underline{\underline{363\ W}}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{dt}$$ (Teorema E. cinética)

Se ve que $E_c = \frac{1}{2}W$ y esto se debe a que se produce trabajo debido a la fuerza ficticia (inercial)

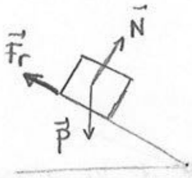
3.



$\boxed{\mu = 0}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha$ (siempre toca al plano)

$\Sigma F_x = ma_x \rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = ma_x \Rightarrow \underline{a = g\,\mathrm{sen}\,\alpha}$ (desliza)



$\boxed{\mu \neq 0}$

$(F_r)_{máx} = \mu_E N$

Si ya se mueve: $F_r = \mu_D N$

$(\mu_E > \mu_D)$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha$

$\Sigma F_x = ma \rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F_r = ma$

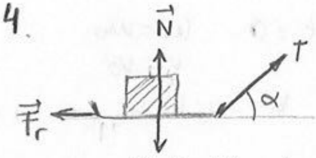
$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu N = ma$

$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{a = g(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha)}} \rightarrow \mu_D$$

4.



Determinar la fuerza de rozamiento para que la plataforma se mueva, y la aceleración del bloque

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + T\,\mathrm{sen}\,\alpha - (M+m)g = 0 \rightarrow \underline{N = (M+m)g - T\,\mathrm{sen}\,\alpha}$

$\Downarrow$

$\underline{F_r = \mu_D \cdot N}$

si $F_r > T\cos\alpha$: No desliza

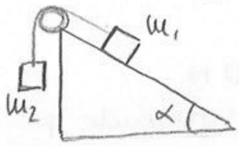
si $F_r < T\cos\alpha$: Sí desliza

$\Sigma F_x = (\underline{M+m})a \rightarrow T\cos\alpha - \mu_D N = (M+m)a$

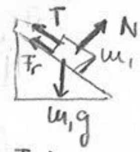
$\Downarrow$

$$\underline{\underline{a = \frac{T\cos\alpha - F_r}{M+m}}}$$

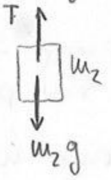
5. Una masa m_1 de 10kg descansa sobre una superficie inclinada 37°. La caja está conectada por una cuerda ligera que pasa por una polea sin masa y sin fricción hacia otra masa m_2 que cuelga ligeramente como se muestra en la figura. Si $\mu_E = 0{,}4$, determine el rango de valores para que m_2 se mantenga en reposo.



a) m_2 pequeña

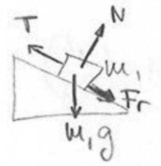


$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - m_1 g \cos\alpha = 0 \Rightarrow N = m_1 g \cos\alpha$$
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow m_1 g \, sen\alpha - T - \mu_E N = 0$$
$$\Downarrow$$
$$T = m_1 g \, sen\alpha - \mu_E m_1 g \cos\alpha$$
$$\downarrow$$
$$T = m_1 g (sen\alpha - \mu_E \cos\alpha)$$



$$T = m_2 g \rightarrow m_2 = \frac{m_1 \cancel{g} (sen\alpha - \mu_E \cos\alpha)}{\cancel{g}} = \underline{2{,}8\,kg}$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\underline{(0 \leq m_2 < 2{,}8)kg}}$$

b) m_2 grande



$$m_1 g \, sen\alpha + \overset{\mu_E N}{F_r} - \underset{m_2 g}{T} = 0 \longrightarrow \underline{m_2 = 9{,}2\,kg} \Rightarrow \underline{\underline{2{,}8 < m_2 < 9{,}2}}$$

(m_1 estará en reposo)

Ahora, $\mu_D = 0{,}3$ y $m_2 = 10$ kg, determine la aceleración del sistema

$m_2 > 9{,}2 \rightarrow$ ASCENSO m_1

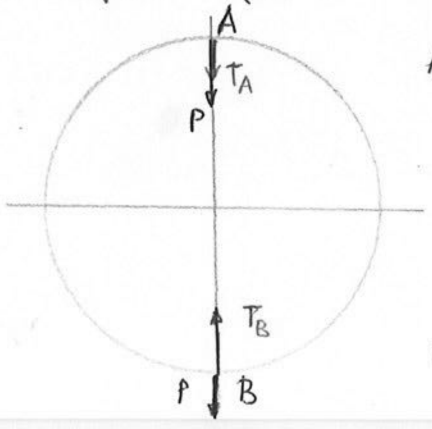
(m_1) $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = m_1 g \cos\alpha$

$\Sigma F_x = -m_1 a \rightarrow m_1 g \, sen\alpha + \mu_D N - T = -m_1 a$

(m_2) $T - m_2 g = -m_2 a$

$$\underline{\underline{a = 0{,}78\,m/s^2}}$$

6. Una bola de 0,15kg está atada al extremo de una cuerda de 1,1 m de longitud y masa despreciable, y se la hace girar en un círculo vertical. Determinar la velocidad mínima que la bola debe tener en la parte superior (A) para moverse continuamente en círculos. Calcular la tensión de la cuerda en el punto más bajo de la trayectoria (B) si la bola se mueve con la velocidad que el doble que en A.



$$A: P + T = m a_N \rightarrow mg + T_A = m \cdot \frac{V_A^2}{\ell}$$

$$T_A = 0 \Rightarrow mg = m\frac{V_A^2}{\ell} \rightarrow V_A = \sqrt{g\ell} \Rightarrow \underline{\underline{V_A = 3{,}28\,m/s}}$$

T_B es mayor que T_A para mantener el movimiento circular

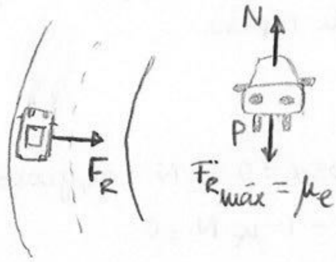
$$V_B = 2V_A$$

$$B: T_B - P = m a_N \rightarrow T_B = m\left(\frac{V_B^2}{\ell} + g\right) \Rightarrow \underline{\underline{T_B = 7{,}34\,N}}$$

7. Un auto de carreras de 1000 kg va a entrar en una curva plana de 50m de radio a una velocidad de 50 km/h ¿El vehículo tomará la curva o resbalará?

a) El pavimento está seco y $\mu_E = 0,6$

b) El pavimento está helado y $\mu_E = 0,25$



$F = m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{1000 \cdot (14)^2}{50} = 3900\ N$

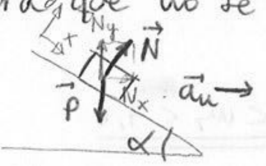
↳ suponiendo que es la fuerza requerida para tener una trayectoria circular

$F_{R_{máx}} = \mu_e N = \mu_e mg = 9800\,\mu_e$

a) $F_{R_{máx}} = 9800 \cdot 0,6 = 5900\ N$ → Como la fuerza es mayor, tomamos la curva sin problemas

b) $F_{R_{máx}} = 9800 \cdot 0,25 = 2500\ N$ → Como es menor, nos salimos por la curva

8. Un vehículo viaja a una velocidad v y describe una curva de radio R. Determinar el ángulo que deberá inclinarse transversalmente al camino de manera que no se requiera rozamiento.



$$\left.\begin{aligned} N \operatorname{sen}\alpha &= m \cdot \frac{v^2}{R} \\ N \cos\alpha &= P = mg \end{aligned}\right] \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{Rg} \Longrightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$$

TEMA 7: Dinámica del punto (RESUMEN)

LEYES DE NEWTON

<u>1ª ley → Principio de Inercia</u>: Un cuerpo permanece en estado de reposo o de m.r.u. si no actúa ninguna fuerza sobre él o si la resultante de todas ellas es nula

<u>2ª ley → Principio Fundamental de la Dinámica</u>: si sobre un punto material o cuerpo rígido actúa una fuerza resultante $\vec{F}$, este adquiere una aceleración que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

<u>3ª ley → Principio de Acción y Reacción</u>: si un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo, este a su vez ejerce sobre el primero otra fuerza (reacción), con el el mismo módulo y dirección, pero de sentido contrario. Ambas fuerzas se producen simultáneamente.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{dv}{dt}\vec{t} + m \cdot \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \rightarrow \text{Plano OSCULADOR}$$

Cantidad de movimiento: $\vec{p} = m\vec{v}$

Impulso: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$

Momento cinético: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$L_{eje} = \vec{L}_0 \cdot \vec{u}_{eje} = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{u})$

TRABAJO: $W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

POTENCIA: $\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}$; $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

~ Cantidad de movimiento: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ Si $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{p} = cte \Rightarrow \vec{P}_{antes} = \vec{P}_{después}$ $(\Delta\vec{p} = 0)$

~ Impulso: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}$

~ Proyección de la cantidad de movimiento:

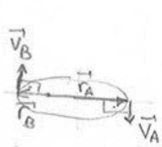
Eje → $proy_\delta \vec{F} = \frac{d}{dt}(proyec_\delta \vec{p})$ si $\vec{F} \perp \delta \ \forall t \rightarrow proyec_\delta \vec{p} = cte \Rightarrow proyec_\delta \vec{v} = cte$

Plano → $proyec_\Pi \vec{F} = \frac{d}{dt}(proyec_\Pi \vec{p})$ si $\vec{F} \perp \Pi \ \forall t \rightarrow proy_\Pi \vec{p} = cte \Rightarrow proy_\Pi \vec{v} = cte$

$C = |\vec{r} \times \vec{v}| = 2\frac{dA}{dt}$ (cte. áreas) velocidad aereolar

~ Momento cinético:

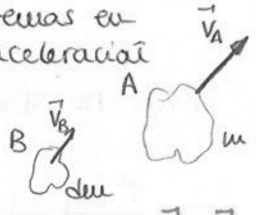
Central → $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$ $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$ Si $\vec{M}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = cte$



Axial → $L_u = (\vec{r}, \vec{p}, \vec{u})$ $\frac{dL_u}{dt} = (\vec{r} \times \vec{F})\vec{u} = \vec{M}_0 \cdot \vec{u} = M_u$ Si $M_u = 0 \rightarrow L_u = cte$

~ Energía cinética: $W_{AB} = \Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A}$

Fuerzas de inercia: $F_{iner} = -m \cdot a$ Solo tiene lugar en sistemas en los que aparezca una aceleración



Sistema de masa variable: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{V}_e \cdot \frac{dm}{dt}$

Velocidad de escape: $\vec{V}_B - \vec{V}_A$

$\dot{m}$	V_e	
↑	↑	B alcanza a A
↑	↓	Choque frontal
↓	↑	Disparo hacia delante
↓	↓	Disparo hacia atrás (cohete)

T8- TRABAJO Y ENERGIA (I)

1. Campos escalares y vectoriales

CAMPO ESCALAR.

Magnitud escalar: $U = U(x,y,z)$

$$P(x,y,z) \rightarrow U$$

- Independiente del sistema de referencia
- Superficies de nivel → espacio geométrico donde se localizan todos los puntos que tienen el mismo valor de la función U.

$$SN \rightarrow \{P(x,y,z) / U = C\}$$

La función $U(x,y,z)$ es una función uniforme, por lo que cada punto de x,y,z tiene un único valor de la función $U(x,y,z)$. Por lo tanto, las superficies de nivel no se pueden cortar ni ser tangentes.

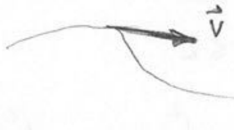
CAMPO VECTORIAL.

Magnitud vectorial: $\vec{V}(x,y,z)$

$$\vec{V} = \vec{V}(r) \rightarrow \vec{V} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

X, Y, Z son funciones uniformes, por lo que en cada punto del espacio tenemos perfectamente definidos.

- Varían en frente a un cambio de referencia
- Es invariante la norma y la magnitud vectorial
- Líneas de campo → en cada punto de la línea, el vector campo es tangente a dicha línea en dicho punto.



$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$
vector tg a la línea

$\vec{V} \parallel \vec{dl}$ $\quad \vec{V} \times \vec{dl} = 0$ (comps. proporcionales)

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$ → ec. superficie

$\frac{dx}{X} = \frac{dz}{Z}$ → ec. sup

⟹ intersección = la línea de campo

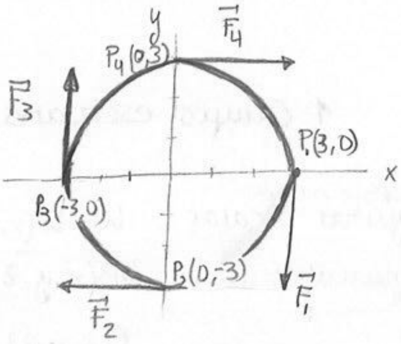
- Las líneas de campo ni se cortan ni son tangente

~ Campos planos

$U = U(x,y)$ ⟹ Curvas de nivel, no superficies porque estamos en el plano

$\vec{V} = \vec{V}(x,y)$ ⟹ $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$

Ej. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y)=(y,-x)$. Escribir la ecuación de las líneas de campo y decir de qué líneas se tratan.



$$\vec{F}(x,y) = X(x,y)\vec{i} + Y(x,y)\vec{j} = y\vec{i} - x\vec{j}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \rightarrow -x\,dx = y\,dy$$

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C' \rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C''$$

Las dos constantes de integración están agrupadas en esta

$$\Downarrow$$

$$\underline{x^2 + y^2 = C'''} \rightarrow \text{Circunferencia}$$

2. Circulación de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{V}(x,y,z)$, llamamos circulación a la integral entre dos puntos de dicho campo.

$$\vec{V}(x,y,z) \qquad \underline{\underline{G = \int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{l}}}$$

El trabajo sería la integral de la función fuerza

$$G = \int_A^B X(x,y,z)\,dx + \int_A^B Y(x,y,z)\,dy + \int_A^B Z(x,y,z)\,dz$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \\ z = z(\lambda) \end{array}\right\} \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \qquad \begin{array}{l} x' = \frac{dx}{d\lambda} \rightarrow dx = x'\,d\lambda \\ y' = \frac{dy}{d\lambda} \rightarrow dy = y'\,d\lambda \\ z' = \frac{dz}{d\lambda} \rightarrow dz = z'\,d\lambda \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$G = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} X\big(x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\big)\,x'\,d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Y\big(x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\big)\,y'\,d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Z\big(x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\big)\,z'\,d\lambda$$

Ej. Sea un campo vectorial $\vec{V} = (\cos z, e^x, e^y)$. Hallar la circulación a lo largo de una trayectoria $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $z(t) = e^t$ con $0 \leq t \leq 2$

$$x' = \frac{dx}{dt} = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dt} = 1 \qquad z' = \frac{dz}{dt} = e^t$$

$$G = \int \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_0^2 \cancel{\cos(e^t)\cdot 0\,dt}_{\,0} + \int_0^2 e^1\cdot 1\,dt + \int_0^2 e^t\cdot e^t\,dt = e\cdot t\Big|_0^2 + \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^2 =$$

$$\Downarrow$$

$$G = (2e - 0) + \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot 2} - e^0\right) = \underline{2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}}$$

Ej. Suponer que $\vec{F}$ es un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcular el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de una circunferencia de radio a en el plano YZ

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = a\cos\theta \\ z = a\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

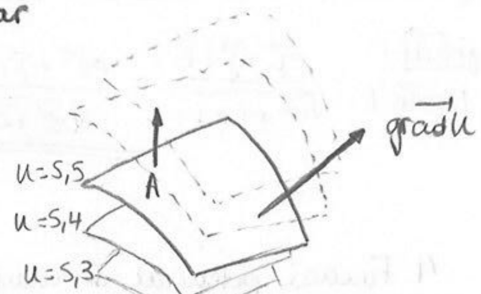
$$x' = 0\,;\ y' = -a\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,;\ z' = a\cos\theta\,d\theta$$

$$W = \int \vec{F}\,d\vec{l} = \int X(x,y,z)\,dx + \int Y(x,y,z)\,dy + \int Z(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int 0 + \int_0^{2\pi} (a\cos\theta)(-a\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} (a\,\text{sen}\,\theta)\,a\cos\theta\,d\theta = \underline{\underline{0}}$$

3. Gradiente de un campo escalar

$U = U(x,y,z) \longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, U = \vec{\nabla} U$



- Dirección: en cada punto es perpendicular a la superficie de nivel
- Sentido: hacia las superficies de nivel crecientes
- Módulo: $|\overrightarrow{\text{grad}}\, U| = \dfrac{dU}{dn}$ (normal a la superficie) $\qquad [\text{grad}\, U] = [U]\cdot L^{-1}$

$\vec{\nabla} U$

Cartesianas: $\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

Cilíndricas: $\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \dfrac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$

Esféricas: $\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r\cdot \text{sen}\,\theta}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot\vec{u}_\varphi$

$U = U(x,y,z)$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$\underline{\underline{dU}} = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy + \dfrac{\partial U}{\partial z}dz = \underline{\underline{\overrightarrow{\text{grad}}\, U\cdot d\vec{l}}}$

$dU = |\overrightarrow{\text{grad}}\, U||d\vec{l}|\cos\alpha \quad \Big| \quad \alpha = 0^\circ$

$\alpha = 90^\circ \qquad dU = 0 \longrightarrow U = \text{cte}.$

$\dfrac{dU}{dl} = |\overrightarrow{\text{grad}}\, U|\cos\alpha = \text{proyec}_{d\vec{l}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, U) \Rightarrow \dfrac{dU}{dl}$: DERIVADA DIRECCIONAL (Da lo que varía U en una determinada dirección)

También $\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ se puede considerar la derivada direccional de orden máximo.

Ej 1. Considerar $U(x,y,z) = x^3y^3 + y - z + 2$, ¿A qué superficie de nivel corresponde el punto $(0,0,2)$?

2. Demostrar que el vector $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k})$ es un vector unitario normal a esa superficie en ese punto.

1. $U = 0\cdot 0 + 0 - 2 + 2 \longrightarrow \underline{U(0,0,2) = 0}$

2. $|\vec{n}| = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1^2 + (-1)^2\right]} = 1$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = 3x^2y^3\,\vec{i} + (x^3\cdot 3y^2 + 1)\vec{j} - \vec{k}$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U\Big|_{(0,0,2)} = 0\,\vec{i} + (0+1)\vec{j} - \vec{k} = \vec{j} - \vec{k}$

3. Calcular la derivada direccional del campo escalar $f(x,y,z) = e^x + yz$ en el pto. $(1,1,1)$ en la dirección de $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = e^x\,\vec{i} + z\,\vec{j} + y\,\vec{k} \longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\, f\Big|_{(1,1,1)} = e\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$\dfrac{df}{dv} = \text{proy}_{d\vec{v}}\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \overrightarrow{\text{grad}}\, f\cdot\vec{v} = \dfrac{e}{\sqrt{3}} - \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} + \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \underline{\underline{\dfrac{e}{\sqrt{3}}}}$

4. Cual es la dirección de máxima variación en el punto $(1,1,1)$

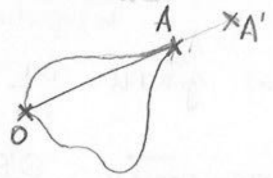
$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{grad f}}{|\overrightarrow{grad f}|} = \frac{e\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{e^2+1+1}} = \underline{\underline{\frac{e\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{e^2+2}}}}$$

4. Función potencial de campos conservativos

Sea un campo vectorial $\vec{V}(x,y,z)$ cuya circulación no depende del camino seguido se puede asociar a dicho campo vectorial un campo escalar que verifica:

pto. O $\rightarrow U(O) = U_0$

pto. A $\rightarrow U(A) = U_0 + \int_O^A \vec{V}\cdot d\vec{l}$



$$U(A') = U_0 + \int_O^{A'} \vec{V}d\vec{l} \longrightarrow U(A') - U(A) = \cancel{U_0} + \int_O^{A'} \vec{V}d\vec{l} - \cancel{U_0} - \int_O^A \vec{V}d\vec{l} = \int_A^{A'} \vec{V}\cdot d\vec{l}$$

$$\left.\begin{array}{l} dU = \vec{V}\cdot d\vec{l} \\ dU = \overrightarrow{grad U}\cdot d\vec{l} \end{array}\right\} \quad \vec{V}\cdot d\vec{l} = \overrightarrow{grad U}\cdot d\vec{l} \quad \forall d\vec{l} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = \overrightarrow{grad U}}$$

($\vec{V}$ NO depende del camino)

U: función potencial o el potencial de $\vec{V}$.

$\Uparrow$

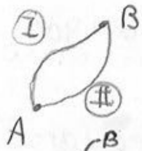
- $\exists U / \vec{V} = \overrightarrow{grad U}$ $\qquad \vec{V}\cdot d\vec{l} = \overrightarrow{grad U}\cdot d\vec{l} = dU$

$$\int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_A^B U = U(B) - U(A) \Rightarrow \text{No depende del camino}$$

$\downarrow$

$$\oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = 0$$

(Circulación por un camino cerrado)



$$\int_{A_I}^B \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_{A_{II}}^B \vec{V}\cdot d\vec{l} = -\int_B^{A_{II}} \vec{V}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_{A_I}^B \vec{V}\cdot d\vec{l} + \int_B^{A_{II}} \vec{V}d\vec{l} = 0 \longrightarrow \oint_{A_I}^{A_{II}} \vec{V}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Un campo vectorial es conservativo cuando tiene asociada una función potencial, es decir, $\vec{V} = \overrightarrow{grad U}$, o cuando $\oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = 0$ o $\text{rot}\,\vec{V} = 0$

$$\text{rot}\,\vec{V} = 0 \quad \text{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} = 0 \end{array}$$

- $\exists U^* / \vec{V} = -\overrightarrow{grad U^*}$

Ej. Tenemos un campo vectorial $\vec{A} = (2xy+z^3)\vec{i} + (x^2+2y)\vec{j} + (3xz^2-2)\vec{k}$ y $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\,\phi$. Determinar ϕ y la integral de $\vec{A}\cdot d\vec{r}$ a través de un camino C, de manera que C une dos puntos: $(1,-1,1)$ y $(2,1,2)$.

ϕ: campo escalar $\rightarrow \phi = \phi(x,y,z)$

$$\overrightarrow{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = A_x = 2xy+z^3 \longrightarrow \phi = x^2y + z^3x + C_1(y,z) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = A_y = x^2+2y \longrightarrow \phi = x^2y + y^2 + C_2(x,z) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = A_z = 3xz^2-2 \longrightarrow \phi = xz^3 - 2z + C_3(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z}}$$

$$C = \int \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int \overrightarrow{grad}\,\phi\, d\vec{r} = \int_1^2 d\phi = \phi(2) - \phi(1) = \cancel{4} + 16 + 1 \cancel{-4} - (\cancel{-1} \cancel{+1} + 1 - 2) = \underline{\underline{18}}$$

6) [illegible] $\vec{F} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2, [illegible])\vec{j} + ([illegible])\vec{k}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $(1, [illegible])$

[illegible] $\phi = \phi(x,y,z)$

$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} = [illegible]$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = [illegible] \rightarrow \phi = [illegible]$

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = [illegible] \rightarrow \phi = [illegible] \rightarrow \phi = [illegible]$

$\frac{\partial\phi}{\partial z} = [illegible] \rightarrow \phi = [illegible]$

$C: \int \vec{F}\, d\vec{r} = \int \nabla\phi\, d\vec{r} = \int_a^b d\phi = \phi(1) - \phi(0) = [illegible] = [illegible]$

TEMA 8: Trabajo y energía (I) (RESUMEN)

Campos
- ESCALAR → Magnitud escalar: $U = U(x,y,z)$
  Superficies de nivel
- VECTORIAL → Magnitud vectorial: $\vec{V} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$
  Líneas de campo

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \\ \vec{V} \parallel d\vec{l} \rightarrow \vec{V} \times d\vec{l} = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

~ Circulación

$\vec{V}(x,y,z)$

$$C = \int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_A^B X(x,y,z)\,dx + \int_A^B Y(x,y,z)\,dy + \int_A^B Z(x,y,z)\,dz.$$

~ Gradiente

$U = U(x,y,z)$

$$\vec{\mathrm{grad}}\,U = \vec{\nabla} U \qquad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- Dirección: ⊥ a la superficie de nivel en cada punto
- Sentido: hacia las superficies de nivel crecientes
- Módulo: $|\vec{\mathrm{grad}}\,U| = \frac{dU}{dn}$ $\quad [\vec{\mathrm{grad}}\,U] = [U]\cdot L^{-1}$

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \rightarrow \text{Cartesianas}$$

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z \rightarrow \text{Cilíndricas}$$

$$\vec{\mathrm{grad}}\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \rightarrow \text{Esféricas}$$

$$dU = \vec{\mathrm{grad}}\,U\cdot d\vec{l} = |\vec{\mathrm{grad}}\,U|\,|d\vec{l}|\cos\alpha \rightarrow \underbrace{\frac{dU}{dl}}_{\text{Derivada direccional}} = \mathrm{proyec}_{d\vec{l}}(\vec{\mathrm{grad}}\,U)$$

~ Función potencial

Un campo vectorial es CONSERVATIVO cuando tiene asociada una función potencial. Para que esto ocurra, la circulación no depende del camino seguido.

$\vec{V} = \vec{\mathrm{grad}}\,U$ $\quad U$: función potencial $\quad$ si

$$C = \int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{l} = U(B) - U(A)$$

$$\oint \vec{V}\,d\vec{l} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = 0$$

T9 - TRABAJO Y ENERGÍA (II)

1. Movimiento de un punto material con fuerzas que derivan de un potencial

$$\left.\begin{matrix}\vec{F}\\ \exists E_p\end{matrix}\right\} \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \qquad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\overrightarrow{grad}\, E_p\, d\vec{r} = -dE_p$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p\right) = 0 \rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2 + E_p = cte = E}}$$ Teorema de conservación de la energía mecánica

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int \overrightarrow{grad}\, E_p \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dE_p = E_p(1) - E_p(2)$$

2. Movimiento de un punto material sometido a la acción de una fuerza conservativa que es función de la distancia a un punto fijo.

$$F = F(x)$$

O ——— P, x

$$F \text{ conserv} \rightarrow \exists E_p = E_p(x) \,/\, F = -\frac{dE_p}{dx}$$

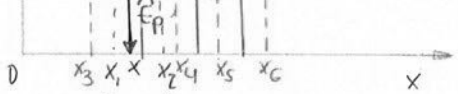
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\cdot dx = -\frac{dE_p}{dx}dx = -dE_p$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = E \Rightarrow \underline{\underline{v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)}}}$$ Función cinemática

$\hookrightarrow v > 0 \Rightarrow E > E_p(x)$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(x)\right)} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \underline{\underline{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}} = \int_{t_0}^{t} dt}}$$ Función horaria

Si $v = 0 \rightarrow E = E_p(x)$
$\Downarrow$
$E_c = 0$



$$F = -\frac{dE_p}{dx}\begin{cases}\dfrac{dE_p}{dt} > 0 & F < 0 \text{ (izquierda)}\\[2ex] \dfrac{dE_p}{dt} < 0 & F > 0 \text{ (derecha)}\end{cases}$$

Movimiento oscilatorio del cuerpo material entre esos dos puntos con esa energía E_1

x_1, x_2: puntos de retorno, en los que la energía potencial es igual a la energía total.

En E_2, el punto solo puede estar entre x_3 y x_4 y x_5 y x_6, pues entre x_4 y x_5, la energía cinética tendría que ser negativa. Este intervalo $x_4 - x_5$ se denomina barrera de potencial, donde la energía potencial es mayor que la total o mecánica.

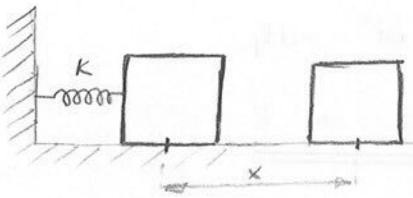
Los máximos y mínimos (A, B, C) son aquellos en los que la derivada de E_p es 0

$$\begin{cases}\text{Mínimo: punto de equilibrio estable}\\ \text{Máximo: punto de equilibrio inestable}\end{cases} \qquad \frac{dE_p}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d^2E_p}{dt}\begin{cases} > 0 & \text{mín.}\\ < 0 & \text{máx.}\end{cases}$$

El tiempo que transcurre entre un punto y otro de retorno se calcula con la f. horaria.

Entre dos puntos, el tiempo es finito. Sin embargo, si tiene que alcanzar un punto que es máximo, consideramos que transcurre un tiempo infinito (la integral de la función horaria no es convergente).

3. Movimiento oscilatorio



$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$

$a(t) = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ley de Hooke: } F = -Kx \\ 2^a \text{ Ley de Newton: } F = ma \end{array}\right\} -Kx = -m\omega^2 x \longrightarrow \begin{cases} K = m\omega^2 \\ \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$$

$F \longrightarrow x = x(t)$

$$F = ma \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{Ecuación diferencial}$$

$$\alpha = \frac{dx}{dt} \rightarrow \alpha^2 = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \alpha^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{Ecuación característica}$$

↳ quitas x porque es como si fuese la variable anterior ω es la derivada de α y por eso aparece

$$\alpha^2 = -\omega^2 = i^2\omega^2 \rightarrow \alpha = \pm i\omega$$

primera raíz o solución

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 t} \ldots \longrightarrow x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$x = C_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t) = (C_1 + C_2)\cos\omega t + (iC_1 - iC_2)\operatorname{sen}\omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} x = M\cos\omega t + N\operatorname{sen}\omega t \\ v = -M\omega\operatorname{sen}\omega t + N\omega\cos\omega t \end{array}\right\} \boxed{t=0} \quad \begin{array}{l} x = x_0 \rightarrow x_0 = M \Rightarrow M = x_0 \\ v = v_0 \rightarrow v_0 = N\omega \Rightarrow N = \frac{v_0}{\omega} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t \\ x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{array}\right\} \text{Ambas son soluciones de la ecuación diferencial}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = A\operatorname{sen}\varphi \\ \frac{v_0}{\omega} = A\cos\varphi \end{array}\right] A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \rightarrow$$ A (amplitud) queda perfectamente definida con las condiciones iniciales

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0\omega}{v_0}$$

$$x = A\operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\omega t + A\cos\varphi\operatorname{sen}\omega t \Rightarrow x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

↓ se verifica que ambas son soluciones de la ecuación

4. Energía del oscilador simple

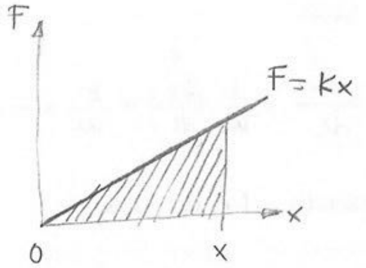
$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\,dx = -kx\,dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía cinética del oscilador}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energía potencial elástica}} = cte = E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}mv^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kx^2 = \cancel{\frac{1}{2}}mv_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kx_0^2 \longrightarrow \cancel{m}v^2 + \cancel{m}\omega^2x^2 = \cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}\omega^2x_0^2$$

$$v^2 + \omega^2x^2 = v_0^2 + \omega^2x_0^2$$

$$\left[\begin{array}{l} v = 0 \longrightarrow x_{máx} = A = \sqrt{\dfrac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \\ x = 0 \longrightarrow v_{máx} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2x_0^2} \end{array}\right. \quad \text{Ecuaciones extremas}$$



$$dW = F\,dx = kx\,dx \longrightarrow W = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,x\,kx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \\ v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{array}\right] \quad E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k}\cdot A^2\,\text{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \text{sen}^2(\omega t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}kA^2}}$$

La energía de un oscilador es constante y proporcional al cuadrado de la amplitud.

5. Energías cinética y potencial medias

se va a calcular el valor medio

$$\langle E_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle \longrightarrow \langle E_c \rangle = \underbrace{\frac{1}{2}mA^2\omega^2}_{\text{son constantes}}\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$$

$$y = f(x) \longrightarrow \langle y \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx \Longrightarrow \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t + \frac{\text{sen}\,2(\omega t + \varphi)}{4\omega}\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{\text{sen}\,2(\omega T + \varphi)}{4\omega} - \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4\omega}\right) \Longrightarrow \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \frac{\text{sen}\,2\left(\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right)}{4\omega} - \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4\omega} = \frac{\text{sen}\,(\overset{\text{2 vueltas más}}{4\pi} + 2\varphi)}{4\omega} - \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4\omega} = 0$$

$$\langle \operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\langle E_c\rangle}} = \frac{1}{4} m A^2\omega^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} k A^2}}$$

$$\underline{\underline{\langle E_p\rangle}} = \frac{1}{2} kA^2 \langle \operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\rangle = \underline{\underline{\frac{1}{4} kA^2}}$$

$\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = \frac{1}{2}E \rightarrow$ Los valores medios son iguales a la mitad de la energía

$(E_c)_{máx} = (E_p)_{máx} = E \rightarrow$ los valores máximos son iguales a la energía

6. Oscilaciones amortiguadas

$F_e = -kx$ $\quad F_e$: fuerza elástica

$F_r = -\lambda v$ $\quad \lambda$: coeficiente de fricción

$$F_e + F_r = ma \rightarrow -kx - \lambda v = ma$$

$$m\frac{d^2x}{dt} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \rightarrow \overset{\ddot{x}}{\frac{d^2x}{dt}} + \frac{\lambda}{m}\overset{\dot{x}}{\frac{dx}{dt}} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\quad \omega_0$ porque existe una fuerza de rozamiento. Representa la frecuencia propia del oscilador (SIN rozamiento) $\Rightarrow$ se diferencia entre ω y ω_0:

$\omega_0 \rightarrow$ frecuencia propia del oscilador, SIN rozamiento

$\omega \rightarrow$ Frecuencia CON rozamiento

$2\gamma = \frac{\lambda}{m}$ $\quad \gamma$: coeficiente de amortiguación

$\Downarrow$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \rightarrow x = x(t) \quad \text{Ecuación diferencial}$$

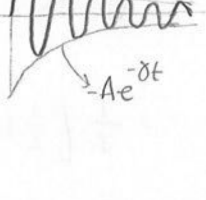
$$\alpha = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0}} \quad \text{Ecuación característica}$$

$$\alpha = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}} \quad \text{Soluciones de la ec. caract.}$$

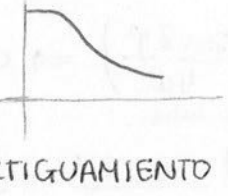
a) $\gamma < \omega_0 \rightarrow$ fricción muy pequeña SUBAMORTIGUAMIENTO

$\alpha = -\gamma \pm \underline{\underline{i}}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ La frecuencia del oscilador en un medio viscoso YA con rozamiento $(\omega < \omega_0)$

$$x = C_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} = e^{-\gamma t}\underbrace{\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)}_{A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)} = \underbrace{Ae^{-\gamma t}}_{A(t)}\cdot\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$$



b) $\gamma > \omega_0$ SOBREAMORTIGUAMIENTO (Mov. aperiódico, desaparecen las oscilaciones)



c) $\gamma = \omega_0$ AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO (se alcanza la amplitud cero antes que en los anteriores, es aperiódico)

7. Dispersión de energía de un oscilador. Factor de calidad y tiempo de relajamiento

~ Energía del oscilador en un instante

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \underset{m\omega_0^2}{k} \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$x = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\gamma A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A e^{-\gamma t} \omega \cos(\omega t + \varphi) \simeq A e^{-\gamma t} \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$\gamma < \omega_0 \rightarrow$ En caso de subamortiguamiento, se puede tachar el primer término porque es muchísimo menor que el segundo

La variación de la exponencial en un periodo comparado con la del seno y el coseno es muy pequeña, por lo que no se va a promediar para el cálculo del valor medio de la energía y se considera constante

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{4} m \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 (\omega^2 + \omega_0^2)$$

~ Energía que disipa el oscilador en un periodo (dE)

$$dE = F_r \cdot dx = -\lambda v\, dx = -\lambda v \cdot v\, dt = -\lambda v^2 dt$$

$$dE = -\lambda \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt$$

$$\downarrow$$

$$E(0,T) = -\lambda \underbrace{\left(A e^{-\gamma t}\right)^2}_{\text{La variación de la exponencial se considera cte. frente al seno/coseno}} \omega^2 \frac{T}{2} = -\lambda \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 \omega^2 \cdot \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} = \underbrace{-\lambda \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 \omega \cdot \pi}_{\text{Energía disipada}}$$

porque es una pérdida

$$\underset{\text{Factor de calidad}}{Q} = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{E_{\text{perdida en un ciclo o un periodo}}} = 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{4} m \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{\lambda \left(A e^{-\gamma t}\right)^2 \omega \pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m(\omega^2 + \omega_0^2)}{\lambda \omega} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\gamma \omega}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \simeq \omega_0}$$

$$\gamma \ll \omega_0 \text{ (subamortiguamiento)} \rightarrow Q = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\gamma \omega} = \frac{1}{4} \frac{2\omega_0^2}{\gamma \omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Si un sistema tiene el factor de calidad muy grande, pierde más energía y llega antes a la amplitud cero. Si es muy pequeño, mantiene las oscilaciones.

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{-\frac{dE}{dt} T} = -\omega_0 \frac{E(t)\, dt}{dE} \rightarrow \frac{dE}{E(t)} = -\frac{\omega_0}{Q} dt$$

$$\ln E(t) = -\frac{\omega_0}{Q} t + C \qquad \boxed{t=0} \begin{cases} E = E_0 \\ C = \ln E_0 \end{cases}$$

exponencial negativa → E decrece

$$\ln \frac{E(t)}{E_0} = -\frac{\omega_0}{Q} t \rightarrow E(t) = E_0 e^{-\omega_0/Q\, t} \Rightarrow E(t) = E_0 e^{-2\gamma t} \rightarrow \frac{E(t)}{E_0} = e^{-2\gamma t}$$

$$A(t) = A e^{-\gamma t} \rightarrow \frac{A(t)}{A} = e^{-\gamma t} \qquad \boxed{\frac{E(t)}{E_0} = \left(\frac{A(t)}{A}\right)^2}$$

$$\underbrace{\tau}_{\text{Tiempo de relajamiento}} = \frac{1}{2\gamma}$$ Tiempo que pasa hasta que nuestra energía tarda en reducirse en un factor $1/e$

$$E(\tau) = E_0 e^{-2\gamma\tau} \rightarrow E(\tau) = E_0 e^{-2\gamma/2\gamma} = \frac{E_0}{e} \Rightarrow \underline{\underline{E(\tau) = \frac{E_0}{e}}}$$

TEMA 9: Trabajo y energía (II) (RESUMEN)

~ Movimiento de un punto material

- $\left.\begin{array}{l}\vec{F} \\ \exists E_p\end{array}\right\}$ $\vec{F} = -\text{grad}\,\vec{E_p}$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\text{grad}\,\vec{E_p}\cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\downarrow$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + E_p = cte = E$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int -\text{grad}\,\vec{E_p}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dE_p = E_p(1) - E_p(2)$$

- $\left.\begin{array}{l}F = F(x) \\ \exists E_p = E_p(x)\end{array}\right\}$ $F = -\dfrac{dE_p}{dx}$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{x} = -\frac{dE_p}{dx}dx = -dE_p$$

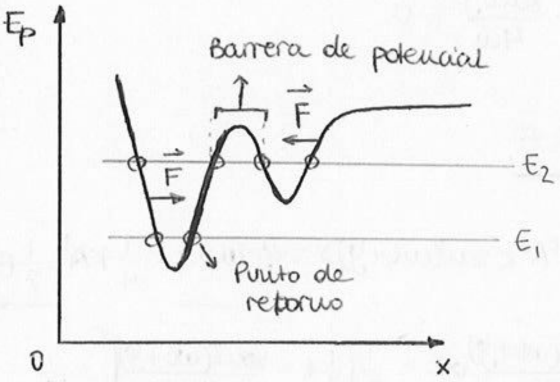
$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) = cte = E \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}$$

FUNCIÓN CINEMÁTICA

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p)} \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p(x))}}$$

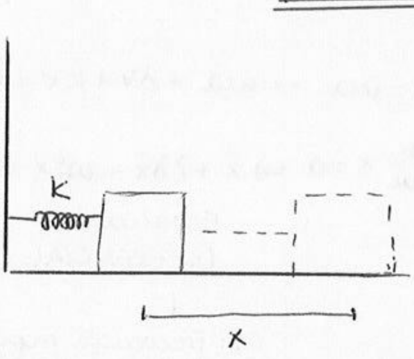
FUNCIÓN HORARIA



$$F = -\frac{dE_p}{dx}\begin{cases} \dfrac{dE_p}{dt} > 0 \rightarrow F < 0 \\ \dfrac{dE_p}{dt} < 0 \rightarrow F > 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \frac{dE_p}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d^2E_p}{d^2t}\begin{cases} > 0 & \text{MÍNIMO} \rightarrow \text{pto. de eq. ESTABLE} \\ < 0 & \text{MÁXIMO} \rightarrow \text{pto. de eq. INESTABLE} \end{cases}$$

~ Movimiento oscilatorio



$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega}}$$

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{x_0\omega}{v_0}$$

$x_0 = A\,\text{sen}\,\varphi$

$\dfrac{v_0}{\omega} = A\cos\varphi$

$$F = ma = -Kx \rightarrow -m\omega^2 x = -Kx \Rightarrow \underline{K = m\omega^2}$$

$$\downarrow$$

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -Kx \rightarrow \frac{d^2x}{d^2t} + \frac{K}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{d^2t} + \omega^2 x = 0$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\alpha = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \alpha^2 + \omega^2 = 0$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA $\mapsto$ solución $\alpha = \pm i\omega$

- Energía del oscilador simple

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\,dx = -kx\,dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right) \rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía CINÉTICA del oscilador}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energía POTENCIAL elástica}} = cte = E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \;;\; E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$mv^2 + kx^2 = mv_0^2 + kx_0^2$$

$$mv^2 + m\omega^2 x^2 = mv_0^2 + m\omega^2 x_0^2$$

$$v^2 + \omega^2 x^2 = v_0^2 + \omega^2 x_0^2$$

$V = 0 \Rightarrow x_{máx} = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} = A$

$x = 0 \Rightarrow v_{máx} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0}$

$$dW = F\,dx = kx\,dx \Rightarrow W = \frac{1}{2}kx^2 = \text{Área}$$

- Energía cinética y potencial medias

$$\langle E_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle$$

$$y = f(x) \rightarrow \langle y \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx \Rightarrow \langle \cos^2(\omega t+\varphi)\rangle = \frac{1}{T-0}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2(\omega t+\varphi)}{4\omega}\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} + \cancel{\frac{\operatorname{sen} 2(\omega T+\varphi)}{4\omega}} - 0 - \cancel{\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4\omega}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2\left(\omega\frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right)}{4\omega} - \frac{\operatorname{sen} 2(\varphi)}{4\omega} = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4\omega} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4\omega} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\langle E_c \rangle} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}mA^2\omega^2 = \frac{1}{4}kA^2 = \underline{\frac{1}{2}E}$$

$$\langle E_p \rangle = \left\langle \frac{1}{2}kx^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\omega^2A^2\operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\right\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\langle\operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\rangle \Rightarrow \underline{\langle E_p \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E}$$

$$\langle \operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\rangle = \frac{1}{T-0}\int_0^T \operatorname{sen}^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}\,dt = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t - \frac{\operatorname{sen} 2(\omega t+\varphi)}{4\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2}$$

- Oscilaciones amortiguadoras

$F_e = -kx$ $\quad F_e \rightarrow$ Fuerza ELÁSTICA

$F_r = -\lambda v$ $\quad \lambda \rightarrow$ coeficiente de FRICCIÓN

$$F_e + F_r = ma \rightarrow -kx - \lambda v = ma \rightarrow ma + \lambda v + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación DIFERENCIAL

↓

ω_0: frecuencia propia del oscilador, SIN roz.

γ: coeficiente de AMORTIGUACIÓN

$\alpha = \dot{x} \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$ Ecuación CARACTERÍSTICA

↓

Solución: $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

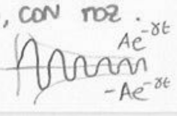
$\gamma < \omega_0 \rightarrow$ SUBamortiguamiento $\rightsquigarrow \alpha = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\underline{\omega}$

Frecuencia del oscilador en un medio viscoso, CON roz.

$\gamma > \omega_0 \rightarrow$ SOBREamortiguamiento — Desaparecen las oscilaciones

$\gamma = \omega_0 \rightarrow$ Amortiguamiento CRÍTICO — Se alcanza la $A = 0$ rápidamente

Aperiódicos



- Energía del oscilador con subamortiguamiento en un instante

$$E(t) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 \quad \text{siendo} \quad x = Ae^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$$

$$v = -\gamma A e^{-\gamma t}\,\text{sen}(\omega t+\varphi) + Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)\cdot\omega$$

$\simeq 0$

$$\langle E(t)\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m (Ae^{-\gamma t})^2 \omega^2 \cos^2(\omega t+\varphi)\right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} K (Ae^{-\gamma t})^2 \text{sen}^2(\omega t+\varphi)\right\rangle = \frac{1}{4} m (Ae^{-\gamma t})^2(\omega^2+\omega_0^2)$$

- Energía que disipa el oscilador

$$dE = F_r\,dx = -\lambda v\,dx = -\lambda v\,v\,dt = -\lambda v^2\,dt = -\lambda(Ae^{-\gamma t})^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$E(0,T) = -\lambda(\underbrace{Ae^{-\gamma t}}_{})^2\omega^2\frac{T}{2} = -\lambda(Ae^{-\gamma t})^2\omega^2\cdot\frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} \Rightarrow E = -\lambda(Ae^{-\gamma t})^2\omega\pi$$

la variación de la exponencial se puede considerar constante al compararla con el coseno

pérdida

- Factor de calidad

$$Q = 2\pi\cdot\frac{\langle E(t)\rangle}{|E|} = 2\pi\cdot\frac{\frac{1}{4}m(Ae^{-\gamma t})^2(\omega^2+\omega_0^2)}{\lambda(Ae^{-\gamma t})^2\omega\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\omega^2+\omega_0^2}{\gamma\omega} = 2\pi\cdot\frac{E(t)}{-\frac{dE}{dt}T}$$

$$\text{si } \gamma < \omega_0 \rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

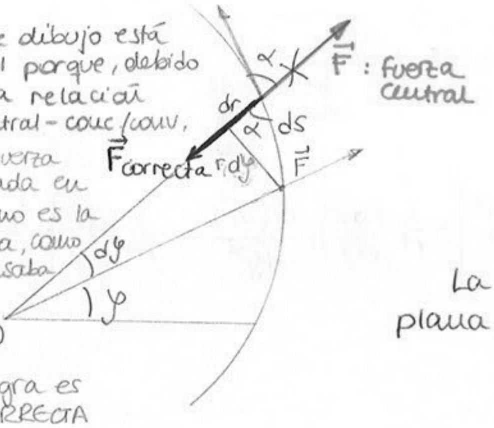
$$\left.\begin{array}{l} E(t) = E_0 e^{-2\gamma t} \\ A(t) = Ae^{-\gamma t}\end{array}\right\} \quad \frac{E(t)}{E_0} = \left(\frac{A(t)}{A}\right)^2$$

- Tiempo de relajamiento

$$\tau = \frac{1}{2\gamma} \rightarrow E(\tau) = \frac{E_0}{e}$$

T10 - MOVIMIENTO DE UN PUNTO BAJO FUERZAS CENTRALES

Este dibujo está mal porque, debido a la relación F. central - conc/conv, la fuerza pintada en rosa no es la correcta, como se pensaba en un principio



la negra es la CORRECTA

(RECORDATORIO)

$$F_{central} \rightarrow \vec{M_0} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L_0}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = cte \quad \left| \begin{array}{l} \text{Módulo} \\ \text{Dirección} \\ \text{Sentido} \end{array} \right.$$

$$\vec{L_0} = \vec{r} \times m\vec{v} \Longrightarrow \begin{array}{l} \vec{L_0} \perp \vec{r}, \vec{v} \\ \vec{L_0} \perp \Pi_{tray} \end{array}$$

La trayectoria que va a seguir el punto móvil es plana y recibe el nombre de CÓNICA.

Cónicas
- Elipse
- Hipérbola
- Parábola
- Circunferencia

$$\frac{|L_0|}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| \overset{v = \omega r}{=} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = cte = G \quad \text{(constante de las áreas)}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} G = cte \quad \text{(velocidad areolar)}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \rho\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{F}_{central} \rightarrow \vec{a}_{central} \text{ (radial)} \Rightarrow 2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \rho\ddot{\varphi} = 0 \quad \text{(solo tiene componente radial, } \vec{u}_\rho\text{)}$$

$$\rho \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{\cancel{dt}} + 2\dot{\varphi}\frac{d\rho}{\cancel{dt}} = 0 \xrightarrow[\text{entre } \rho\cdot\dot{\varphi}]{\text{se divide}} \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2\cdot\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\ln\dot{\varphi} + 2\ln\rho = cte \rightarrow \ln\dot{\varphi} + \ln\rho^2 = cte \Rightarrow \rho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = G$$

~ Coordenadas de la fuerza central

$F(r,t) \rightarrow$ a) $\quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = G \quad$ o $\quad d\varphi = \frac{G}{r^2} dt \quad$ o $\quad dt = \frac{r^2}{G} d\varphi$

$F(r, \varphi) \rightarrow$ b)

sería ρ

Teorema Energía cinética:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\alpha = F dr \rightarrow \frac{1}{2}m\, d(v^2) = F dr$$

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} \quad \text{m catetos}$$

a) $$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{G^2}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}m\, d\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{G^2}{r^2}\right] = F dr \xrightarrow[\text{entre } dt]{\text{se divide}} \frac{1}{\cancel{2}} m\left[\cancel{2}\frac{\cancel{dr}}{\cancel{dt}}\cdot\frac{d^2r}{d^2t} - \frac{\cancel{2}G^2}{r^{\cancel{4}3}}\cdot\frac{\cancel{dr}}{\cancel{dt}}\right] =$$

Sustituimos dφ de la primera fórmula porque para F(r,t) nos estorba

$$= F\cdot\frac{\cancel{dr}}{\cancel{dt}} \Rightarrow \boxed{F(r,t) = m\left(\frac{d^2r}{d^2t} - \frac{G^2}{r^3}\right)}$$

b) $v^2 = \dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} \Longrightarrow v^2 = \dfrac{G^2}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \dfrac{G^2}{r^2} = G^2\left[\left(\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\right] =$

$$v^2 = G^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] \Longrightarrow \frac{1}{2} m G^2\, d\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = F\cdot dr \xrightarrow[\text{entre } d\varphi]{\text{se divide}}$$

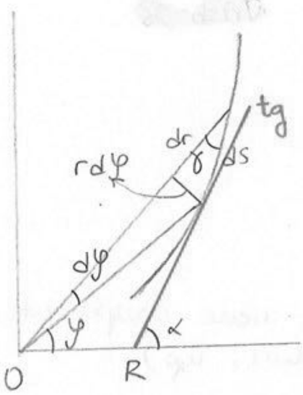
$$\cancel{\frac{1}{2}} m G^2\left[\cancel{2}\frac{d(1/r)}{d\varphi}\cdot\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - \frac{\cancel{2}}{r^3}\frac{dr}{d\varphi}\right] = F\frac{dr}{d\varphi} \to mG^2\left[-\frac{1}{r^2}\cancel{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)}\cdot\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - \frac{1}{r^3}\cancel{\frac{dr}{d\varphi}}\right] = F\cdot\cancel{\frac{dr}{d\varphi}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(r,\varphi) = -\frac{mG^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)}$$

Fórmula de BINET

~ <u>Concavidad y convexidad de las curvas</u> (trayectoria)



$$c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

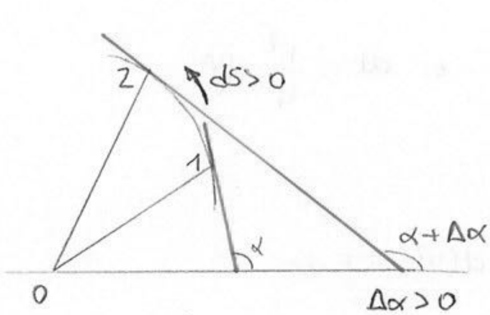
$$\alpha = \varphi + \gamma = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{r\,d\varphi}{dr} = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{r}{r'} \to r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$d\alpha = d\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{r}{r'}\right)$$

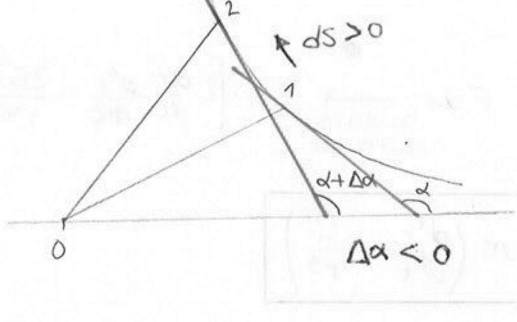
$$ds = \sqrt{\underbrace{dr^2 + r^2 d\varphi^2}_{\text{catetos elevados al cuadrado}}} = \sqrt{d\varphi^2\left(\frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2\right)} = d\varphi\sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}}\frac{d}{d\varphi}\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{r}{r'}\right) = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}}\left(1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}\cdot\frac{r'r' - r\cdot r''}{r'^2}\right)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2}}\left(1 + \frac{r'^2 - r\cdot r''}{r'^2 + r^2}\right) = \frac{r'^2 + r^2 + r'^2 - r\cdot r''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\alpha}{ds} = \frac{2r'^2 + r^2 - r\cdot r''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}}$$



$\dfrac{d\alpha}{ds} > 0 \Rightarrow$ Cóncava respecto de O



$\dfrac{d\alpha}{ds} < 0 \Rightarrow$ Convexa respecto de O

~ Relación entre la fuerza central y la concavidad / convexidad

$$\frac{d(1/r)}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r'}{r^2}$$

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = -\frac{r^2r'' - r'2rr'}{r^4} = \frac{2r'^2 - rr''}{r^3}$$

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{2r'^2 - r\cdot r''}{r^3} + \frac{1}{r}\right)$$ Fórmula de Binet

$$F = -\frac{mC^2}{r^5}\left(2r'^2 - r\cdot r'' + r^2\right)$$

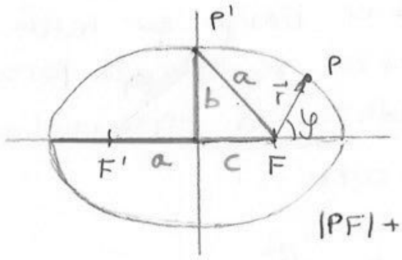
$$\Downarrow$$

$$\boxed{F = -\frac{mC^2}{r^5}\left(r'^2 + r^2\right)^{3/2}\cdot\frac{d\alpha}{dS}}$$ Signos cambiados

$\left[\begin{array}{l}\frac{d\alpha}{dS} > 0 \quad \text{Trayectoria CÓNCAVA} \\ F < 0 \quad \text{Fuerza ATRACTIVA}\end{array}\right.$

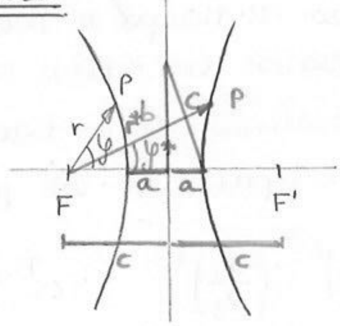
$\left[\begin{array}{l}\frac{d\alpha}{dS} < 0 \quad \text{Trayectoria CONVEXA} \\ F > 0 \quad \text{REPULSIVA}\end{array}\right.$

ELIPSE

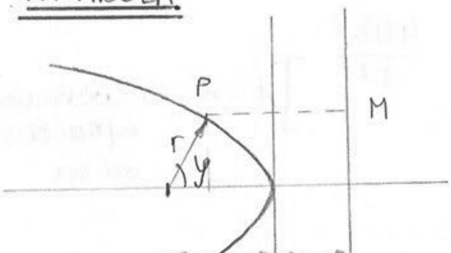


$|PF| + |PF'| = 2a$

HIPÉRBOLA



PARÁBOLA



PF = PM

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

$p = \frac{b^2}{a}$ parámetro de la cónica

$e = \frac{c}{a}$ excentricidad de la cónica

Elipse $\rightarrow e < 1$
Hipérbola $\rightarrow e > 1$
Parábola $\rightarrow e = 1$
Circunferencia $\rightarrow e = 0$

~ Naturaleza de la fuerza cuando la trayectoria es una cónica

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi$$

$$\frac{d(1/r)}{d\varphi} = -\frac{e}{p}\cdot\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p}\cos\varphi$$

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(-\frac{e}{p}\cos\varphi + \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi\right) \Rightarrow \boxed{F = -\frac{mC^2}{pr^2}}$$

Trayectoria cónica $\rightarrow F \propto \frac{1}{r^2}$ NEWTONIANA

Si $F<0$ (atractiva), las trayectorias presentan concavidad hacia el foco $\Rightarrow$ elipse, parábola o una rama de la hipérbola

Si $F>0$ (repulsiva), las trayectorias presentan convexidad hacia el foco $\Rightarrow$ otra rama

Resumen IMPORTANTE

1) Si un pto. se mueve verificando la ley de las áreas, está sometido a una fuerza central, y viceversa.

2) Conocidas concavidad o convexidad, podemos decir si la fuerza es atractiva o repulsiva (negativa o positiva)

3) Si la trayectoria es una cónica, la fuerza es newtoniana, y viceversa.

LEYES DE KEPLER

Los planetas giran en torno al sol describiendo una trayectoria elíptica y el Sol se encuentra en uno de sus focos. Como la trayectoria es una cónica, la fuerza que ejerce el sol sobre los planetas es newtoniana y, al ser una elipse, es atractiva.

El vector que va del Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, que verifica la ley de las áreas; por tanto, la fuerza es central.

Si definimos el tiempo de revolución sideral como el tiempo que tarda un planeta en describir una órbita completa en torno al sol, se tiene que para dos planeta, el cuadrado de los tiempos de revolución sideral es proporcional a la distancia que separa a los planetas del sol al cubo.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3 \qquad F = -\frac{m G^2}{p r^2} = -\frac{mk}{r^2} \qquad k = \frac{G^2}{p}$$

$$k \left| \begin{array}{l} G = 2\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{2\pi ab}{T} \\ p = \dfrac{b^2}{a} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{G^2}{p} = \dfrac{4\pi^2 a^2 b^2 a}{T^2 \cancel{b^2}} = \dfrac{4\pi^2 a^3}{T^2} \\ k' = 4\pi \dfrac{a'^3}{T'^2} \end{array}\right] k = k' \rightarrow \text{Coeficiente atractivo del sol.}$$

Si un cuerpo está sometido a una fuerza newtoniana, la trayectoria que describe es una cónica.

$$F = -\frac{km}{r^2} \qquad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F dr = -\frac{km}{r^2}dr \rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\, d(v^2) = -\frac{k\cancel{m}}{r^2}dr$$

$$d(v^2) = -2k\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2k}{r} + \underset{\uparrow\ \text{cte. de integración}}{h}} \qquad r_0, v_0 \quad h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt} \\ r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = G \rightarrow dt = \dfrac{r^2 d\varphi}{G} \end{array}\right) \qquad v^2 = \frac{G^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{G^2}{r^2} = G^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = \frac{2k}{r} + h$$

$$\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2k}{rG^2} + \frac{h}{G^2} \longrightarrow \left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \left[\frac{1}{r^2} - \frac{2k}{rG^2} + \frac{k^2}{G^4}\right] = \frac{h}{G^2} + \frac{k^2}{G^4}$$

Para hallar la ecuación diferencial y que cuadre todo

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{k}{G^2} + \cos\varphi \sqrt{\frac{k^2}{G^4} + \frac{h}{G^2}}}$$

Ecuación de una cónica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi \longrightarrow \frac{1}{p} = \frac{k}{G^2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{b^2}{a} = \frac{G^2}{k}}$$

$$\frac{e}{p} = \sqrt{\frac{k^2}{G^4} + \frac{h}{G^2}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{hG^2}{k^2}}}$$

~ Energía con una fuerza conservativa

Cuando tenemos un cuerpo sometido a una fuerza central newtoniana, esto implica que sea conservativa, por lo que podemos decir que:

$$E = E_c + E_p$$

$$\vec{F}_{cons} \Rightarrow \exists E_p \,/\, \vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, E_p = -\frac{dE_p}{dr} \longrightarrow dE_p = -F dr = +\frac{km}{r^2} dr$$

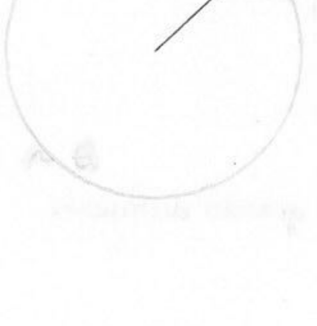
$$E_p = -\frac{km}{r} + C \Rightarrow \boxed{E_p = -\frac{km}{r}}$$

Si $r = \infty \rightarrow E_p = 0$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{km}{r} \longrightarrow \left.\begin{aligned} v^2 &= \frac{2E}{m} + \frac{2k}{r} \\ v^2 &= \frac{2k}{r} + h \end{aligned}\right\} \quad \boxed{h = \frac{2E}{m}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{hG^2}{k^2}} \qquad h = \frac{2E}{m} \qquad F = -\frac{km}{r^2}$$

$k > 0$	$F < 0$	Atractiva	
Elipse	$e < 1$	$h < 0$	$E < 0$
Hipérbola	$e > 1$	$h > 0$	$E > 0$
Parábola	$e = 1$	$h = 0$	$E = 0$
$k < 0$	$F > 0$	Repulsiva	
Hipérbola	$e > 1$	$h > 0$	$E > 0$



Trayectoria circular:

$$F = -\frac{mk}{r^2} = m a_n = m \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Energía potencial efectiva. Estudio de la función $r = r(t)$

$r = r(t) \qquad E_{p_{ef}}$

$$F = F(r) \rightarrow \vec{F} = -\,\vec{grad}\, E_p \qquad E_p = E(r)$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\,dr = -\frac{dE_p}{dr}\,dr \rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p(r)\right) = 0$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \rightarrow v^2 = \frac{2}{m}\left(E - E_p(r)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} \\ r^2\frac{d\varphi}{dt} &= C \rightarrow d\varphi = \frac{C}{r^2}dt \end{aligned}\right\}$$

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2}{m}\left(E - E_p(r)\right)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - E_p(r) - \frac{mC^2}{2r^2}\right] \Rightarrow \boxed{E_{p_{ef}} = E_p(r) + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{C}{r}\right)^2}_{\text{Energía cinética de rotación}}}$$

$$\parallel$$

$$\frac{2}{m}\left(E - E_{p_{ef}}(r)\right)$$

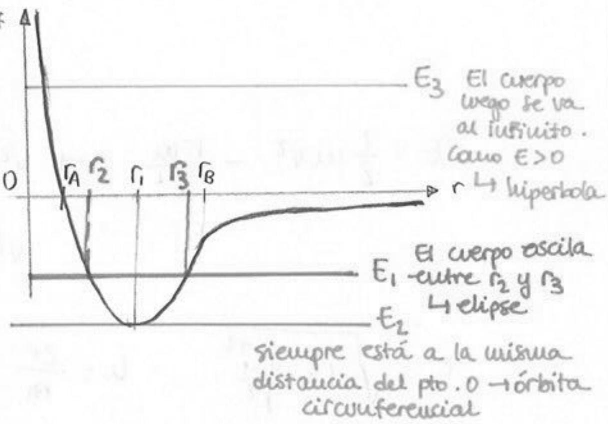
Epotencial centrífuga

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{p_{ef}}(r)\right)}} = dt = \frac{r^2}{C}d\varphi \Rightarrow r = r(\varphi)$$

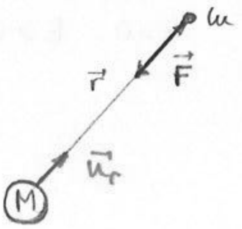
Vamos a aplicarlo al caso de una fuerza newtoniana:

$$F \propto \frac{1}{r^2} \qquad F = -\frac{k}{r^2} \xrightarrow{\text{se incluye tb la masa}} E_p = -\frac{k}{r}$$

$$E_{p_{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2}$$



Campo gravitatorio. Ley y constante de gravitación universal



$$\boxed{\vec{F} = -G\cdot\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r}$$

$$[G] = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ kg^{-1}m^3s^{-2}$$

→ Intensidad de campo gravitatorio $\qquad [g] = [a] = LT^{-2}$

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r}$$

Solo es válida en grandes distancias

El campo gravitatorio es atractivo
Se trata de una fuerza newtoniana

• Energía potencial

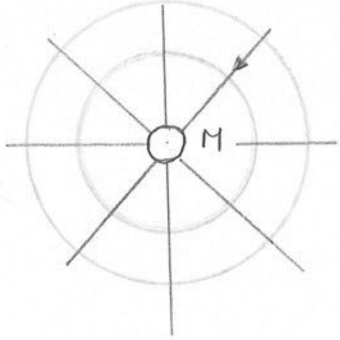
$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, E_p = -\frac{dE_p}{dr} \longrightarrow E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

• Potencial

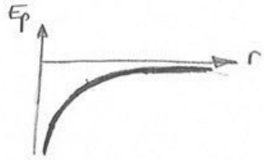
$$\vec{\mathcal{G}} = \vec{\text{grad}}\, V = \frac{d}{}\frac{dV}{dr} \longrightarrow V = -G\frac{M}{r}$$

$$\left.\right\} \quad V = \frac{E_p}{m}$$

Una masa genera un pozo de potencial porque todos los valores de la energía van a ser negativos



Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo



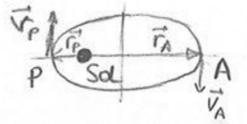
$$\mathcal{G} = -G\cdot\frac{M}{R^2} = 9{,}86\ m/s^2 = g$$

• Velocidad de escape de un cuerpo de la superficie de la Tierra

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r^2} = 0 \longrightarrow v = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = 11\,209\ m/s$$

Cuestiones

1) La velocidad de un planeta del sistema solar es en el perihelio v_p. Determinar, utilizando la ley de las áreas, la velocidad del planeta en el afelio como función de v_p y la excentricidad.



$$|L_0|_P = |L_0|_A \longrightarrow |\vec{r}_P \times m\vec{v}_P| = |\vec{r}_A \times m\vec{v}_A| \longrightarrow r_P v_P = r_A v_A$$

$$v_A = \frac{r_P v_P}{r_A} = \frac{(a-c)}{a+c} v_P = \frac{1-\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}} v_P \Longrightarrow \underline{\underline{v_A = \frac{1-e}{1+e} v_P}}$$

2) Determinar la condición que debe cumplir el producto $r_P v_P^2$ de un cuerpo celeste en la posición más cercana a Sol o perihelio para que la trayectoria sea:

a) Elipse

b) Parábola

c) Hipérbola

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_s m}{r_p}$$

ELIPSE $E < 0$

PARÁBOLA $E = 0$

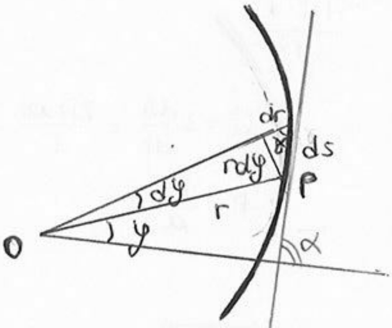
HIPÉRBOLA $E > 0$

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{GM_s m}{r_p} \longrightarrow r_p v_p^2 \underset{>}{\overset{<}{=}} 2GM_s$$

3) Un satélite de Urano describe una órbita circular de radio R y periodo T. Determinar la masa M_U en función de R, T y G.

$$\frac{G M_U \cancel{m_s}}{R^2} = m_s a_N = \cancel{m_s} \frac{v^2}{R} \rightarrow M_U = \frac{R}{G} v^2 = \frac{R}{G} \cdot \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \Rightarrow \boxed{M_U = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}}$$

TEMA 10: Movimiento de un punto bajo fuerzas centrales (RESUMEN)



Fuerza central $\rightarrow \vec{M}_0 = 0 \Longrightarrow \vec{L} = cte$

$\downarrow$

Trayectoria **CÓNICA**

Elipse
Hipérbola
Parábola
Circunferencia

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

$p = \frac{b^2}{a}$ Parámetro de la cónica

$e = \frac{c}{a}$ Excentricidad de la cónica

- Fuerza central

$$\frac{|\vec{L}_0|}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = r \cdot \omega \cdot r \cdot \operatorname{sen} 90^\circ = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_1 \rightarrow \text{constante de las áreas}$$

Velocidad aerolar $\rightarrow \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{2} C_1 = cte.$

Aceleración central $\rightarrow$ Aceleración radial $\rightarrow \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \rho\ddot{\varphi})\vec{u}_\varphi$

$$2\dot{\varphi}\dot{\rho} + \rho\ddot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \rho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C_1$$

Coordenadas $F(r,t)$, $F(\rho,\varphi) = F(r,\varphi)$ $\Big]$ $r^2 \dfrac{d\varphi}{dt} = C_1$ y $v^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}$

$$F(r,t) = m\left(\frac{d^2r}{d^2t} - \frac{C_1^2}{r^3}\right) \quad y \quad F(r,\varphi) = -\frac{mC_1^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d^2\varphi} + \frac{1}{r}\right) \quad \text{Fórmula de BINET}$$

- Concavidad / Convexidad

$r' = \frac{dr}{d\varphi}$

$$C = \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d(\varphi + \operatorname{arctg} r/r')}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}} = \frac{d(\varphi + \operatorname{arctg} r/r')}{d\varphi\sqrt{r'^2 + r^2}} \Longrightarrow \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2r'^2 + r^2 - r \cdot r''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

$\dfrac{d\alpha}{ds} > 0 \Longrightarrow$ CÓNCAVA $\quad ds > 0$, $\Delta\alpha > 0$

$\dfrac{d\alpha}{ds} < 0 \Longrightarrow$ CONVEXA $\quad ds > 0$, $\Delta\alpha < 0$

$$F = -\frac{mC_1^2}{r^5}(r'^2 + r^2)^{3/2} \frac{d\alpha}{ds}$$

$\dfrac{d\alpha}{ds} > 0 \rightarrow F < 0$ CÓNCAVA – ATRACTIVA

$\dfrac{d\alpha}{ds} < 0 \rightarrow F > 0$ CONVEXA – REPULSIVA

Trayectoria cónica $\Longrightarrow F = -\dfrac{mC_1^2}{pr^2}$

$F \propto \dfrac{1}{r^2} \rightarrow$ Fuerza NEWTONIANA

Pto. verifica ley de las áreas $\Longleftrightarrow F_{central}$

Conc / conv $\Longleftrightarrow F_{atrac/repul.}$

Trayectoria cónica $\Longleftrightarrow F_{newtoniana}$

LEYES DE KEPLER

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \qquad F = -\frac{mC^2}{pr^2} = -\frac{mk}{r^2} \longrightarrow k = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

- $C = 2\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi ab}{T}$
- $p = \frac{b^2}{a}$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\,dr = -\frac{mk}{r^2}dr \Longrightarrow v^2 = \frac{2k}{r} + h$$

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2k}{r} + h \Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{k}{C^2} + \cos\varphi\sqrt{\frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$$

Ecuación de una CÓNICA

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C \rightsquigarrow dt$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad \begin{cases} p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{C^2}{k} \\ e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{hC^2}{k^2}} \end{cases}$$

- Energía con una fuerza conservativa

$$\left.\begin{matrix} E = E_c + E_p \\ \exists E_p \end{matrix}\right\} \; -dE_p = -F\,dr = +\frac{mk}{r^2}dr \Longrightarrow E_p = -\frac{mk}{r}$$

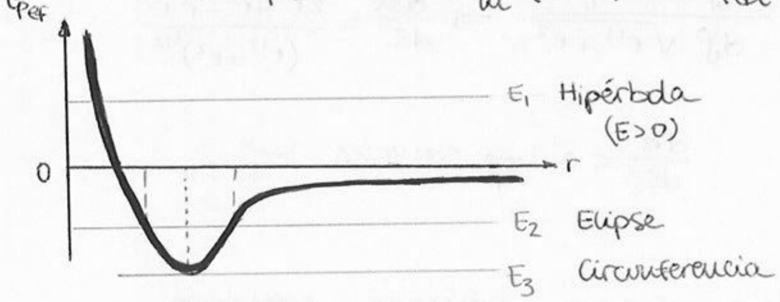
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mk}{r} \longrightarrow v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2k}{r} = \frac{2k}{r} + h \Longrightarrow h = \frac{2E}{m}$$

$k>0$	$F<0$	ATRACTIVA	$k<0$	$F>0$	REPULSIVA
Elipse	$e<1$	$h<0,\ E<0$			
Hipérbola	$e>1$	$h>0,\ E>0$	Hipérbola	$e>1$	$h>0,\ E>0$
Parábola	$e=1$	$h=0,\ E=0$			

- Energía potencial efectiva

$$E = E_c + E_p(r) \longrightarrow v^2 = \frac{2}{m}\left(E - E_p(r)\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Longrightarrow E_{pef} = E_p(r) + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{C}{r}\right)^2}_{\text{Energía cinética de rotación}}$$

ENERGÍA POTENCIAL EFECTIVA



- Campo gravitatorio

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{Ley de GRAVITACIÓN}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\cdot\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{Intensidad}$$

$$\left.\begin{matrix} E_p = -G\dfrac{Mm}{r} \\ V = -G\dfrac{M}{r} \end{matrix}\right\} V = \frac{E_p}{m}$$

E_p: Energía potencial

V: Potencial

$$E = 0 \longrightarrow v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R_T}} = 11209\ m/s$$

Velocidad de escape

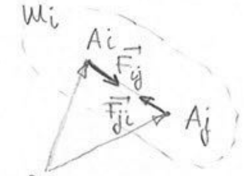
T11- DINÁMICA DE LOS SISTEMAS (I)

Las fuerzas que actúan sobre un pto. material debido a otros puntos del sistema las denominamos fuerzas INTERIORES y las debidas a otros ptos. o elementos ajenos al sistema las llamaremos fuerzas EXTERNAS.

$P_i \qquad m_i \dfrac{d\vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i}$ (Las fuerzas son vectores ligados)

El conjunto de las fuerzas interiores forma un sistema de vectores nulo, es decir, que tanto la resultante como el momento respecto a un punto deben ser nulos.

m_i



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \implies \vec{R} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \qquad \vec{R}_{int} = \sum_{parejas} \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right) = \vec{0}$$

(Son fuerzas de acción y reacción)

$$\vec{M}_0 = \vec{OA_i} \times \vec{F}_{ij} + \vec{OA_j} \times \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{A_j A_i} \times F_{ij}}_{(\parallel)} = 0$$

1. Magnitudes cinéticas

Cantidad de movimiento: $\vec{p} = \Sigma \vec{p_i} = \Sigma m_i \vec{v_i} \longrightarrow \vec{p} = \int \vec{v}\, dm$

$$\left|\begin{array}{l} dm = \lambda dl \\ dm = \sigma dS \\ dm = \rho dV \end{array}\right.$$

Momento cinético: $\vec{L}_0 = \Sigma \vec{L_{0i}} = \Sigma \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} \longrightarrow \vec{L}_0 = \int (\vec{r} \times \vec{v})\, dm$

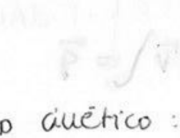
Energía cinética: $E_c = \Sigma E_{c_i} = \frac{1}{2} \Sigma m_i \overset{v^2}{m \vec{v_i}} \longrightarrow E_c = \frac{1}{2} \int m \vec{v} \cdot dm$

2. Teoremas Fundamentales de la Dinámica

1) T. de la cantidad de movimiento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \vec{v_i} = \Sigma \vec{F}_{ext_i} + \overset{0}{\cancel{\Sigma \vec{F}_{int\,i}}} \implies \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}_{ext}}$$

2) T. del centro de masas



$$\vec{r_c} = \frac{\Sigma m_i \vec{r_i}}{M}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}_{ext} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\Sigma m_i \vec{v_i}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\Sigma m_i \vec{r_i}\right) = \vec{R}_{ext}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(M \vec{r_c}) = \vec{R}_{ext} \implies \boxed{M \vec{a}_c = \vec{R}_{ext}}$$

3) T. del momento cinético

$$\text{CENTRAL} \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_{ext_i} + \sum \vec{M}_{int_i} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext_i} + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{int_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right) = \sum \overbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}^{\vec{v}_i} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times \underbrace{m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{F}_{ext_i}} \quad (\parallel)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_{ext \cdot 0}}$$

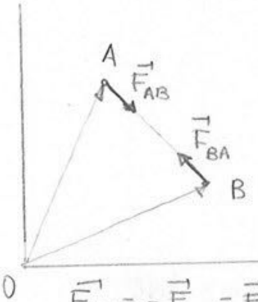
$$\text{AXICO} \quad \frac{d(\vec{L}_0 \cdot \vec{u})}{dt} = \vec{M}_{ext_0} \cdot \vec{u} \rightarrow \frac{dL_u}{dt} = M_u$$

4) T. de la energía cinética

$$dE_c = d\left(\sum \frac{1}{2} m \,\text{mod}\, \vec{v}_i\right) = \sum \vec{F}_{ext_i} \cdot d\vec{r}_i + \sum \vec{F}_{int_i} \cdot d\vec{r}_i \Longrightarrow \boxed{dE_c = \overbrace{dZ_{ext}}^{\text{trabajo}} + dZ_{int}}$$

Normalmente $dZ_{int} \neq 0$; solo es 0 si el sistema es indeformable

· Dem. $dZ_{int} = 0$ en un sist. indeformable



$$\left.\begin{aligned} dZ_A &= \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{OA} \\ dZ_B &= \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{OB} \end{aligned}\right\} \quad dZ_A + dZ_B = \vec{F}_{AB} \cdot d\vec{OA} + \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{OB} = (d\vec{OB} - d\vec{OA})\,\vec{F} = \vec{F} \cdot d\vec{AB}$$

$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \equiv \vec{F}$

$\vec{AB} = \lambda \vec{F}$

Por definición de sistema indeformable, $\frac{d}{dt} \,\text{mod}\, \vec{AB} = 0$

$$\frac{d \,\text{mod}\, \vec{AB}}{dt} = 2\vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{AB} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda \vec{F} \cdot d\vec{AB} &= 0 \\ \lambda &\neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{F} \cdot d\vec{AB} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dZ_{int} = dZ_A + dZ_B = 0$$

5) T. de la energía cinética para movimientos finitos

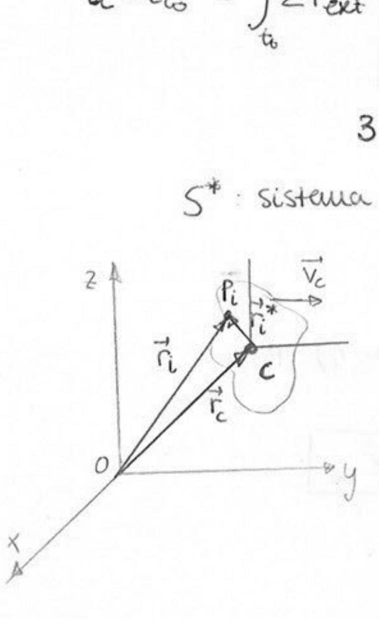
$$d\left(\frac{1}{2} \sum m_i \cdot \text{mod}\, \vec{v}_i\right) = \sum \vec{F}_{ext_i} \cdot \vec{v}_i dt + \sum \vec{F}_{int} \cdot \vec{v}_i dt$$

La variación de la E_c en un intervalo de tiempo finito va a ser igual al trabajo de las fuerzas exteriores e interiores en ese instante.

$$E_c - E_{c_0} = \int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_i dt + \int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_{int} \cdot \vec{v}_i dt$$

3. Sistema de referencia del centro de masas

S^* : sistema del centro de masas que, por lo general, no suele ser un sistema inercial, pues suele estar acelerado (sist. no inercial)



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i^*$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i^*$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_i^*$$

• Magnitudes

Teoremas de KÖNING

1) $\vec{P}^* = \sum m_i \vec{v_i}^* = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum m_i \cdot \vec{r_i}^*}_{\substack{\text{Momento} \\ \text{estático } (=0)}} \Rightarrow \boxed{\vec{P}^* = \vec{0}}$

2) $\vec{L_o} = \sum \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = \sum (\vec{r_c} + \vec{r_i}^*) \times m_i (\vec{v_c} + \vec{v_i}^*)$

$\downarrow$

$\vec{L_o} = \sum \vec{r_c} \times m_i \vec{v_c} + \sum \vec{r_c} \times m_i \vec{v_i}^* + \sum \vec{r_i}^* \times m_i \cdot \vec{v_c} + \sum \vec{r_i}^* \times m_i \vec{v_i}^*$

$\vec{L_o} = \vec{r_c} \times M\vec{v_c} + \cancel{\vec{r_c} \times \frac{d}{dt} \underbrace{\sum m_i \vec{r_i}^*}_{0}} + \cancel{(\underbrace{\sum m_i \vec{r_i}^*}_{0}) \times \vec{v_c}} + \vec{L}^* \Rightarrow \boxed{\vec{L_o} = \vec{r_c} \times M\vec{v_c} + \vec{L}^*}$

3) $E_c = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \text{mor}\,\vec{v_i} = \sum \frac{1}{2} m_i \,\text{mor}\, (\vec{v_c} + \vec{v_i}^*) = \sum \frac{1}{2} m_i \,\text{mor}\, \vec{v_c} + \sum \frac{1}{2} m_i \cdot \text{mor}\, \vec{v_i}^* +$

$+ \cancel{\sum \frac{1}{2} \cdot 2 m_i \cdot \vec{v_c} \cdot v_i^*} \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} M \,\text{mor}\, \vec{v_c} + E_c^*}$

$\vec{v_c} \cdot \frac{d}{dt} (\underbrace{\sum m_i \vec{r_i}}_{0})$

• Teoremas

1) $\frac{d\vec{P}^*}{dt} = 0$

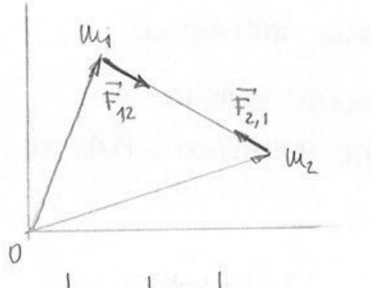
2) $\vec{L}^* = \vec{L_o} - \vec{OC} \times M\vec{v_c} \longrightarrow \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \frac{d\vec{L_o}}{dt} - \cancel{\underbrace{\frac{d\vec{OC}}{dt}}_{\vec{v_c}} \times M\vec{v_c}}^{\,0} - \vec{OC} \times M \cdot \frac{d\vec{v_c}}{dt}$

$(\vec{r_c})$

$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_{ext_o} + \vec{CO} \times \vec{R}_{ext} = \vec{M}_{ext_c} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_{ext_c}}$

3) $dE_c = d\tau_{ext} + d\tau_{int} \Rightarrow \boxed{dE_c^* = d\tau_{ext}^* + d\tau_{int}^*}$

4. Problema de los dos cuerpos. Masa reducida



$$\left.\begin{array}{l} m_1 \frac{d\vec{v_1}}{dt} = \vec{F}_{1,2} \longrightarrow \frac{d\vec{v_1}}{dt} = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} \\ m_2 \frac{d\vec{v_2}}{dt} = \vec{F}_{2,1} \longrightarrow \frac{d\vec{v_2}}{dt} = \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_2} \end{array}\right\} \frac{d}{dt}(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{v}_{1,2}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\mu} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \mu \frac{d\vec{v}_{1,2}}{dt}}$$

$\vec{v}_{1,2}$: velocidad que lleva la partícula 1 observada desde un sistema que tiene su origen en la partícula 2.

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (μ: masa reducida)

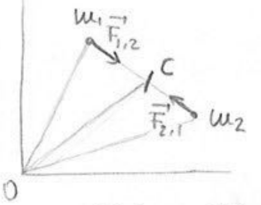
$$\boxed{\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}}$$

Si $m_1 \ll m_2$:

$$\mu = \frac{m_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \approx m_1$$

Se puede aplicar la ley de la dinámica siempre que se identifique a la fuerza como la f. de interacción, μ la masa reducida y hablando de un sistema de referencia situado en una partícula.

Movimiento de estas partículas respecto al centro de masas



$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \vec{v}_1^{\,*} \rightarrow \vec{v}_1^{\,*} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_1^{\,*} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2\,\vec{v}_{12}}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_2^{\,*} \Rightarrow \vec{v}_2 = -\frac{m_1\,\vec{v}_{12}}{m_1+m_2}$$

Las partículas 1 y 2 se mueven con velocidades de sentidos opuestos observadas desde el centro de masas

$$\left.\begin{aligned}\vec{p}_1^{\,*} &= m_1\vec{v}_1^{\,*} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1,2} = \mu\,\vec{v}_{1,2}\\ \vec{p}_2^{\,*} &= m_2\vec{v}_2^{\,*} = -\frac{m_2 m_1}{m_1+m_2}\cdot\vec{v}_{1,2} = \mu\,\vec{v}_{1,2}\end{aligned}\right\} \quad \vec{p}_1^{\,*} = -\vec{p}_2^{\,*} \Rightarrow \vec{p}^{\,*} = 0$$

5. Colisiones

Dos partículas colisionan o chocan cuando el movimiento de ellas se altera. Esto ocurre en un tiempo muy pequeño y solo es debido a la interacción entre las partículas que colisionan. Cuando las partículas que interaccionan son las mismas antes y después de la colisión, se trata de una DISPERSIÓN

Antes	Después
$m_1\ \vec{v}_1$	$m_1'\ \vec{v}_1'$
$m_2\ \vec{v}_2$	$m_2'\ \vec{v}_2'$

Sist. aislado

$$\sum\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = cte}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2'$$

$$dE_c = \cancel{dZ_{ext}} + dZ_{int} \Rightarrow dE_c = dZ_{int}$$

a) $dE_{int} = 0 \rightarrow dE_c = 0 \Rightarrow \boxed{E_c = cte}$ El choque ha sido ELÁSTICO

$$\frac{1}{2}m_1\,\text{mod}\,\vec{v}_1 + \frac{1}{2}m_2\,\text{mod}\,\vec{v}_2 = \frac{1}{2}m_1\,\text{mod}\,\vec{v}_1' + \frac{1}{2}m_2\,\text{mod}\,\vec{v}_2$$

$$\frac{\text{mod}\,\vec{p}_1}{m_1} + \frac{\text{mod}\,\vec{p}_2}{m_2} = \frac{\text{mod}\,\vec{p}_1'}{m_1'} + \frac{\text{mod}\,\vec{p}_2'}{m_2'}$$

b) $\exists dZ_{int} \Rightarrow E_c$ no se conserva $\rightarrow$ El choque ha sido INELÁSTICO

Coeficiente de restitución: $e = -\dfrac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$
- $e = 1 \rightarrow$ Choque PERFECTAMENTE ELÁSTICO
- $e = 0 \rightarrow$ Choque TOTALMENTE INELÁSTICO o PLÁSTICO

6. Calor de reacción

$$Q = E_c' - E_c = \left(\frac{1}{2}\frac{\text{mod}\,\vec{p}_1'}{m_1'} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{mod}\,\vec{p}_2'}{m_2'}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{mod}\,\vec{p}_1}{m_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{mod}\,\vec{p}_2}{m_2}\right)$$

$Q > 0 \rightarrow$ Exoérgica

$Q = 0 \rightarrow$ Elástica

$Q < 0 \rightarrow$ Endoérgica

$\underline{\underline{Q=0}}$ $\quad E_c' = E_c \longrightarrow \boxed{\dfrac{\text{mod}\,\vec{p}_1\,'}{m_1'} + \dfrac{\text{mod}\,\vec{p}_2\,'}{m_2'} = \dfrac{\text{mod}\,\vec{p}_1}{m_1} + \dfrac{\text{mod}\,\vec{p}_2}{m_2}}$

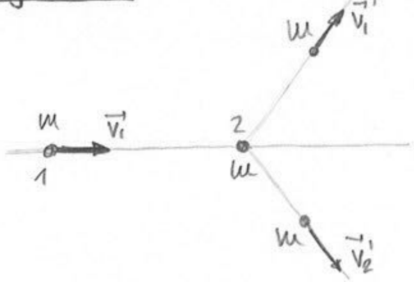
S^{*} (sistema del c.d.m) $\quad \left.\begin{array}{l} \vec{p}_1^{\,*} = -\vec{p}_2^{\,*} \equiv \vec{p}^{\,*} \\ \vec{p}_1^{\,'*} = -\vec{p}_2^{\,'*} \equiv \vec{p}^{\,'*} \end{array}\right\} \quad \left(\dfrac{1}{m_1'} + \dfrac{1}{m_2'}\right)\text{mod}\,\vec{p}^{\,'*} = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\text{mod}\,\vec{p}^{\,*}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dfrac{\text{mod}\,\vec{p}^{\,'*}}{\mu'} = \dfrac{\text{mod}\,\vec{p}^{\,*}}{\mu}}$$

Dispersión: $\mu' = \mu$
$\Downarrow$
$\text{mod}\,\vec{p}^{\,'*} = \text{mod}\,\vec{p}^{\,*}$

Ejercicios.



1) En la figura se presenta un choque perfectamente elástico con una masa m y otra de la misma masa pero en reposo. La primera partícula tiene una velocidad $\vec{v}_1 = v_1\vec{i}$. A partir de la conservación de la cantidad de mov. y de la energía, demostrar que v_1' y v_2', que no son nulos, forman un ángulo ϕ igual a $\pi/2$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \vec{p} = \text{cte} \longrightarrow \cancel{m}\vec{v}_1 + \cancel{m\vec{v}_2} = \cancel{m}\vec{v}_1\,' + \cancel{m}\vec{v}_2\,' \longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1\,' + \vec{v}_2\,' \quad (v_2 = 0) \\ \bullet\ E_c = \text{cte} \longrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \longrightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{array}\right\}$$

$$(\text{mod}\,\vec{v}_1 = \text{mod}\,\vec{v}_1\,' + \text{mod}\,\vec{v}_2\,')$$

$$\text{mod}\,(\vec{v}_1\,' + \vec{v}_2\,') = \text{mod}\,\vec{v}_1\,' + \text{mod}\,\vec{v}_2\,' \longrightarrow \cancel{\text{mod}\,\vec{v}_1\,'} + \cancel{\text{mod}\,\vec{v}_2\,'} + 2\vec{v}_1\,'\cdot\vec{v}_2\,' = \cancel{\text{mod}\,\vec{v}_1\,'} + \cancel{\text{mod}\,\vec{v}_2\,'}$$

$$2v_1 v_2 \cos\phi = 0 \longrightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\phi = \frac{\pi}{2}}}$$

2) En la figura se representa una partícula $m = m_1$ cuya velocidad es $\vec{v}_1 = 8\vec{i}$ y otra partícula $m = m_2$ que está en reposo. Si después del choque elástico, $\vec{v}_1\,' = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$, determinar λ y $\vec{v}_2$.

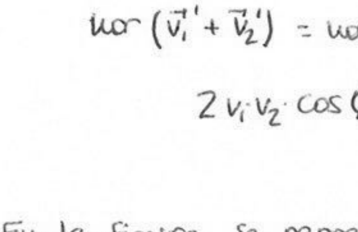
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \vec{p} = \text{cte} \Rightarrow \cancel{m}\vec{v}_1 + \cancel{m\vec{v}_2} = \cancel{m}\vec{v}_1\,' + \cancel{m}\vec{v}_2\,' \longrightarrow 8\vec{i} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{v}_2\,' \\ \bullet\ E_c = \text{cte} \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \longrightarrow 64 = 4 + \lambda^2 + v_2'^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \vec{v}_2\,' = 6\vec{i} - \lambda\vec{j}$$

$\hookrightarrow 64 = 4 + \lambda^2 + 36 + \lambda^2 \longrightarrow 2\lambda^2 = 24 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 2\sqrt{3}}$

solo el ⊕ por $\vec{v}_1\,'$ (dib)

$$\underline{\underline{\vec{v}_2\,' = 6\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j}}}$$

3)



$$\vec{p} = \text{cte} \longrightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}\,' \longrightarrow \vec{v}\,' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \vec{V}_c$$

$$Q = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

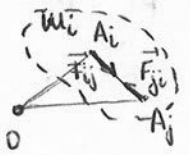
$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{m_1^2v_1^2} + \cancel{m_2^2v_2^2} + 2m_1v_1m_2v_2 - \cancel{m_1^2v_1^2} - m_1m_2v_1^2 - m_1m_2v_2^2 - \cancel{m_2^2v_2^2}}{m_1+m_2}\right)$$

$$Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(2v_1v_2 - v_1^2 - v_2^2) = -\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2}\mu v_{12}^2 \Rightarrow \underline{\underline{Q<0}} \text{ siempre}$$

TEMA 11: Dinámica de los sistemas (I)

(RESUMEN)

$$P_i \longrightarrow m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{d^2t} = \vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i}$$



$\Sigma \vec{F}_{int} = \vec{0}$ $\quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \longrightarrow \vec{R} = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{R}_{int} = \sum_{parejas} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}$

(Fuerzas acción/reacción)

$$\vec{M}_O = \vec{OA_i} \times \vec{F}_{ij} + \vec{OA_j} \times \vec{F}_{ji} = \vec{A_jA_i} \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

- Magnitudes cinéticas

1) Cantidad de movimiento: $\vec{p} = \Sigma \vec{p}_i = \Sigma m_i \vec{v}_i \quad // \quad \vec{p} = \int \vec{v}\, dm \qquad dm = \begin{cases} \lambda\, dl \\ \sigma\, dS \\ \rho\, dV \end{cases}$

2) Momento cinético: $\vec{L}_O = \Sigma \vec{L}_{O_i} = \Sigma \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad // \quad \vec{L}_O = \int (\vec{r} \times \vec{v})\, dm$

3) Energía cinética: $E_c = \Sigma E_{c_i} = \frac{1}{2} \Sigma m_i \cdot \underbrace{\text{mod } \vec{v}_i}_{v_i^2} \quad // \quad E_c = \frac{1}{2} \int \text{mod } \vec{v}\, dm$

- Teoremas de la Dinámica

1) Tma. cantidad de movimiento: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}_{ext.}$

Tma. centro de masas: $M\vec{a}_C = \vec{R}_{ext.}$

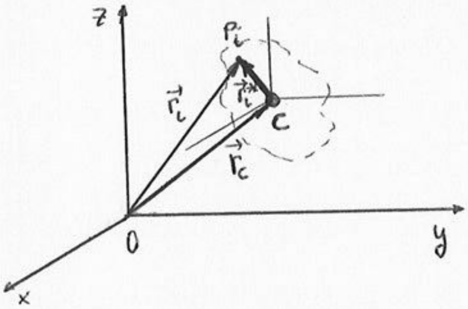
2) Tma. momento cinético
- Central $\longrightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{ext_O}$
- Áxico $\longrightarrow \frac{dL_u}{dt} = M_u$

3) Tma. energía cinética: $dE_c = d\mathcal{T}_{ext} + \underbrace{d\mathcal{T}_{int}}_{0 \text{ SOLO en sist. INdeformable}}$ $\quad$ ($d\mathcal{T}$ = trabajo)

Tma. E_c para movimientos finitos: $E_c - E_{c_0} = \int_{t_0}^{t} \Sigma \vec{F}_{ext_i} \vec{v}_i\, dt + \int_{t_0}^{t} \Sigma \vec{F}_{int_i} \cdot \vec{v}_i\, dt$

Sistema de referencias del centro de masas: S^*

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i^{\,*} \quad // \quad \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^{\,*} \quad / \quad \vec{a}_i = \vec{a}_C + \vec{a}_i^{\,*}$$



Magnitudes

1) $\vec{p}^{\,*} = \vec{0}$ $\quad (\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i = 0)$ Momento estático

2) $\vec{L}_O = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \vec{L}^{*}$

3) $E_c = \frac{1}{2} M \text{mod } \vec{v}_C + E_c^{*}$

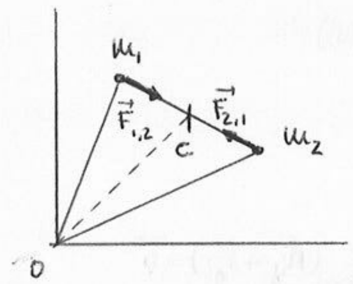
Teoremas

$\frac{d\vec{p}^{\,*}}{dt} = 0$

$\frac{d\vec{L}^{*}}{dt} = \vec{M}_{ext_C}$

$dE_c^{*} = d\mathcal{T}_{ext}^{*} + d\mathcal{T}_{int}^{*}$

Masa reducida



$\vec F = \mu \cdot \frac{d\vec v_{1,2}}{dt}$ siendo $\underbrace{\mu}_{\text{masa reducida}} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$

$\boxed{\text{c.d.m}}$

$\vec v_1 = \vec v_c + \vec v_1^* \to \vec v_1^* = \vec v_1 - \frac{\sum m_i \vec r_i}{M} = \frac{m_2 \vec v_{12}}{m_1 + m_2}$

$\vec v_2 = \vec v_c + \vec v_2^* \to \vec v_2^* = \vec v_2 - \frac{\sum m_i \vec r_i}{M} = -\frac{m_1 \vec v_{12}}{m_1 + m_2}$

$\vec p_1^* = \vec p_2^*$

$\Downarrow$

$\vec p^* = 0$

Colisiones

Antes: $m_1, \vec v_1$
$m_2, \vec v_2$

Después: $m_1', \vec v_1'$
$m_2', \vec v_2'$

Sist. aislado $\to \sum \vec F = 0 \Rightarrow \vec p = cte \to \vec p_{antes} = \vec p_{después}$

$\to dE_c = \cancel{dZ_{ext}} + dZ_{int} \Rightarrow dE_c = dZ_{int}$

$dZ_{int} = 0 \to E_c = cte \Rightarrow$ Choque ELÁSTICO $\rightsquigarrow e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = 1$

$dZ_{int} \neq 0 \to E_c \neq cte \Rightarrow$ Choque INELÁSTICO $\rightsquigarrow e = 0$

Calor de reacción $\to Q = E_c' - E_c$

$Q > 0$: exoérgica
$Q = 0$: elástica
$Q < 0$: endoérgica

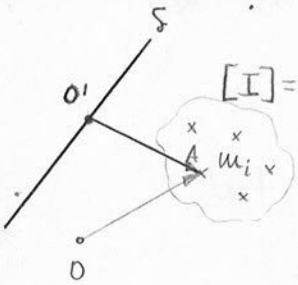
Si $Q = 0 \to E_c' = E_c \Rightarrow \frac{\text{mod}\,\vec p_1'}{m_1'} + \frac{\text{mod}\,\vec p_2'}{m_2'} = \frac{\text{mod}\,\vec p_1}{m_1} + \frac{\text{mod}\,\vec p_2}{m_2}$

$\boxed{\text{c.d.m}}$ $\vec p_1^* = -\vec p_2^* = \vec p^*$
$\vec p_1'^* = -\vec p_2'^* = \vec p'^*$ $\Rightarrow \frac{\text{mod}\,\vec p'^*}{\mu'} = \frac{\text{mod}\,\vec p^*}{\mu}$

Dispersión: $\mu' = \mu \to \text{mod}\,\vec p'^* = \text{mod}\,\vec p^*$
$m_1' = m_1$
$m_2' = m_2$

T12 – DINÁMICA DE LOS SISTEMAS (II)

1. Momentos de inercia centrales, áxicos y planarios. Relaciones entre ellos



$[I] = M \cdot L^2$

~ Central o respecto de un punto $I_0 = \sum m_i \,\text{nor}\, \vec{OA} = \sum m_i \,\text{nor}\, \vec{r_i}$

~ Áxico o respecto de un eje $I_\delta = \sum m_i \cdot \text{nor}\left[(\vec{u} \times \vec{r_i}) \times \vec{u}\right]$

~ Planario o respecto de un plano $I_\Pi = \sum m_i \, (\vec{u} \cdot \vec{r_i})^2$

Si se trata de un sistema de masa continuo:

$$I_0 = \int \text{nor}\, \vec{r}\, dm \qquad I_\delta = \int \text{nor}\left[(\vec{u} \times \vec{r}) \times \vec{u}\right] dm \qquad I_\Pi = \int \text{nor}\, (\vec{u} \cdot \vec{r})^2\, dm$$

→ Cambio de definición del momento de inercia de una recta

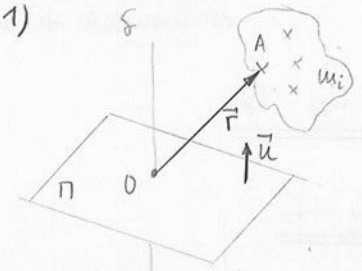
$\text{nor}\,(\vec{a} \times \vec{b}) = \text{nor}\,\vec{a}\; \text{nor}\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ siendo $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{r_i}$ y $\vec{b} = \vec{u}$

↓

$$I_\delta = \sum m_i \left[\text{nor}\,(\vec{u} \times \vec{r_i})\, \underset{1}{\text{nor}\,\vec{u}} - \cancel{\left[(\vec{u} \times \vec{r_i}) \cdot \vec{u}\right]^2}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} I_\delta = \sum m_i \cdot \text{nor}\,(\vec{u} \times \vec{r_i}) \\ I_\delta = \int \text{nor}\,(\vec{u} \times \vec{r})\, dm \end{array}$$

→ Relación entre ellos

1)

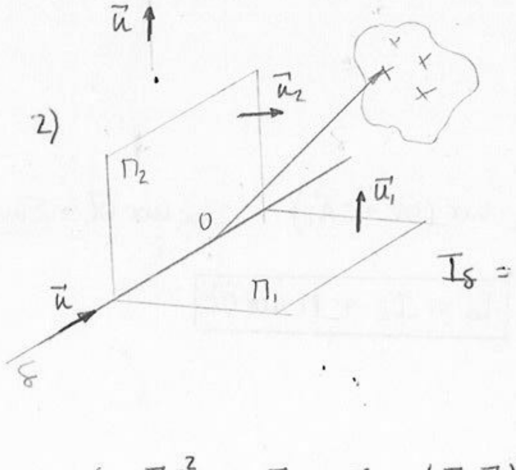


$$I_\delta = \sum m_i \cdot \text{nor}\,(\vec{u} \times \vec{r_i}) = \sum m_i \left[\text{nor}\,\vec{u} \cdot \text{nor}\,\vec{r_i} - (\vec{u} \cdot \vec{r_i})^2\right]$$

↓

$$I_\delta = \underbrace{\sum m_i \cdot \text{nor}\,\vec{r_i}}_{I_0} - \underbrace{\sum m_i (\vec{u} \cdot \vec{r_i})^2}_{I_\Pi} \Rightarrow \boxed{I_0 = I_\delta + I_\Pi}$$

2)



$$\vec{u} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$$

$$I_\delta = \sum m_i \cdot \text{nor}\,(\vec{u} \times \vec{r_i}) = \sum m_i \cdot \text{nor}\left[(\vec{u_1} \times \vec{u_2}) \times \vec{r_i}\right]$$

$$I_\delta = \sum m_i \cdot \text{nor}\left[\overset{\text{escalar}}{(\vec{u_1} \cdot \vec{r_i})} \cdot \vec{u_2} - (\vec{u_2} \cdot \vec{r_i}) \cdot \vec{u_1}\right]$$

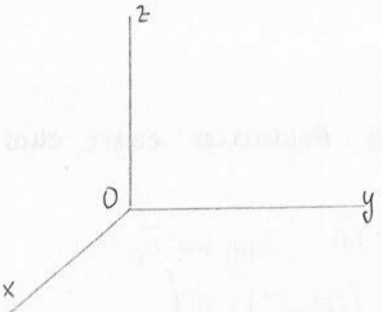
$\text{nor}\,(\vec{a} + \vec{b}) = \text{nor}\,\vec{a} + \text{nor}\,\vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\text{nor}\,(\lambda \vec{a}) = \lambda^2 \cdot \text{nor}\,\vec{a}$

$$I_\delta = \sum m_i (\vec{u_1} \cdot \vec{r_i})^2 \cdot \underset{1}{\text{nor}\,\vec{u_2}} + \sum m_i (\vec{u_2} \cdot \vec{r_i})^2 \cdot \underset{1}{\text{nor}\,\vec{u_1}} - \cancel{2\left[(\vec{u_1} \cdot \vec{r_i}) \underbrace{\vec{u_2} \cdot (\vec{u_2} \cdot \vec{r_i}) \cdot \vec{u_1}}_{\perp}\right]}$$

$$I_\delta = \underbrace{\sum m_i (\vec{u_1} \cdot \vec{r_i})^2}_{I_{\Pi_1}} + \underbrace{\sum m_i (\vec{u_2} \cdot \vec{r_i})^2}_{I_{\Pi_2}} \Rightarrow \boxed{I_\delta = I_{\Pi_1} + I_{\Pi_2}}$$ siendo $\Pi_1 \perp \Pi_2$ y δ la recta intersección

→ Triedro cartesiano



$$\left.\begin{array}{l} I_0 = I_x + I_{yz} \\ I_0 = I_y + I_{zx} \\ I_0 = I_z + I_{xy} \end{array}\right] 3I_0 = (I_x + I_y + I_z) + (I_{xy} + I_{yz} + I_{zx})$$

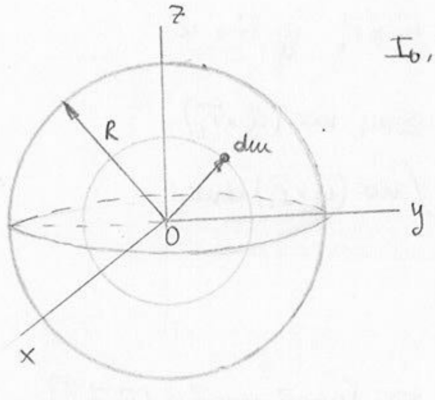
$$\left.\begin{array}{l} I_x = I_{zx} + I_{xy} \\ I_y = I_{xy} + I_{yz} \\ I_z = I_{yz} + I_{zx} \end{array}\right] I_x + I_y + I_z = 2(I_{xy} + I_{yz} + I_{zx})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)}$$

Ej. Calcular el momento de inercia de una esfera maciza respecto a su centro, respecto a un eje diametral y respecto a un plano diametral.



I_0, I_x, I_{xy}?

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = \int mod\,\vec{r}\cdot dm = \int r^2 dm \\ dm = \rho\, dv = \rho\, 4\pi r^2 dr \end{array}\right\} I_0 = \rho 4\pi \int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho \cdot \frac{R^5}{5}$$

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \underline{\underline{I_0 = \frac{3}{5} M R^2}}$$

No sabemos si el coeficiente está bien, pero sí las dimensión del momento de inercia

$$I_0 = 3I_{xy} \rightarrow I_{xy} = \frac{1}{3} I_0 \Rightarrow \underline{\underline{I_{xy} = \frac{1}{5} MR^2 = I_{yz} = I_{zx}}}$$

$$I_0 = \frac{3}{2} I_x \rightarrow I_x = \frac{2}{3} I_0 \Rightarrow \underline{\underline{I_x = \frac{2}{5} MR^2 = I_y = I_z}}$$

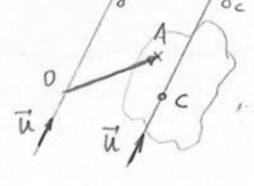
2. Teoremas de Steiner

1º- $\underline{I_0, I_C}$

$$I_0 = \Sigma m_i \cdot mod\,\vec{OA}_i = \Sigma m_i \cdot mod(\vec{OC} + \vec{CA}_i) = \Sigma m_i\, mod\,\vec{OC} + \underbrace{\Sigma m_i \cdot mod\,\vec{CA}_i}_{I_C} +$$

$$+ \underbrace{2\Sigma m_i \cdot \vec{OC}\cdot\vec{CA}_i}_{2\vec{OC}\cdot\underbrace{\Sigma m_i \vec{CA}_i}_{0 \text{ (Momento estático)}}} \Rightarrow \boxed{I_0 = I_C + M \cdot mod\,\vec{OC}}$$

2º- $\underline{I_\delta, I_{\delta_c} \quad \delta // \delta_c}$



$$I_\delta = \Sigma m_i\, mod(\vec{u} \times \vec{OA}_i) = \Sigma m_i \cdot mod\left[\vec{u} \times (\vec{OC} + \vec{CA}_i)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I_\delta = I_{\delta_c} + M \cdot mod(\vec{u} \times \vec{OC})}$$

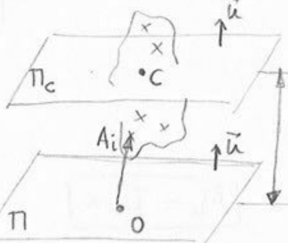
$\vec{u} \times \vec{OC} = |\vec{u}||\vec{OC}| \operatorname{sen}\theta$

$\theta = 90° \rightarrow \vec{u} \times \vec{OC} = |\vec{OC}|$

$\Downarrow$

$mod(|\vec{OC}|) = |\vec{OC}|^2$

3º.- I_Π, I_{Π_c} $\Pi // \Pi_c$



$$I_\Pi = \Sigma m_i \cdot (\vec{u} \cdot \vec{OA_i})^2 = \Sigma m_i \left[\vec{u} \cdot (\vec{OC} + \vec{CA_i})\right]$$

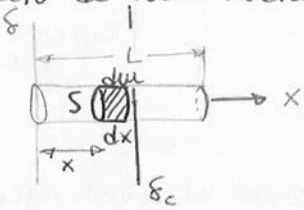
$$\downarrow$$

$$I_\Pi = I_{\Pi_c} + M(\vec{u} \cdot \vec{OC})^2 \Rightarrow \boxed{I_\Pi = I_{\Pi_c} + Md^2}$$

distancia entre los planos Π y Π_c

Dado un sistema de masas, calcular el momento de inercia mínimo respecto de un punto $\Rightarrow$ se calcula respecto al centro de masas.

Ej 1) Calcular el momento de inercia de una barra homogénea de sección S y longitud L que posee una masa m respecto de una recta que pasa por uno de los extremos y es perpendicular a la barra.



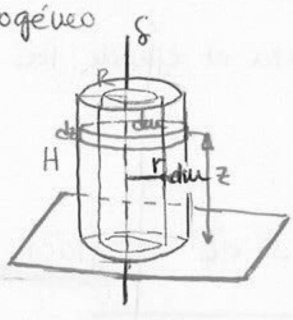
$$I_\delta = \int x^2 dm = \rho S \int_0^L x^2 dx = \rho S \cdot \frac{L^3}{3}$$

$dm = \rho dV = \rho S dx$

$M = \rho V = \rho S L \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{I_\delta = \frac{1}{3} M L^2}}$

I_{δ_c}? $\quad I_\delta = I_{\delta_c} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \rightarrow I_{\delta_c} = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow \underline{\underline{I_{\delta_c} = \frac{1}{12} ML^2}}$

2) Calcular el momento de inercia respecto del eje de revolución del cilindro macizo y homogéneo



$\bullet\ I_\delta = \int r^2 dm = \rho\, 2\Pi H \int_0^R r^3 dr = \rho \cdot 2\Pi H \cdot \frac{R^4}{4}$

$dm = \rho dV = \rho\, 2\Pi r H dr$

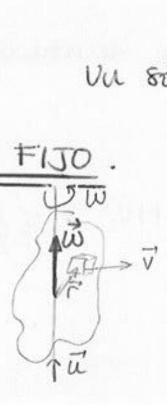
$M = \rho V = \rho \Pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{I_\delta = \frac{1}{2} M R^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ I_\Pi = \int z^2 dm \\ dm = \rho\, dV = \rho \Pi R^2 dz \end{array}\right\} I_\Pi = \rho \Pi R^2 \int_0^H z^2 dz = \rho \Pi R^2 \frac{H^3}{3} \Rightarrow \underline{\underline{I_\Pi = \frac{1}{3} M H^2}}$$

3. Dinámica del sólido rígido

Un sólido rígido puede girar o rotar en torno a un eje fijo o no fijo

EJE FIJO.



$$L_u = \int (\vec{r}, \vec{v}, \vec{u})\, dm \Rightarrow L_u = |\vec{\omega}| \int (\vec{r}, \vec{u} \times \vec{r}, \vec{u})\, dm = |\vec{\omega}| \int (\vec{u}, \vec{r}, \underbrace{\vec{u} \times \vec{r})}_{(\vec{u} \times \vec{r}) \cdot (\vec{u} \times \vec{r})}\, dm$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{\omega} = |\vec{\omega}| \vec{u} \end{array}\right\} \vec{v} = |\vec{\omega}|\, \vec{u} \times \vec{r} \qquad L_u = |\omega| \underbrace{\int mod(\vec{u} \times \vec{r})\, dm}_{I_u} \Rightarrow \boxed{L_u = I_u |\omega|}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\int \text{nor}\,\vec{v}\,dm = \frac{1}{2}\int \text{uor}\,(|\omega|\vec{u}\times\vec{r})\,dm = \frac{1}{2}|\omega|^2\int \text{uor}\,(\vec{u}\times\vec{r})\,dm \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2} I_u \cdot \omega^2}$$

<u>Ec. Fundamental del mov. de rotación del sólido rígido</u>

$$\frac{dL_u}{dt} = M_u \rightarrow \underbrace{\cancel{\frac{dI_u}{dt}}}_{0 \text{ porque } I_u = cte}|\omega| + I_u\frac{d|\omega|}{dt} = M_u \Rightarrow \boxed{M_u = I_u\alpha}$$

$L_u = I_u|\omega|$

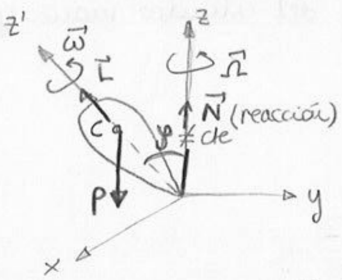
$L_u \begin{cases} \vec{L_0}\cdot\vec{u} \\ \vec{L_c}\cdot\vec{u}\end{cases}$ Supongamos que la única fuerza externa que actúa sobre el sólido rígido es su peso. La recta soporte del peso pasa por el centro de masas y, por tanto, $\vec{M_c} = 0$

$$\vec{M_c} = 0 \begin{cases} \vec{M_c}\cdot\vec{u} = M_u = 0 \rightarrow \dfrac{dL_u}{dt} = 0 \Rightarrow L_u = cte \quad I_u|\omega| = cte \;\begin{cases} I_u = cte & \omega = cte \\ I_u \neq cte & \omega \neq cte \; (\text{Patinador}) \end{cases} \\ \vec{M_c} = \dfrac{d\vec{L_c}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L_c} = \vec{cte} \end{cases}$$

$\not\parallel$

$\vec{L} = I\vec{\omega} \rightarrow$ solo válido cuando el sólido rígido tiene al menos tres direcciones perpendiculares entre sí, llamadas ejes principales de inercia, y el eje en torno al que gira pasa por el centro de masas

<u>EJE NO FIJO</u>. (Peonza)



Cuando el eje no permanece fijo, estamos ante un movimiento Filoscópico.
El movimiento de precesión es el que realiza el eje de la peonza y su eje en torno al eje Z.

$$\vec{M} = \vec{OC} \times \underbrace{(-mg\vec{k})}_{\vec{P}} = mg\vec{k}\times\vec{OC}$$

En torno a z'

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{\Omega}\times\vec{L}$$

En torno a z

$\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$mg\vec{k}\times\vec{OC} = \vec{\Omega}\times\vec{L} \rightarrow mg|\vec{OC}| = |\vec{\Omega}||\vec{L}|$$

$$\boxed{\Omega = \frac{mg|OC|}{L} = \frac{mg|\vec{OC}|}{I|\omega|}} \quad \omega \gg \Omega$$

4. Teoremas de Koening

$\vec{P} = M\vec{v_c}$

$\vec{L_0} = \vec{L}^* + \vec{OC}\times M\vec{v_c}$

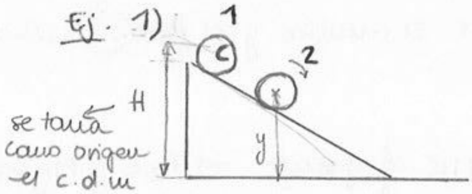
$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}Mv_c^2$

Sist. de partículas que solo tuviese un mov. de rotación en torno al c.d.m

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si además se desplaza el c.d.m.: $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 = \sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$

Ej. 1)



• Calcular la velocidad en cualquier posición del plano inclinado y cuando haya tocado el suelo.

Para cualquier punto:

$$\left.\begin{array}{l} 1: E_p = MgH \\ 2: E_p + E_c = Mgy + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cancel{M}gH = \cancel{M}gy + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2}{5}\cancel{M}R^2\right)}_{\text{ESFERA}}\left(\frac{v_c}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}v_c^2$$

$v = \omega R$; $\omega = \frac{v}{R}$

Tª conserv. de la E : $E_1 = E_2$

$$g(H-y) = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)v_c^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-y)}$$

Independiente de cualquier esfera que se utilice.

Cuando ya ha llegado al suelo, $y = 0 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$ velocidad de deslizamiento

• Si la esfera no desliza:

$$E_p = E_c \rightarrow MgH = \frac{1}{2}Mv_c^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{2gH} \quad \text{velocidad de rodadura}$$

2) ¿Quién llega antes al final del plano? Tenemos un aro fino, una canica, una batería sólida cilíndrica, una lata vacía de sopa, otra llena, y, además, una caja engrasada que desliza sin rozamiento.

$$\cancel{M}gH = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 = \frac{1}{2}(K\cancel{M}\cancel{R^2})\frac{v_c^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2}\cancel{M}v_c^2 \rightarrow gH = cte = \frac{1}{2}(k+1)v_c^2$$

si $k\uparrow$, $v\downarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Aro}: & k = 1 \quad pq & I = MR^2 \\ \text{Canica}: & k = \frac{2}{5} \quad pq & I = \frac{2}{5}MR^2 \\ \text{Batería}: & k = \frac{1}{2} \quad pq & I = \frac{1}{2}MR^2 \end{array}\right\}$$

$k = \frac{2}{5} \rightarrow$ Esfera

$k = \frac{1}{2} \rightarrow$ Cilindro

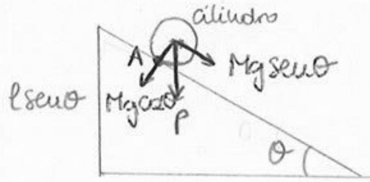
$v_{aro} < v_{batería} < v_{canica}$

$v_{lata\ vacía} < v_{lata\ llena}$

Es como un aro pero con más masa

↳ El fluido no es homogéneo, no como en la batería que sí lo es

3) Un cilindro macizo homogéneo de radio R está rodando sin deslizar por un plano inclinado un ángulo θ. Calcular la aceleración de traslación del cilindro



1er método: $E_p = E_c \longrightarrow Mgl\,sen\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2$

cilindro gira en torno al eje de revolución

$$\cancel{M}gl\,sen\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cancel{M}\cancel{R^2}\right)\left(\frac{v_c}{\cancel{R}}\right)^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}v_c^2 = \frac{3}{4}v_c^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gl\,sen\theta}$$

Lo sabemos de cinemática: $v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$

$$v_c = \sqrt{2al} = \sqrt{\frac{4}{3}gl\,sen\theta} \rightarrow 2a\cancel{l} = \frac{4}{3}g\cancel{l}sen\theta \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\,sen\theta$$

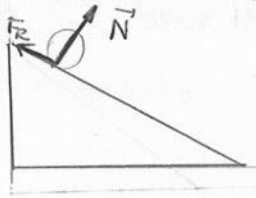
2º método: En torno al EIR

$$M = I_A\alpha \rightarrow \cancel{R}\cancel{M}g\,sen\theta = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\alpha = \frac{3}{2}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\cdot\frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\,sen\theta$$

Steiner: $I_A = I + Md^2$

$v = \omega R$
$a = \alpha R$

Determinar la fuerza de rozamiento mínima entre el cilindro y el plano necesaria para asegurar que no hay deslizamiento



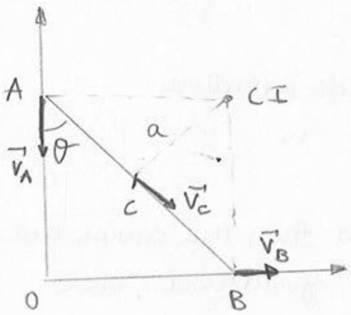
1º.- $M_c = I_c\,\alpha \rightarrow F_r R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R \cdot \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta \Rightarrow F_r = \frac{1}{3} M g \operatorname{sen}\theta$

2º.- $M g \operatorname{sen}\theta - F_r = Ma \rightarrow F_r = M(g \operatorname{sen}\theta - a) = M(g\operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta)$

$\Downarrow$

$F_r = \frac{1}{3} M g \operatorname{sen}\theta$

4) Una barra homogénea de longitud 2a y masa m se mueve apoyándose en dos ejes ortogonales XOY. a) Hallar la cantidad de movimiento en función de θ y $\dot\theta\,(\omega)$
b) Calcular el momento cinético de la barra respecto al origen
c) Calcular la energía cinética de la barra



a) $\left.\begin{array}{l}\vec{p} = M\vec{v}_c \\ v_c = \omega a = \dot\theta a\end{array}\right\}$ $p = Ma\dot\theta$

b) $\vec{L}_0 = \vec{L}^* + \vec{OC} \times M\vec{v}_c$

$\vec{L}^* = I_c \vec\omega = \frac{1}{12} M L^2 \omega \vec{k} = \frac{1}{12} M (2a)^2 \dot\theta \vec{k}$

$\vec{OC} = a\cdot\cos(90^\circ-\theta)\vec{i} + a\operatorname{sen}(90^\circ-\theta)\vec{j} = a\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + a\cos\theta\,\vec{j}$

$\vec{v}_c = \frac{d\vec{OC}}{d\theta} = a\dot\theta\cos\theta\,\vec{i} + a\dot\theta\operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$

$$\vec{L}_0 = \frac{1}{12} M (4a^2)\dot\theta\vec{k} + M\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\operatorname{sen}\theta & a\cos\theta & 0 \\ a\dot\theta\cos\theta & -a\dot\theta\operatorname{sen}\theta & 0\end{vmatrix} = \left[\frac{1}{3} M a^2\dot\theta + M(\underbrace{-a^2\dot\theta\operatorname{sen}^2\theta - a^2\dot\theta\cos^2\theta}_{-a^2\dot\theta})\right]\vec{k}$$

$\Downarrow$

$\vec{L}_0 = \left(\frac{1}{3}-1\right) M a^2 \dot\theta = -\frac{2}{3} M a^2 \dot\theta \vec{k}$

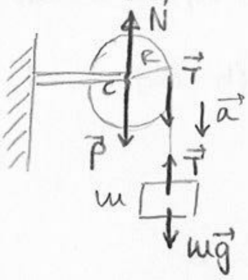
c) $E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M v_c^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} M a^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) M\omega^2 a^2 = \frac{2}{3} M a^2 \dot\theta^2$

$E_c^* = \frac{1}{2} I_c \omega^2 \rightarrow I_c = \frac{1}{12} M L^2 = \frac{1}{12} M (2a)^2 = \frac{1}{3} M a^2$

$E_c = \frac{1}{2} I_{CIR}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} M a^2 \omega^2 = \frac{2}{3} M a^2 \dot\theta^2$

$I_{CIR} = I_c + Ma^2 = \frac{1}{3} M a^2 + M a^2 = \frac{4}{3} M a^2$

5) Se sujeta un objeto de masa m a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de momento de inercia I y radio R. La rueda puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza por su borde. Hallar la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo



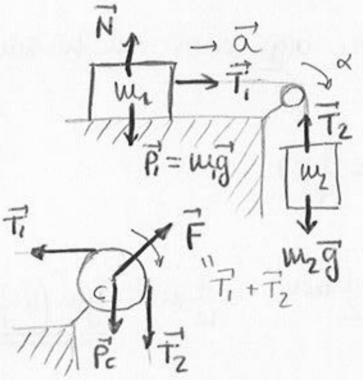
$$\left.\begin{aligned} mg - T &= ma \\ \mathcal{M} = I_c\alpha &\rightarrow TR = I\alpha \\ a &= \alpha R \end{aligned}\right\}$$

momento

$$a = \frac{mgR^2}{mR^2 + I}$$

$$T = \frac{mgI}{mR^2 + I}$$

6) Dos bloques están conectados por una cuerda que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I. El bloque de masa m_1 desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El bloque de masa m_2 está suspendido de la cuerda. Determinar la aceleración de los bloques y las tensiones T_1 y T_2 suponiendo que la cuerda no desliza sobre la polea.



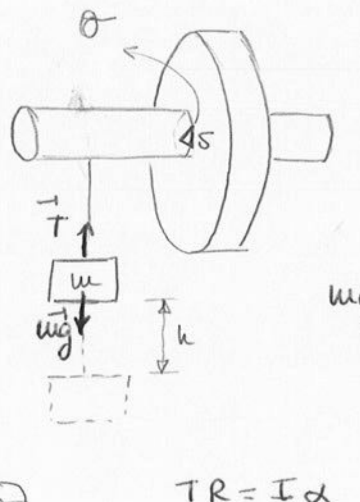
$$\left.\begin{aligned} T_1 &= m_1 a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a \\ T_2 \cdot R - T_1 \cdot R &= I\alpha \\ a &= \alpha R \end{aligned}\right\}$$

$$a = \frac{m_2 g R^2}{I + R^2(m_1 + m_2)}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g R^2}{I + R^2(m_1 + m_2)}$$

$$T_2 = \frac{m_2 g (I + R^2 m_1)}{I + R^2(m_1 + m_2)}$$

7) El volante se pone en rotación mediante un peso de masa m. Nos dan el momento de inercia total (volante + eje) I y el momento de las fuerzas resistentes de los cojinetes de apoyo. Calcular el valor de la aceleración angular de la rueda y la velocidad angular cuando el peso ha descendido una altura h desde el reposo.



α, ω?

$$mg - T = ma \quad (1)$$

$$TR = I\alpha$$

$$TR - M_f = I\alpha \quad (2)$$

$$a = \alpha R \quad (3)$$

$$\boxed{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{M_f - mgR}{I + mR^2} = cte.$$

$$\boxed{\omega} \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \left.\begin{aligned} \omega_0 &= 0 \text{ rad/s} \\ \theta_0 &= 0 \text{ rad} \end{aligned}\right\} \; h = s = R\theta$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{2\frac{h}{a}}$$

$$v = at \rightarrow v = a\sqrt{2\frac{h}{a}} \Rightarrow v^2 = 2ha$$

$$v^2 = \omega^2 \cancel{R^2} = 2s\alpha R = 2\cancel{R}\theta\alpha\cancel{R}$$

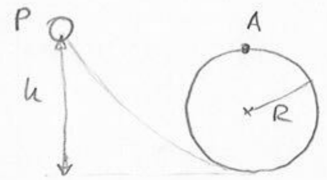
$$\Downarrow$$

$$\omega = \sqrt{2\theta\alpha}$$

8) Un bloque desliza sin rozamiento por una vía en forma de lazo. El lazo circular tiene un radio R y el bloque parte de un punto P a una altura h por encima de la parte inferior del lazo

$h > 2R$

a) Energía cinética del bloque cuando alcanza la parte superior de lazo



$$E(P) = E(A) \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 + mg2R \rightarrow v^2 = 2g(h-2R)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \underline{\underline{mg(h-2R) = E_c(A)}}$$

b) Admitiendo que no se sale de la vía, hallar la aceleración en A

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \underline{\frac{2g}{R}(h-2R)}$$

c) Obtener el valor mínimo de h para que el bloque alcance el pto. A sin salirse de la vía.

$$mg = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v^2 = gR = 2g(h-2R) \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{5}{2}R}}$$

Supongamos que ahora tenemos una esfera de radio $R_1 = R/4$ con centro en h sin deslizamiento. Calcular lo mismo.

d) $mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 + mg\left(2R - \frac{R}{4}\right) \rightarrow v_c^2 = \frac{10}{7} g\left(h - \frac{7}{4}R\right)$

$$I = \frac{2}{5} M R_1^2 = \frac{2}{5} M \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{40} M R^2$$

$$\omega = \frac{v_c}{R_1} = \frac{4 v_c}{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{E_c(A)}} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{7}{10} m v^2 = \underline{\underline{gm\left(h - \frac{7}{4}R\right)}}$$

e) $a = a_N = \frac{v_c^2}{R''} = \underline{\frac{40}{21} \cdot \frac{g}{R}\left(h - \frac{7}{4}R\right)}$

$\hookrightarrow R'' = \frac{3}{4}R = R - R_1$

f) $mg = m\frac{v^2}{R''} \rightarrow v^2 = g\frac{3}{4}R = \frac{10}{7} g\left(h - \frac{7}{4}R\right) \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{91}{40}R}}$

TEMA 12 : Dinámica de los sistemas (II) (RESUMEN)

MOMENTOS DE INERCIA : $[I] = ML^2$

- Central → $I_o = \sum m_i \cdot \text{nor}\, \vec{r}_i$ // $I_o = \int \text{nor}\, \vec{r}\, dm$
- Áxico → $I_\delta = \sum m_i \cdot \text{nor}\left[(\vec{u} \times \vec{r}_i) \times \vec{u}\right] = \sum m_i \cdot \text{nor}(\vec{u} \times \vec{r}_i)$ // $I_\delta = \int \text{nor}(\vec{u} \times \vec{r})\, dm$
- Planario → $I_\pi = \sum m_i (\vec{u} \cdot \vec{r}_i)^2$ // $I_\pi = \int (\vec{u} \cdot \vec{r})^2 dm$

~ Relaciones : $I_o = I_\delta + I_\pi$

$I_\delta = I_{\pi_1} + I_{\pi_2}$ → $\pi_1 \perp \pi_2$ y $\delta \equiv$ recta intersección

Triedro cartesiano
$$\begin{cases} I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} \\ I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) \end{cases}$$

- Teoremas de Steiner

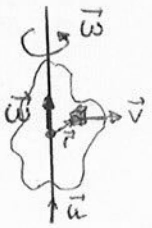
$I_o = I_C + M\, \text{nor}\, \vec{r}_c$

$I_\delta = I_{\delta c} + M\, \text{nor}\, (\vec{u} \times \vec{oc})$ $\quad \delta \parallel \delta_c$

$I_\pi = I_{\pi c} + M d^2$ $\quad$ d: distancia entre π y π_c , $\pi \parallel \pi_c$

- Dinámica del sólido rígido

Eje fijo

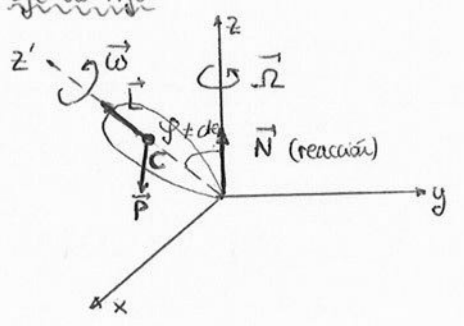


$L_u = I_u |\vec{\omega}|$

$E_c = \frac{1}{2} I_u \cdot \omega^2$

$M_u = I_u \alpha$

Eje no fijo



$$\vec{\Omega} = \frac{mg|\vec{oc}|}{I\omega} \vec{k}$$

($|\vec{oc}| = r_c$, $I\omega = |\vec{L}|$)

- Teoremas de Koening

$\vec{P} = M \vec{v_c}$

$\vec{L_o} = \vec{L}^* + \vec{oc} \times M\vec{v_c}$

$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M v_c^2$ —
- Rotación : $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Rot + desplazamiento : $E_c = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$

T13 - MEDIOS DEFORMABLES (I)

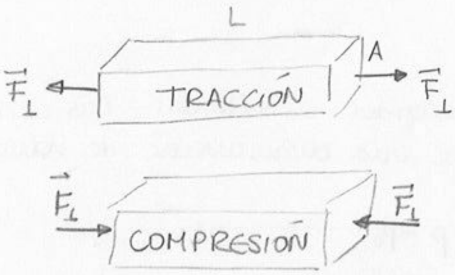
~ Sólidos

Decimos que un sistema es elástico cuando al actuar una fuerza deformadora cambia su forma. Si al cesar la fuerza deformadora, recupera su forma original, se dice que es elástica; si por el contrario, no la recupera se denomina inelástico o plástico.

Cuando la deformación es pequeña respecto a su forma original, dicha deformación es proporcional a la fuerza deformadora. Cuando además sigue trayectoria recta, ~~cattiuva~~ se cumple la ley de Hooke : $F = -k\Delta L$

- Causa deformadora, representada normalmente por la tensión
- Deformación producida
- Módulo de elasticidad, cociente entre la causa y el efecto (deformación)

1) Elasticidad por tracción y compresión



Módulo de Young : $E \equiv Y \rightarrow E = \dfrac{F_\perp / A}{\Delta L / L_0}$ — A: sección sobre la que se aplica la fuerza; $\Delta L/L_0$: Deformación relativa

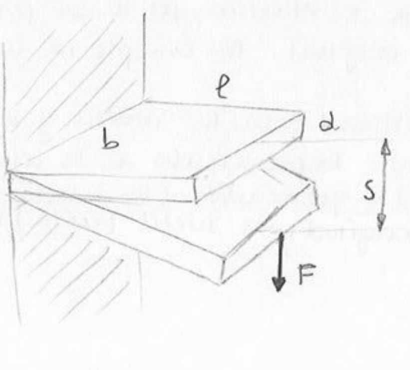
$$\left.\begin{aligned} \Delta L &= L - L_0 \\ \frac{\Delta L}{L_0} &= \frac{L - L_0}{L_0} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_\perp}{A}$$

Si la sección no es cuadrada, rectangular o triangular, se tiene en cuenta el radio :

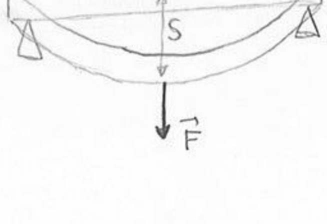
$$\sigma = -\frac{\Delta r / r_0}{\Delta L / L_0}$$

Coeficiente de Poissón → establece la relación entre la variación relativa de la varilla y del radio.

2) Elasticidad por flexión



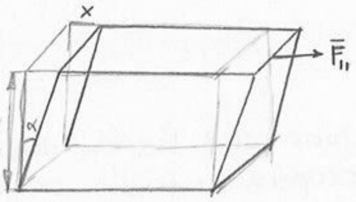
$$S = \frac{4F}{E} \cdot \frac{\ell^3}{b \cdot d^3}$$



$$S = \frac{F}{4E} \cdot \frac{\ell^3}{b \cdot d^2}$$

3) Elasticidad por cizalladura

Le ocurre a un sólido sometido a una fuerza tangente (1)



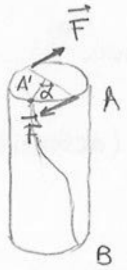
La deformación no lleva implícito la variación de volumen, es decir, la conserva

$$G = \frac{F_{\parallel}/A}{\alpha}$$

$$\alpha \simeq tg\,\alpha = \frac{x}{h}$$

4) Elasticidad por torsión

No hay variación de volumen y está originada por un momento



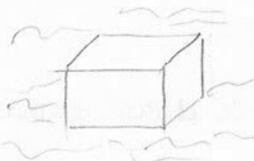
$$R = \frac{M}{\alpha}$$

↓
Coeficiente de torsión

M: causa de la deformación

5) Elasticidad en volumen

La presentan sólidos que están sumergidos en fluidos. Las caras están sometidos a la presión del líquido y se produce una disminución de volumen.



$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

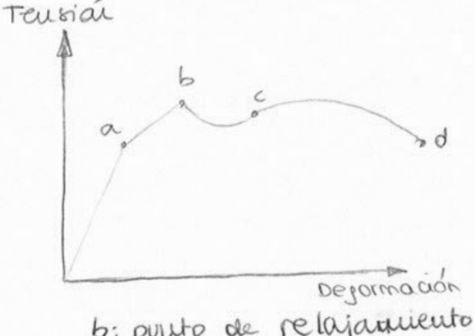
↓
Coeficiente de volumen

siendo $\Delta p = p - p_0$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}$$

$1\,atm = 1{,}013 \cdot 10^5\,Pa$

$$K = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V_0} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$



b: punto de relajamiento
(T_b: límite de elasticidad)

d: punto de ruptura

(0, a) → El cuerpo es elástico y cumple la ley de Hooke

(a, b) → El cuerpo todavía es elástico, por lo que puede volver a su forma original. No cumple la ley de Hooke.

(b, d) → Deformación plástica; cesa la fuerza y no vuelve a su forma original. Dependiendo de la longitud, es dúctil (extensa) o quebradizo (no extensa).

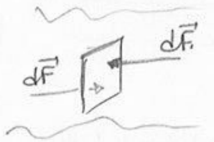
Física
11/12/12

~ Fluidos

→ Hidrostática o estática de fluidos

Cuando un fluido está en reposo, la fuerza que ejerce el fluido sobre las paredes del recipiente es perpendicular

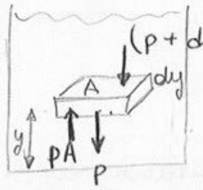
El fluido está en reposo pero las moléculas no, por lo que aparece una fuerza que no es ⊥.



$p = \frac{dF}{dA}$ si $F = cte \rightarrow p = \frac{F}{A}$

La PRESIÓN es un ESCALAR, nunca un vector.

Ahora vamos a encontrar la ecuación fundamental de un fluido en reposo incompresible.



$P = \rho A dy\, g$

$$\underset{(reposo)}{\sum \vec{F} = 0} \rightarrow p\cancel{A} - (p + dp)\cancel{A} - \rho g \cancel{A} dy = 0 \rightarrow \frac{dp}{dy} = \ominus \rho g$$

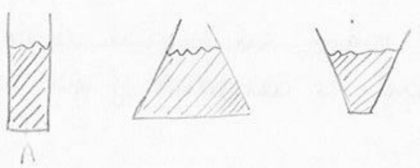
↓ A mayor profundidad, mayor presión

$$dp = -\rho g\, dy$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1) = \rho g (y_1 - y_2) \Rightarrow p_2 - p_1 = \rho g h$$

si $p_1 = p_0 \Rightarrow \underline{p = p_0 + \rho g h}$ Ec. Fundamental

Ej. ¿Cuál tiene mayor presión en el fondo?

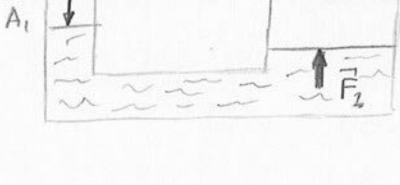


La presión en un punto no depende del volumen de fluido. Sólo depende del peso del fluido, es decir, que tengan el mismo nivel de fluido

Paradoja de la hidrostática

→ Ley de Pascal

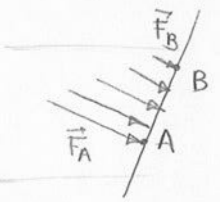
La presión ejercida sobre un punto del fluido se transmite por igual a todos los puntos del fluido.



$A_1 << A_2$

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = \frac{F_1}{A_1} \\ p_2 = p_1 = \frac{F_2}{A_2} \end{array} \right\} \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Para calcular la fuerza que ejerce el fluido sobre la sección AB

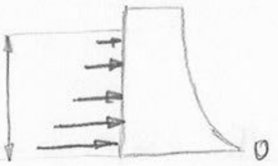


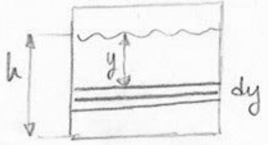
$p = \frac{dF}{dA} \rightarrow dF = p\,dA = \rho g h\, dA$ $F = \rho g \int h\, dA \Rightarrow F = \rho g h_c A$

$$\underset{\text{del c.d.m. o de gravedad}}{h_G} = \frac{\int h\, dm}{\int dm} = \frac{\int \sigma h\, dA}{\int \sigma\, dA} = \frac{\int h\, dA}{A}$$

Profundidad a la que se encuentre el c.d.m.

Ej. Una presa rectangular soporta una masa de agua que alcanza una altura h.
a) Determinar la fuerza horizontal sobre la presa.
b) El momento en torno al pto. 0
c) La altura a la cual la fuerza resultante tendrá que actuar para producir el mismo momento.





a) $dF = p\,dA = \rho g y L\,dy$

$F = \int_0^h \rho g L y\,dy = \frac{1}{2}\rho g L h^2$

No hemos puesto la presión atmosférica porque se compensa con la que está en la derecha

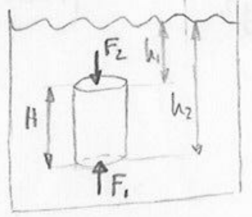
b) $dM = (h-y)dF = (h-y)\rho g y L\,dy \rightarrow M = \rho g L\left(h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^h \Rightarrow M = \frac{1}{6}\rho g L h^3$

c) $M = F \cdot H$

$$H = \frac{M}{F} = \frac{\frac{1}{6}\rho g L h^3}{\frac{1}{2}\rho g L h^2} = \frac{1}{3}h$$

→ Flotación y principio de Arquímedes

El empuje aparece debido a que la presión no es constante en el interior del fluido. Dicho empuje es de sentido contrario al peso.



$$\left.\begin{aligned} F_1 &= p_1 A = (p_0 + \rho g h_1)A \\ F_2 &= p_2 A = (p_0 + \rho g h_2)A \end{aligned}\right\}$$

$F_2 > F_1$ porque $p_2 > p_1$

$E = F_2 - F_1 = \rho_f g(h_2 - h_1)A = \rho_f g HA$

ρ_f → densidad del fluido

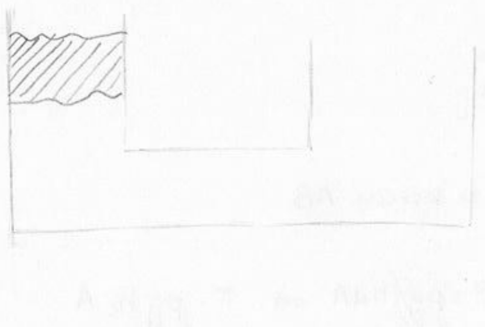
La presión manométrica: $p_M = p - p_0$

Ej 1) Determinar la variación de la presión de la Tierra en función de la altura y sobre el nivel del mar, suponiendo que la gravedad es constante y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{\rho_0}{p_0} g y \rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g y \Rightarrow p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g y}$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 1{,}013 \cdot 10^5\,\text{Pa} \\ \rho &= 1{,}29\,\text{kg/m}^3 \end{aligned}\right\} h? \qquad p = \frac{p_0}{2} \Rightarrow y = h = 5550\,\text{m}$$

Ej 2) ¿Cuál es la relación de las alturas con la de las densidades?

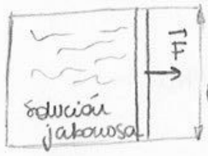


T14 – MEDIOS DEFORMABLES (II)

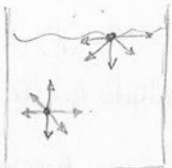
1. Partículas superficiales de los líquidos. Tensión superficial. Aplicaciones

La superfice de un líquido ~~es~~ se comporta como una membrana sometida a una tensión, que actúa paralela a la superficie y se define como la fuerza realizada por unidad de longitud, de forma que estas dos son perpendiculares.

$$\sigma = \frac{F}{L}$$



$\rightarrow \sigma = \frac{F}{2L}$



Fuerza de cohesión (entre las moléculas del fluido) → Tiene un límite: la colisión entre las moléculas o que aparezcan otras fuerzas, las de repulsión.

La superficie de una esfera es la mínima para un volumen determinado.

Para incrementar la superficie de un líquido, necesitamos aplicar una fuerza y, por tanto, hacemos un trabajo de forma que:

$$W = F\Delta x = \sigma L \Delta x = \sigma \Delta A \quad \left| \begin{array}{ll} \sigma = F/L & SI: [\sigma] = N/m \\ \sigma = W/A & SI: [\sigma] = J/m^2 \end{array} \right.$$

Esta energía se encuentra sobre la superficie del fluido, por lo que se le denomina energía

~ Tensión en las superficies curvas

En todas las tensiones curvas de los fluidos, existen presiones dirigidas hacia el centro de curvatura de la superficie.

Si la superficie solo tiene un centro de curvatura, su valor será $dF = p\,dA$

$$dF = p\,dA \rightarrow p = \frac{\sigma}{r}$$

Sin embargo, si tiene más de un centro de curvatura: $p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ Ec. de Laplace

Para el caso de una gota esférica, se puede simplificar: $p = \frac{2\sigma}{r}$

Ej 1) 8 gotas de mercurio de radio r se unen para formar una sola, ¿qué relación existe entre las energías superficiales antes y después de la unión?

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} W = 8\sigma 4\pi r^2 \\ W' = \sigma 4\pi R^2 \end{array}\right\} \quad \frac{W'}{W} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{8\sigma 4\pi r^2} = \frac{4}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

→ Se ha producido un calentamiento (cuando se unen en una sola gota; si se separa, se produciría un enfriamiento)

2) El aceite de oliva tiene una tensión superficial respecto del aire que vale $32 mN/m$. Una gota esférica tiene un diámetro de $4 mm$. Calcular:

a) Presión a la que está sometida

$$P = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{\frac{4}{2} \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{32 \text{ Pascales}}}$$

b) Fuerza total a la que está sometida debido a la tensión superficial que actua sobre su superficie.

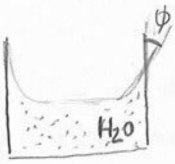
$$F = pA = 32 \cdot 4\pi (2 \cdot 10^{-3})^2 = \underline{\underline{1{,}61 \cdot 10^{-3} N}}$$

c) Energía superficial (potencial en la superficie)

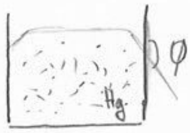
$$W = \sigma A = 32 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi (2 \cdot 10^{-3})^2 = \underline{\underline{1{,}61 \cdot 10^{-6} J}}$$

Capilaridad

La capilaridad es la capacidad que tiene un líquido de mojar o no al sólido que lo contiene.

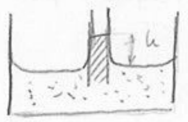


El agua moja al cristal porque las moléculas del cristal ejercen una fuerza mayor que las del agua.
Sin embargo, el mercurio no moja el cristal porque las fuerzas de adhesión del sólido sobre el mercurio son menores.

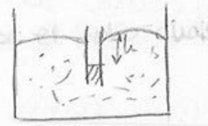


$\phi \rightarrow$ ángulo de contacto o de conjunción | Si $\phi < 90° \rightarrow$ El líquido moja al sólido
Si $\phi > 90° \rightarrow$ El líquido NO moja al sólido.

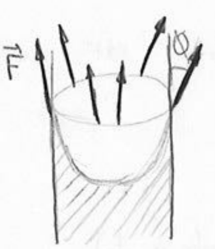
Caso particular:



El fluido sube por el tubo hasta una altura h



Cuando no moja, el fluido desciende una altura h



$$F = (\sigma L) \cos\phi$$

$$\sigma 2\pi r \phi = mg = \rho \pi r^2 h g \rightarrow \boxed{h = \frac{2\sigma \cos\phi}{\rho r g}} \quad \text{Ley de Jurin}$$

Solo tenemos en cuenta la componente vertical

$$h = \frac{2\sigma \cos\phi}{\rho d g} \quad //^{d}$$

Ej. El tubo de un barómetro de $\sigma = 547 \cdot 10^{-3} N/m$ y ángulo de conjunción $\phi = 125°$ tiene un diámetro de $3 mm$. Calcular el error que introduce en las medidas la tensión superficial

$$h = \frac{2\sigma \cos\phi}{\rho r g} = \frac{2 \cdot 547 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 125°}{13600 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = \underline{\underline{-3 mm}}.$$

Física
12/12/12

2. Flujos fluidos. Ecuación de continuidad. Aplicaciones

Llamamos línea de flujo a la trayectoria descrita por una partícula del fluido. Cada partícula puede tener una velocidad distinta e incluso variable en el transcurso del tiempo. Entonces, podemos analizar el campo de velocidades del fluido en cada instante.

Definimos la línea de corriente como aquella en que en cada punto, el vector velocidad es tangente a la línea.

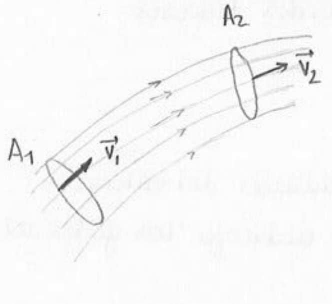
La línea de flujo y de corriente coinciden si no hay variación de la distribución de velocidades. Cuando esto sucede, se dice que el fluido está estacionario

Fluidos
- Ideal o de Bernoulli
- Laminar, formado por láminas que se desplazan
- Turbulento, apareciendo corrientes

Características

- Compresible o incompresible → nos da información de si la densidad permanece constante (compresible) o si varía (incompresible).
- Viscosidad → representa el rozamiento interno entre las capas del fluido
- Flujo estacionario o no estacionario → se fija en un punto fijo del espacio, por el que están pasando varias moléculas en diferentes instantes determinados. Si las moléculas pasan a la misma velocidad
- Flujo rotacional o no rotacional → si se le puede asociar una velocidad angular a una porción de fluido es un flujo rotacional.

Los más sencillos son los flujos compresibles, estacionarios, no viscosos e irrotacionales.



Para conocer el caudal que pasa por una superficie en un determinado tiempo se supone que es una porción de masa:

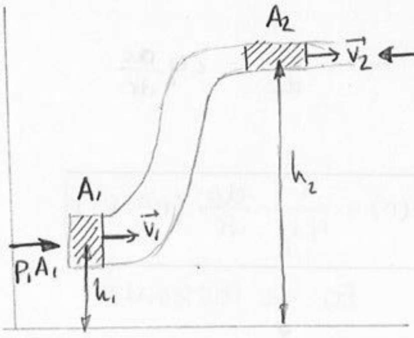
$$G = Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta l}{\Delta t} = \rho S v$$

$$\boxed{\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2} \rightarrow \text{Para un fluido compresible}$$

Ec. de continuidad

$$\text{Si } \rho_1 = \rho_2 \rightarrow \boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \rightarrow \text{Para un fluido incompresible}$$

3. Conservación de la energía en flujos fluidos. Teorema de Bernoulli. Aplics.



$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2}$$

Ec. de Bernoulli para fluidos ideales incompresibles y de flujo estacionario.

$$h_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_1^2}{g} = h_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_2^2}{g}$$

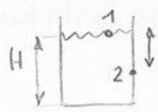
Aplicaciones

- $v = 0$ o $v = cte \rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 \Rightarrow p_1 = p_2 + \rho g (h_2 - h_1)$

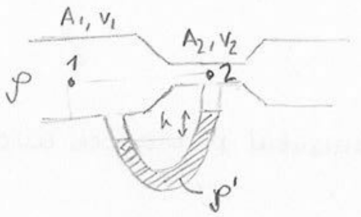
$$\underline{p + \rho g h = cte} \rightarrow \text{Ec. Fund. de la Hidrostática}$$

- Tubo horizontal $\rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow \underline{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = cte}$ si $p\downarrow, v\uparrow$

- Torricelli $\rightarrow$ $p_1 = p_2$, $v_1 = 0$ $\Rightarrow \cancel{\rho} g H = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2 + \cancel{\rho} g (H - d) \Rightarrow \underline{v_2 = \sqrt{2gd}}$



- Venturi



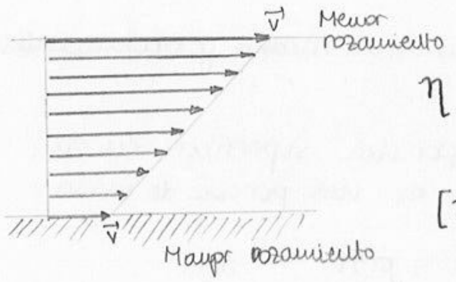
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \longrightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] v_1^2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \longrightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \qquad (\rho' - \rho) g h = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right) v_1^2$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) g h}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}}$$

4. Fluidos viscosos



$$\eta = \frac{F/A}{v/h} \longrightarrow \boxed{F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{h}}$$ Ley de Newton para fluidos viscosos

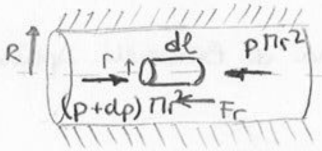
$$[\eta] = \frac{[\text{Presión}]}{T^{-1}} = [\text{Presión}] \cdot [\text{Tiempo}]$$

S.I.: $\eta \rightarrow Pa \cdot s$

$\eta \rightarrow$ es característico de cada fluido, pero depende de las condiciones del entorno

Al aumentar T, los líquidos fluyen mejor y disminuye η; sin embargo, los gases al aumentar la T fluyen peor.

Régimen laminal $\rightarrow$ capas cilíndricas de fluido



$\rightarrow$ Fluye

En un instante t: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$(p + dp)\,\pi r^2 = p \pi r^2 + \overbrace{\eta\, 2\pi r\, dl \frac{dv}{dr}}^{F_r} \rightarrow r \frac{dp}{dl} = 2\eta \frac{dv}{dr}$$

$$dv = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dl} \cdot r\,dr \rightarrow v = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

Si $r = R \rightarrow v = 0$ $\quad \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot \frac{R^2}{2} + C = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v = v(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dl} (r^2 - R^2)}$$

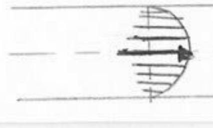
Ec. de Pouseuille

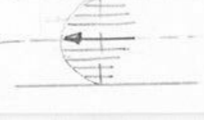
$\downarrow$

Cómo varía la velocidad en función del radio cuando tenemos un fluido que se mueve según un flujo laminar y presenta viscosidad

$v \propto r^2 \rightarrow$ parábola

$r < R$, y $\frac{dp}{dl} < 0 \rightarrow v > 0$





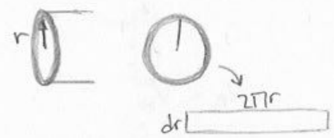
$\Downarrow$

La primera parábola es la correcta

• Gasto a través de una tubería

Si $v = cte \rightarrow Q = S\,v$

Si $v \neq cte \rightarrow Q = \int v(r)\,dS = \int \frac{1}{4\eta}\cdot\frac{dp}{dl}\,(r^2 - R^2)\,2\pi r\,dr = \frac{1}{4\eta}\,\frac{dp}{dl}\,2\pi \int (r^2 - R^2)\,dr$



$$Q = \frac{\pi}{2\eta}\cdot\frac{dp}{dl}\left[\frac{R^4}{4} - \frac{R^2R^2}{2}\right] = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{dp}{dl} \Rightarrow Q = -\frac{\pi R^4}{8\eta}$$

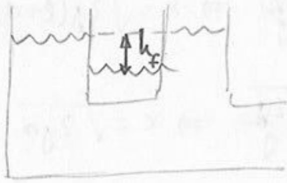
• Número de Reynolds

Sirve para pasar de un sistema laminar a uno que sea turbulento, cuando la velocidad aumenta mucho.

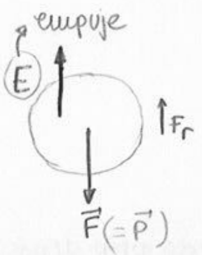
$$R = \frac{2 v \rho r}{\eta} \quad \begin{cases} R < 2000 \rightarrow \text{LAMINAR} \\ R > 200 \rightarrow \text{TURBULENTO} \end{cases}$$

• Viscosidad en la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = cte \rightarrow h_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} = h_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_f$$



5. Movimiento de sólidos en el seno de fluidos. Fórmula de Stokes



$\boxed{\vec{F}_k = -k\eta\vec{v}}$ F. de Stokes

$$[K] = \frac{[F]}{[\eta][v]} = \frac{[F][S]}{[F]\,T\,L\,T^{-1}} = L \rightarrow K \text{ depende de la geometría del cuerpo que cae}$$

ESFERA: $K = 6\pi r$

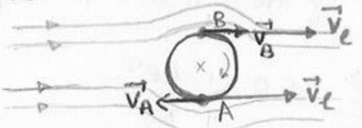
$(F - E) - k\eta v = ma \rightsquigarrow (F - E) - k\eta V_{\text{máx}} = 0$ límite

$a = cte \rightarrow v\uparrow \qquad a = 0 \rightarrow v = cte$

ESFERA: $V_L = V_{\text{máx}} = \frac{F - E}{k\eta} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^{3\,2}\,g(\rho - \rho_f)}{6\pi r\eta} \xrightarrow{\text{fluido que desaloja}} \boxed{V_L = \frac{2}{9}\cdot\frac{r^2 g(\rho - \rho_f)}{\eta}}$

Efecto MAGNUS

Tiene lugar cuando tenemos un cuerpo que gira en el seno de un fluido viscoso en movimiento y cuyas líneas de corrientes son perpendiculares al eje de giro. Entonces, va a aparecer una fuerza que es perpendicular a las líneas de corriente y al eje de giro.



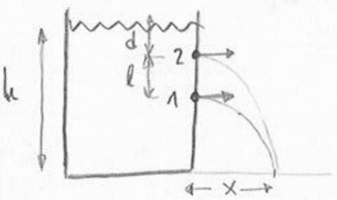
$\vec{v}_\ell$: velocidad de la línea de corriente

$h_A \sim h_B$

Bernoulli: $P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$ $\quad v_A < v_B$

$P_A > P_B$

Ej: 1) Un recipiente abierto de paredes verticales está completamente lleno hasta una altura h. En la misma pared vertical hay dos orificios que distan entre sí una distancia ℓ por los que sale agua. Calcular la distancia d del orificio superior a la superficie libre del agua sabiendo que los dos chorros se cortan en el mismo punto del plano horizontal que pasa por el fondo del recipiente



$1: \; v_1 = \sqrt{2g(\ell+d)}$

$2: \; v_2 = \sqrt{2gd}$

(Torricelli + Tiro parabólico)

$x = v_1 t_1$

$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{2g(\ell+d)}\sqrt{\frac{2y_1}{g}}$

$x = v_2 t_2$

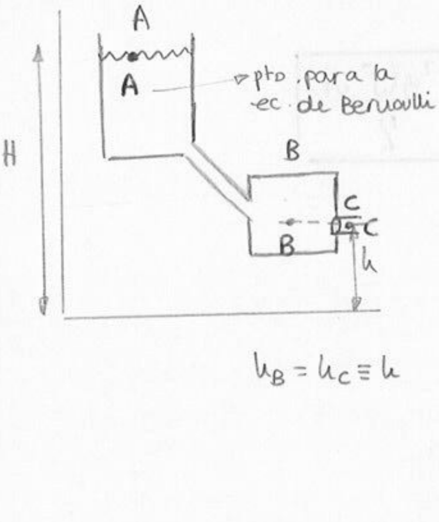
$y_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{g}} \Rightarrow x = \sqrt{2gd}\sqrt{\frac{2y_2}{g}}$

$$x_1 = x_2 \equiv x \rightarrow \cancel{2g}(\ell+d)\cdot\frac{2y_1}{\cancel{g}} = \cancel{2g}\, d \cdot \frac{2y_2}{\cancel{g}} \Rightarrow d = \frac{h-\ell}{2}$$

$y_1 = h - d - \ell$

$y_2 = h - d$

2) De un depósito muy grande A sale agua continuamente a través de otro depósito menor B y un orificio C. El nivel de agua en A se supone constante a una altura H, siendo h la altura de orificio C. Son también datos las secciones de B y C. Calcular la velocidad del agua y la presión en el depósito B, y el caudal.



$h_B = h_C \equiv h$

$P_A = P_C$ ⟿ puntos en la superficie; $v_A = 0$

$$\cancel{\rho} g H = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_C^2 + \cancel{\rho} g h \rightarrow v_C = \sqrt{2g(H-h)}$$

(Bernoulli)

$$v_B S_B = v_C S_C \Rightarrow v_B = \frac{S_C}{S_B}\cdot v_C$$

(Ec. de continuidad)

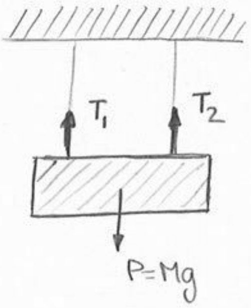
$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_B = P_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 \Rightarrow P_B = P_0 + \frac{1}{2}\rho(v_C^2 - v_B^2)$$

$$Q = S_C v_C$$

Física
18/12/12

3) Se cuelga una viga de 2000 kg de dos cable de la misma longitud L, uno de aluminio y otro de acero. Al suspender la viga, ambos cables se estiran lo mismo. Calcular la tensión que soporta cada cable sabiendo que los módulos de Young son: $E_1 = 7\cdot 10^{10}\ N/m^2$ (aluminio) y $E_2 = 20\cdot 10^{10}\ N/m^2$ (acero).

$\Delta L_1 = \Delta L_2$



$$T_1 + T_2 = Mg$$

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{T_1}{\Delta L_1 / L_1} \\ E_2 &= \frac{T_2}{\Delta L_2 / L_2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{T_1}{E_1} = \frac{T_2}{E_2}$$

4) Se tiene una barra cilíndrica de aluminio de 1 m que es sometida a una tracción longitudinal. Calcular el periodo de las oscilaciones elásticas que experimentará al cesar la tracción, conociendo la densidad y el módulo de Young del aluminio.

$\rho_{Al} = 2{,}7\ g/cm^3$

$E_{Al} = 7\cdot 10^{10}\ N/m^2$

$$E = \frac{F/A}{\Delta L / L} \longrightarrow F = \underbrace{-}_{\text{por ser vector}} EA\frac{\Delta L}{L} = -k\Delta L \Rightarrow k = \frac{EA}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = \omega^2 m = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\rho\cdot\underbrace{AL}_{\text{volumen}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \rho \cancel{A} L^2}{E\cancel{A}}}$$

TEMA 14: Medios deformables (II) (RESUMEN)

Tensión superficial → $\sigma = \frac{F}{L} = \frac{W}{A}$ ($W = F\Delta x = \sigma L \Delta x = \sigma \Delta A$)
LÍQUIDO ($F = pA$)

Tensión en superficies curvas → 1 centro de curvatura: $p = \frac{\sigma}{r}$
2 centros de curvatura: $p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ Ec. de Laplace
Gotas esféricas: $p = \frac{2\sigma}{r}$

Capilaridad → capacidad que tiene un líquido para mojar o no al sólido que lo contiene
$\begin{cases} \phi < 90°: \text{moja} \\ \phi > 90°: \text{no moja} \end{cases}$

Error en las medidas de σ: $h = \frac{2\sigma \cos\phi}{\rho r g}$ Ley de Jurin

- Flujos Fluidos

Fluido $\begin{cases} \text{Ideal (Bernoulli)} \\ \text{Laminar} \\ \text{Turbulento} \end{cases}$

Flujo $\begin{cases} \text{Compresible / incompresible (densidad)} \\ \text{Viscoso (rozamiento)} \\ \text{Estacionario / no estacionario (velocidad)} \\ \text{Rotacional / no rotacional (v. angular)} \end{cases}$

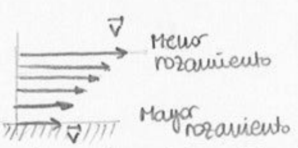
Ecuación de continuidad → $\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$

Ecuación de BERNOULLI → $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = cte$

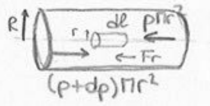
- $v = 0$ / $v = cte$ → $p + \rho g h = cte$ ⇒ Ec. Fundamental de la Hidrostática
- $h_1 = h_2$ → $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$ ⇒ $p\downarrow, v\uparrow$ / $p\uparrow, v\downarrow$
- TORRICELLI → $p_1 = p_2$, $v_1 = 0$ → $v_2 = \sqrt{2gd}$
- VENTURI → $h_1 = h_2$, $A_1 v_1 = A_2 v_2$ → $v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho) g h}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$

- Fluidos viscosos

Ley de NEWTON → $F = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{h}$



Ecuación de POISEUILLE → $v = v(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dl}(r^2 - R^2)$



$\Sigma F = 0$
$F_r = \eta A \frac{dv}{dr}$

Gasto a través de una tubería $\begin{cases} v = cte \rightarrow Q = vS \\ v \neq cte \rightarrow Q = \int v(r)\, dS \end{cases}$ Esfera ⇒ $Q = -\frac{\pi R^4}{8\eta}$

Número de Reynolds: $R = \frac{2 v \rho r}{\eta}$ $R < 2000$ → Laminar; $R > 2000$ → Turbulento

Viscosidad en la ec. de Bernoulli: $h_1 + \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} = h_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_f$

- Sólidos en fluidos $\vec{F}_k = -k\eta\vec{v}$ Fórmula de STOKES

Esfera: $k = 6\pi r$ $F - E - k\eta v = ma$ $a = 0 \rightarrow v_{min} = \frac{2}{9}\cdot\frac{r^2 g(\rho - \rho_f)}{\eta}$ ESFERA

EVALUACIÓN CONTINUA FGI
(Temas 1-3)

1.- Comprobar la dimensión de los términos de la ecuación de Bernoulli de la Hidrodinámica:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$$

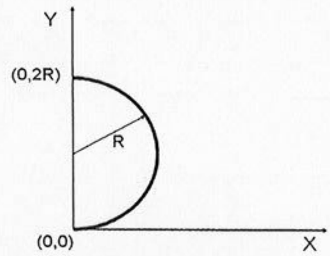
donde p es la presión , ρ es la densidad, v la velocidad, z la altura, correspondientes a un punto del fluido y g el valor de la gravedad en ese punto.

2.- Para determinar el valor de una variable independiente, y se utiliza la función $y = x_1^3 x_2^2$. Si se miden directamente la pareja de valores x_1 y x_2, y se obtiene para cada uno de dichos valores unas incertidumbres relativas de $w_{x_1} = 1\times10^{-4}$ y $w_{x_2} = 2\times10^{-4}$. Determinar la incertidumbre relativa, w_y, del probable valor de *y*. (*Feb - 2010*)

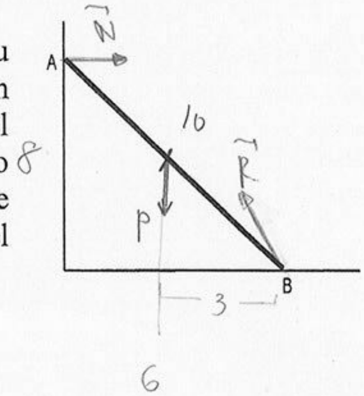
3.- Dado un sistema de vectores deslizantes: **a** = **i** + **j** + **k**, **b** = **i** + 2**j** + 3**k** y **c** = 3**i** + 2**j** - **k**, cuyas rectas soportes pasan respectivamente por los puntos: A(2, 1, -2), B(-1, 2, 2) y C(-2, 2, 1). Determinar:

a) Resultante del sistema
b) Momento resultante del sistema respecto al origen de coordenadas
c) Momento mínimo
d) Ecuación del eje central

4.- Aplicando el teorema de Guldin, determinar el centro de masas de un alambre que tiene la forma de media circunferencia de radio R y cuyos extremos ocupan la posición (0,0) y (0,2R).



5.- Una escalera de 10 m de longitud y 600 N de peso, con su centro de gravedad en el punto medio, se encuentra en equilibrio, con un extremo en el punto A, a 8 m sobre el suelo, apoyado en una pared vertical sin rozamiento, y el otro extremo en B, sobre el suelo áspero. Dibujar las fuerzas que actúan sobre la escalera y plantear las ecuaciones del equilibrio.



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - R_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_y - P = 0 \rightarrow R_y = P = 600N$.

$\Sigma \vec{M}_B = 0 \rightarrow -N\cdot 8 + P\cdot 3 = 0 \rightarrow N = \frac{3P}{8} = 225N = R_x$

EVALUACIÓN CONTINUA FCE
(Temas 1-3)

1.- Comprobar la dimensión de los términos de la ecuación de Bernoulli de la Hidrodinámica

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$$

donde p es la presión, ρ es la densidad, v la velocidad, z la altura, correspondientes a un punto del fluido y g el valor de la gravedad en ese punto.

2.- Para determinar el valor de una variable independiente, y se utiliza la función $y = f(x)$. Si se miden directamente el par de valores x_1 y x_2 y se obtiene para cada uno de dichos valores unas incertidumbres relativas de $\varepsilon_1 = 1 \times 10^{-3}$ y $\varepsilon_2 = 2 \times 10^{-3}$. Determinar la incertidumbre relativa, ε_y, del probable valor de y (Tema 2070)

3.- Dado un sistema de vectores deslizantes: a = i − j + k, b = i + 2j + 3k, y c = 3i + 2j − k cuyas rectas soporte pasan respectivamente por los puntos A(2, 1, −2), B(-1, 2, 2) y C(-2, 2, 1). Determinar:

a) Resultante del sistema
b) Momento resultante del sistema respecto al origen de coordenadas
c) Momento mínimo
d) Ecuación del eje central

4.- Aplicando el teorema de Guldin, determinar el centro de masas de un alambre que tiene la forma de media circunferencia de radio R y cuyos extremos ocupan la posición (0,0) y (0,2R).

5.- Una escalera de 10 m de longitud y 600 N de peso, con su centro de gravedad en el punto medio, se encuentra en equilibrio, con un extremo en el punto A, a 8 m sobre el suelo, apoyado en una pared vertical sin rozamiento, y el otro extremo en B, sobre el suelo áspero. Dibujar las fuerzas que actúan sobre la escalera y plantear las ecuaciones del equilibrio.

EVALUACIÓN CONTINUA FGI (T3)
(Temas 4-8)

1.- El vector de posición de un móvil en una referencia cartesiana ortonormal viene dado por la expresión: $\vec{r} = (t^2 + 1)\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + (t^2 - 1)\vec{k}$ (m), viniendo el tiempo expresado en segundos. Obtener las componentes intrínsecas de la aceleración e indicar el tipo de movimiento y la trayectoria que sigue.

2.- En un instante dado, los puntos A, B y C de un sistema indeformable, y cuyas coordenadas están dadas en centímetros, son A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1), tienen velocidades respectivas: $\mathbf{v}_A$ (0,3,-2), $\mathbf{v}_B$ (-3,0,1) y $\mathbf{v}_C$ (2,-1,0), medidas en m/s con relación a la misma referencia. Determinar el eje instantáneo de rotación y mínima translación sabiendo que el origen de coordenadas pertenece al mismo.

3.- Una plataforma circular de radio R gira alrededor de su eje geométrico con velocidad angular constante w, respecto a la referencia S. Un punto móvil que parte del eje se desplaza radialmente por la plataforma con velocidad constante igual a v respecto de la misma. Determine el valor modular de la aceleración del punto móvil respecto de S cuando dicho punto alcanza el borde de la plataforma.

4.- En los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento se colocan dos cuerpos de masas M_1 y M_2 ($M_1 > M_2$).

a) Dibujar el diagrama de fuerzas para cada masa
b) Calcular la aceleración del sistema dejado en libertad
c) Hallar la tensión que soporta la cuerda

5.- En una región del espacio existe un campo de fuerzas conservativo, ***F***, cuya función potencial expresada en coordenadas cartesianas dadas en el SI es: $U(x, y, z) = -x(3y + z^2) - yz$ (J).

i) Obtener la expresión vectorial de la fuerza, ***F***, dada en unidades del Sistema Internacional, considerándola orientada en el sentido de los potenciales decrecientes.
ii) El trabajo realizado por la fuerza al desplazar un móvil entre los puntos (1,0,0) y (0,1,0)

EVALUACION CONTINUA FCI (T5)
(Temas 5-8)

1.- El vector de posición de un móvil en una referencia cartesiana ortonormal viene dado por la expresión: $\vec{r} = (t^2+1)\vec{i} + 4t^2\vec{j} + (t^2-1)\vec{k}$ (m), viniendo el tiempo expresado en segundos. Obtener las componentes intrínsecas de la aceleración e indicar el tipo de movimiento y la trayectoria que sigue.

2.- En un instante dado, los puntos A, B y C de un sistema indeformable, y cuyas coordenadas están dadas en centímetros, son A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1). Tienen velocidades respectivas: v_A (0,3,-2), v_B (-3,0,1) y v_C (2,-1,0), medidas en cm/s con relación a la misma referencia. Determinar el eje instantáneo de rotación y mínima translación sabiendo que el origen de coordenadas pertenece al mismo.

3.- Una plataforma circular de radio R gira alrededor de su eje geométrico con velocidad angular constante ω, respecto a la referencia S. Un punto móvil que parte del eje se desplaza radialmente por la plataforma con velocidad constante igual a v respecto de la misma. Determine el valor modular de la aceleración del punto móvil respecto de S cuando dicho punto alcanza el borde de la plataforma.

4.- En los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento se colocan dos cuerpos de masas M_1 y M_2 ($M_1 > M_2$).

a) Dibujar el diagrama de fuerzas para cada masa
b) Calcular la aceleración del sistema dejado en libertad
c) Hallar la tensión que soporta la cuerda.

5.- En una región del espacio existe un campo de fuerzas conservativo, $\vec{F}$, cuya función potencial expresada en coordenadas cartesianas dadas en el SI es: $E_p(x,y,z) = -x(3y + z^2) - yz$ (J)

a) Obtener la expresión vectorial de la fuerza, $\vec{F}$, dada en unidades del Sistema Internacional, considerándola orientada en el sentido de los potenciales decrecientes.
b) Hallar el trabajo realizado por la fuerza al desplazar un móvil entre los puntos (1,0,0) y (0,1,0)