

4.5. Problemas

Problema 4.1 Una fuente tiene un alfabeto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ con probabilidades $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.05, 0.15, 0.2\}$. Calcule la entropía de la fuente y compare dicha entropía con la de una fuente uniformemente distribuida con el mismo alfabeto.

Problema 4.2 La variable aleatoria X modela la salida de una fuente uniformemente distribuida con N símbolos en su alfabeto. Calcule su entropía.

Problema 4.3 Sea $Y = g(X)$, donde $g(x)$ denota una función determinista. Demuestre que, en general, $H(Y) \leq H(X)$. ¿Cuándo se cumple la igualdad?

Problema 4.4 Una fuente de información se puede modelar como un proceso limitado en banda con un ancho de banda de 6000 Hz. El proceso se muestrea a una velocidad superior a la de Nyquist para tener una banda de guarda de 2000 Hz. Las muestras resultantes toman valores en un alfabeto

$$\mathcal{A} = \{-4, -3, -1, 2, 4, 7\},$$

con probabilidades 0.2, 0.1, 0.15, 0.05, 0.3, 0.2, respectivamente. Calcule la entropía en bits/muestra y en bits/segundo.

Problema 4.5 Dos variables aleatorias binarias X e Y están distribuidas de acuerdo a la distribución conjunta

$$P(X = Y = 0) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = Y = 1) = \frac{1}{3}.$$

Calcule $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ y $H(X, Y)$.

Problema 4.6 Demuestre que si $Y = g(X)$, donde $g(x)$ es una función determinista, entonces $H(Y|X) = 0$.

Problema 4.7 Demuestre que:

1. $I(X, Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$
2. Si M_x y M_y representan el número de elementos del alfabeto de X e Y , respectivamente, entonces $I(X, Y) \leq \min\{\log M_x, \log M_y\}$.

Problema 4.8 X es una variable aleatoria binaria con alfabeto $\mathcal{A}_X = \{0, 1\}$ y con probabilidades $p_X(0) = p$ y $p_X(1) = 1 - p$. Y es una variable aleatoria binaria con el mismo alfabeto que depende de X como

$$p_{Y|X}(1|0) = p_{Y|X}(0|1) = \varepsilon.$$

1. Calcule $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X, Y)$, $H(X|Y)$ e $I(X, Y)$.
2. Para un valor ε fijo, ¿qué valor de p maximiza $I(X, Y)$?
3. Para un valor p fijo, ¿qué valor de ε minimiza $I(X, Y)$?

Problema 4.9 Una fuente sin memoria tiene un alfabeto $\mathcal{A}_X = \{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5\}$ con probabilidades $\{0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.05, 0.25, 0.3\}$, respectivamente.

- a) Calcule la entropía de la fuente, y compárela con la de una fuente con el mismo alfabeto pero símbolos equiprobables.
- b) Suponga que la fuente es cuantificada dando lugar a una nueva fuente con un alfabeto $\mathcal{A}_Y = \{-4, 0, +4\}$ y que se establecen las siguientes reglas de cuantificación $Y = g(X)$:

$$\begin{cases} g(-5) = g(-3) = -4 \\ g(-1) = g(0) = g(1) = 0 \\ g(3) = g(5) = +4 \end{cases}$$

Calcule la entropía de la fuente y compárela con la de la fuente original pero con símbolos equiprobables.

- c) Calcule la entropía conjunta $H(X, Y)$, las entropías condicionales, $H(X|Y)$ y $H(Y|X)$, y la información mutua $I(X, Y)$.

Problema 4.10 Calcule la capacidad del canal mostrado en la Figura 4.18

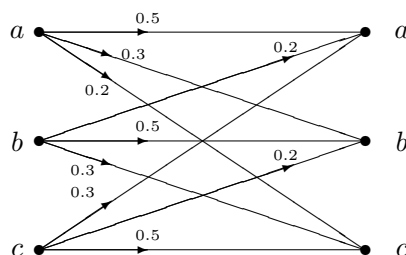


Figura 4.18: Canal DMC para el Problema 4.10.

Problema 4.11 Calcule la capacidad del canal mostrado en la Figura 4.19 y representéla como una función de ε .

Problema 4.12 Calcule la capacidad de la conexión en cascada de n canales binarios simétricos con la misma probabilidad de error p . ¿Cuanto vale la capacidad cuando el número n de canales tiende a infinito?

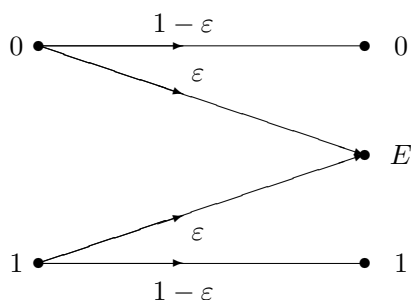


Figura 4.19: Canal DMC para el Problema 4.11.

Problema 4.13 La Figura 4.20 muestra los canales 1, 2 y 3.

1. Calcule la capacidad del canal 1. ¿Para qué distribución de entrada se alcanza esta capacidad?
2. Calcule la capacidad del canal 2 ¿Para qué distribución de entrada se alcanza esta capacidad?
3. Si C es la capacidad del canal 3 y C_1 y C_2 representan las capacidades del primer y segundo canal, ¿cuál de las siguientes relaciones es cierta y por qué?
 - a) $C < \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$.
 - b) $C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$.
 - c) $C > \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$.

Problema 4.14 Sea C la capacidad de un canal discreto sin memoria con un alfabeto de entrada $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ y un alfabeto de salida $\{y_1, y_2, \dots, y_M\}$. Demuestre que

$$C \leq \min\{\log M, \log N\}.$$

Problema 4.15 Calcule la capacidad de los canales A y B representados en la Figura 4.21. ¿Cuál es la capacidad de ambos canales en cascada?

Problema 4.16 Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad $f_X(x)$ y sea $Y = aX$, donde a es una constante no nula.

1. Demuestre que $h(Y) = \log |a| + h(X)$.
2. ¿Se tiene una relación similar si X es una variable aleatoria discreta?

Problema 4.17 Para las variables aleatorias continuas X e Y , demuestre que se cumplen las siguientes propiedades

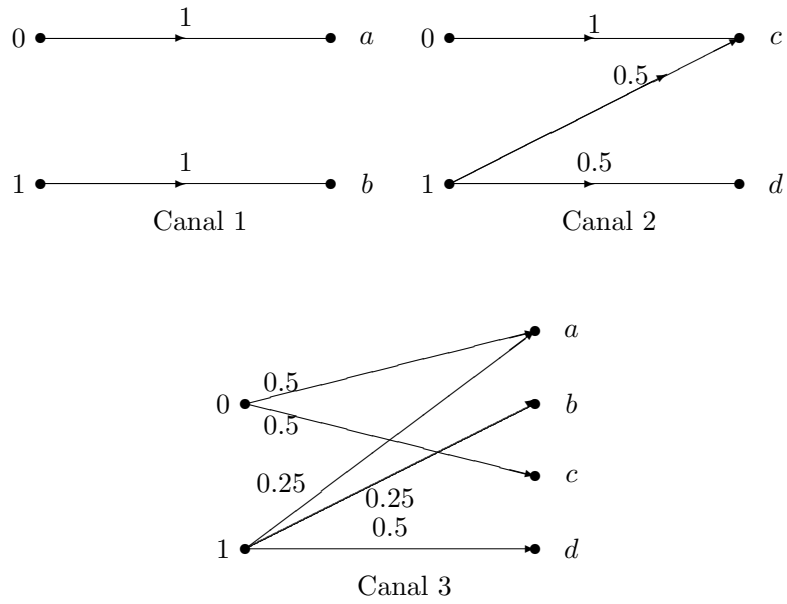


Figura 4.20: Canales para el Problema 4.13.

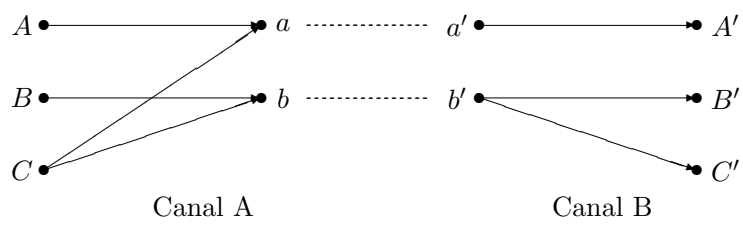


Figura 4.21: Canales para el Problema 4.15.

1. $h(X|Y) \leq h(X)$, con igualdad si y sólo si X e Y son independientes.
2. $I(X, Y) \geq 0$, con igualdad si y sólo si X e Y son independientes.

Problema 4.18 Calcule la capacidad de un canal con ruido aditivo blanco y gaussiano con ancho de banda de 1 MHz, una potencia de 10 Watt. y una densidad espectral de potencia del ruido de $N_0/2 = 10^{-9}$ Watt./Hz.

Problema 4.19 El canal C_1 es un canal con ruido aditivo blanco y gaussiano con un ancho de banda de B Hz, una potencia para el transmisor P Watt. y una densidad espectral de potencia del ruido $N_0/2$. El canal C_2 es un canal con el mismo ancho de banda y potencia que el canal C_1 , pero con una densidad espectral de ruido $S_n(j\omega)$. Se supone que la potencia de ruido total en los dos canales es la misma, es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_n(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega = N_0 B.$$

Razone de forma intuitiva que canal tiene una mayor capacidad.

Problema 4.20 Sean X e Y dos variables aleatorias discretas.

- a) Demuestre que $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, y diga cuando se cumple la igualdad.
- b) Demuestre que $H(X|Y) \leq H(X)$.

NOTA: No se puede emplear el resultado del apartado b) para demostrar el apartado a).

Problema 4.21 Se tiene un DMC como el representado en la Figura 4.22, con variable aleatoria de entrada X , y variable aleatoria de salida Y . Las probabilidades de los símbolos de entrada son, respectivamente, $P_X(a) = 1/2$, $P_X(b) = 1/4$ y $P_X(c) = 1/4$.

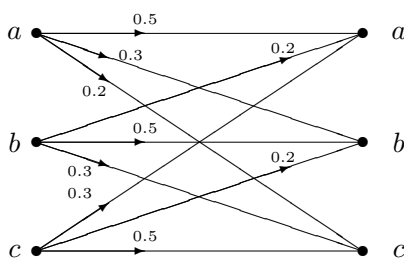


Figura 4.22: Canal para el Problema 4.21.

- Calcule $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ e $I(X, Y)$.

- Calcule la máxima tasa a la que se puede transmitir de forma fiable por este canal, con las probabilidades de entrada dadas, y compárela con la máxima posible (puede usar el resultado del Problema 4.10).

Problema 4.22 El canal representado en la Figura 4.23 es conocido como canal Z.

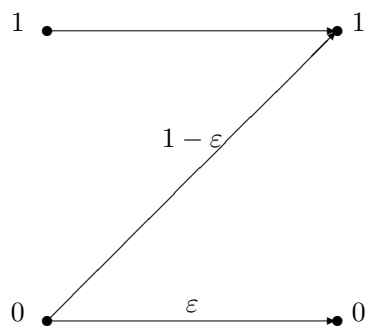


Figura 4.23: Canal Z. Problema 4.22.

- Calcule la capacidad del canal y la distribución de la entrada para la que se alcanza dicha capacidad.
- Particularice los resultados del apartado anterior para los casos $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$, y $\varepsilon = 1/2$.
- Calcule la capacidad de n canales Z en cascada, y obtenga el límite de la misma cuando $n \rightarrow \infty$.

Problema 4.23 Calcule la capacidad del canal representado en la Figura 4.24, y las probabilidades de los símbolos de entrada para las que se obtiene dicha capacidad.

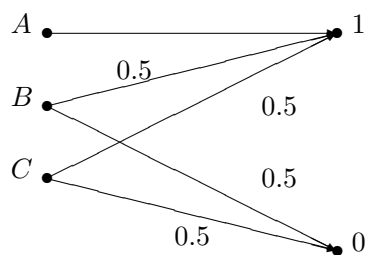


Figura 4.24: Canal para el Problema 4.23.

Problema 4.24 Se tiene el canal discreto sin memoria representado en la Figura 4.25.

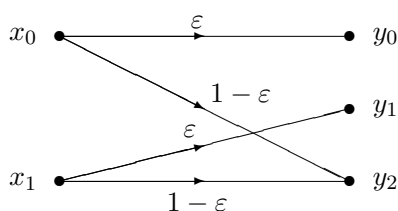


Figura 4.25: Canal para el Problema 4.24.

- Calcule la capacidad del canal (valor y probabilidades de entrada para las que se alcanza).
- Suponiendo que el símbolo x_0 se transmite con una probabilidad p , calcule la entropía conjunta entrada salida, $H(X, Y)$, y la entropía condicional de la entrada conocida la salida, $H(X|Y)$ en función de los parámetros ε y p . Dibújelo, en función de p , para un valor $\varepsilon = 0.25$.

Problema 4.25 Se tienen los canales que se muestran en la Figura 4.26.

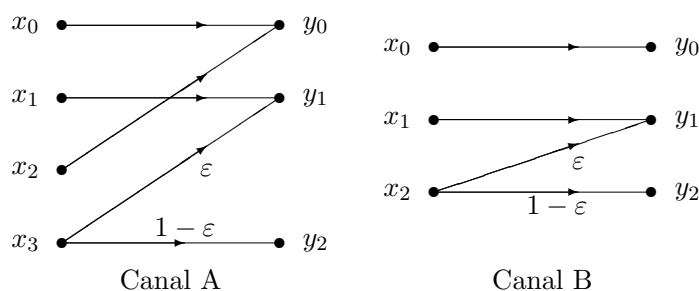


Figura 4.26: Canales para el Problema 4.25.

- Calcule la capacidad del Canal A para $\varepsilon = 0$ y para $\varepsilon = 1$.
- Para el Canal A, si los símbolos de entrada son equiprobables, $p_X(x_i) = 1/4$, $i = 0, \dots, 3$, se conoce que la información mutua entre la entrada y la salida del canal es $I(X, Y) = 1.069$ y que la entropía de la salida del canal es $H(Y) = 1.272$. Calcule el valor del parámetro ε y la entropía condicional $H(X|Y)$.
- Para el Canal B, se sabe que para las probabilidades *a priori*, $p_X(x_i)$, que maximizan la información mutua entre la entrada y salida del canal, $I(X, Y)$, se tiene una entropía condicional $H(Y|X) = 0.207$ bits para $\varepsilon = 1/4$. Calcule la capacidad del canal y las probabilidades de los símbolos de entrada para las que se obtiene.

NOTA: Puede utilizar la Figura 4.32 si lo considera oportuno.

Problema 4.26 Se tienen los canales que se muestran en la Figura 4.27.

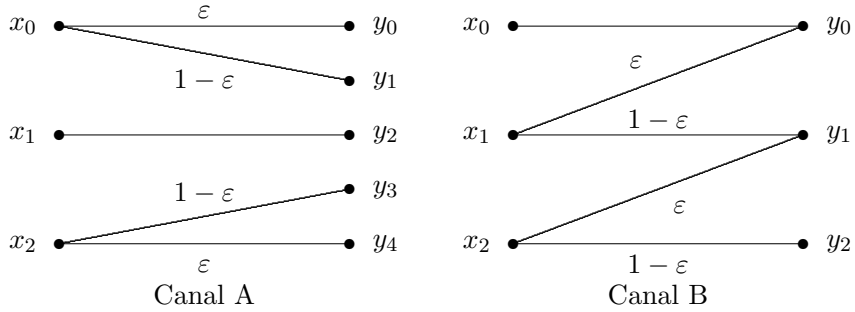


Figura 4.27: Canales para el Problema 4.26.

- Calcule la capacidad del Canal A (valor y probabilidades de los símbolos de entrada para la que se alcanza).
- Para el Canal B, si los símbolos de entrada son equiprobables, se sabe que la entropía conjunta vale $H(X, Y) = 2.1258$ bits/símbolo. Calcule el valor de ϵ , $H(Y)$, $I(X, Y)$, y $H(X|Y)$.

NOTA: Puede utilizar la Figura 4.32 si lo considera oportuno.

Problema 4.27 Se tiene el canal que se muestra en la Figura 4.28.

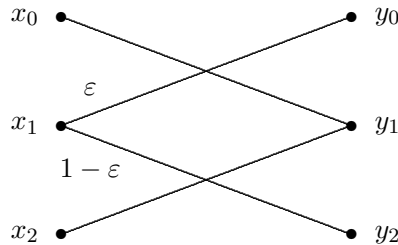


Figura 4.28: Canales para el Problema 4.27.

- Calcule la capacidad del canal de la figura y represéntela como una función de ϵ para $\epsilon \in [0, 1]$.
- Si se define $p = p_X(x_1)$ y se hace $p_X(x_2) = 0$, calcule las expresiones de la entropía condicional $H(X|Y)$ y de la conjunta, $H(X, Y)$, en función de p y ϵ , y represéntelas en función de p para $\epsilon = 1/2$.

NOTA: Puede utilizar la Figura 4.32 si lo considera oportuno.

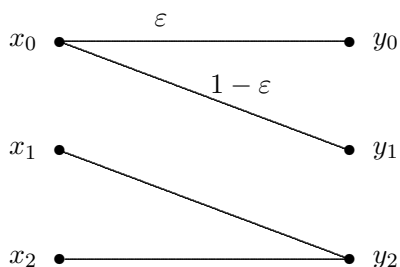


Figura 4.29: Canales para el Problema 4.28.

Problema 4.28 Se tiene el canal que se muestra en la Figura 4.29.

- Calcule la capacidad del canal de la figura y representéla como una función de ε para $\varepsilon \in [0, 1]$.
- Si se hace $p_X(x_1) = p_X(x_2) = p$, calcule las expresiones de la entropía condicional $H(X|Y)$ y de la conjunta, $H(X, Y)$, en función de p y ε , y representélas en función de p para $\varepsilon = 1/2$.

NOTA: Puede utilizar la Figura 4.32 si lo considera oportuno.

Problema 4.29 El canal discreto sin memoria (DMC) que se muestra en la Figura 4.30 corresponde al modelo estadístico de canal de un sistema de comunicaciones que utiliza la constelación de cuatro símbolos de la misma figura.

- Escriba la matriz de canal asociada a la representación esquemática del DMC, compárela con la matriz de canal para dicha constelación, explique qué aproximación se ha considerado sobre un sistema de comunicaciones con dicha constelación, y obtenga el valor de ε para ese caso (suponga transmisión sobre un canal gaussiano de densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2$).
- Calcule $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, $H(X, Y)$ e $I(X, Y)$ para el canal de la figura si los símbolos de entrada son equiprobables, y a partir de las expresiones analíticas obtenga el valor de ε que hace mínimas $H(Y|X)$ y $H(X|Y)$, y máxima $I(X, Y)$.
- Calcule la capacidad de canal para los valores mínimo y máximo que puede tomar ε teniendo en cuenta la estructura del DMC en este caso.

Problema 4.30 El canal discreto sin memoria (DMC) que se muestra en la Figura 4.31 corresponde al modelo estadístico de canal de un sistema de comunicaciones que utiliza la constelación de cuatro símbolos de la misma figura.

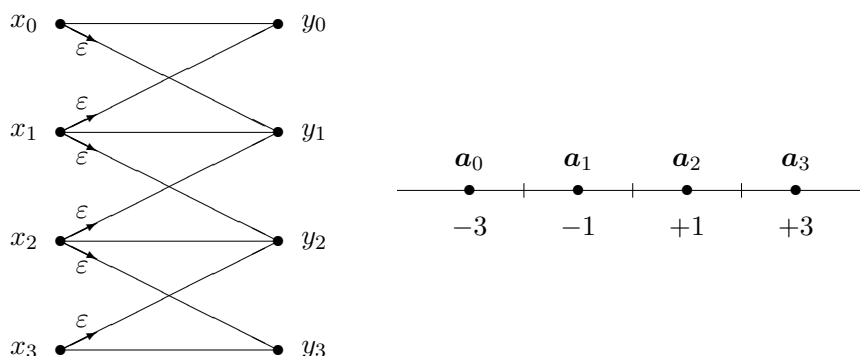


Figura 4.30: Canales para el Problema 4.29.

- Escriba la matriz de canal asociada a la representación esquemática del DMC, compárela con la matriz de canal para dicha constelación, explique qué aproximación se ha considerado sobre un sistema de comunicaciones con dicha constelación, y obtenga el valor de ε para ese caso (suponga transmisión sobre un canal gaussiano de densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2$).
- Calcule $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, $H(X, Y)$ e $I(X, Y)$ para el canal de la figura si los símbolos de entrada son equiprobables, represéntelas en función de ε , y obtenga el valor de ε que hace máximas $H(X, Y)$, $H(Y|X)$ y $H(X|Y)$, y mínima $I(X, Y)$.
- Calcule la capacidad del canal de la figura en función de ε .

NOTA: Para el cálculo de la capacidad de canal, tenga en cuenta la simetría del canal, que hace que la dependencia de $I(X, Y)$ con respecto a $p_X(x_0)$ y a $p_X(x_3)$ por un lado, y con respecto a $p_X(x_1)$ y $p_X(x_2)$ por el otro, sea equivalente.

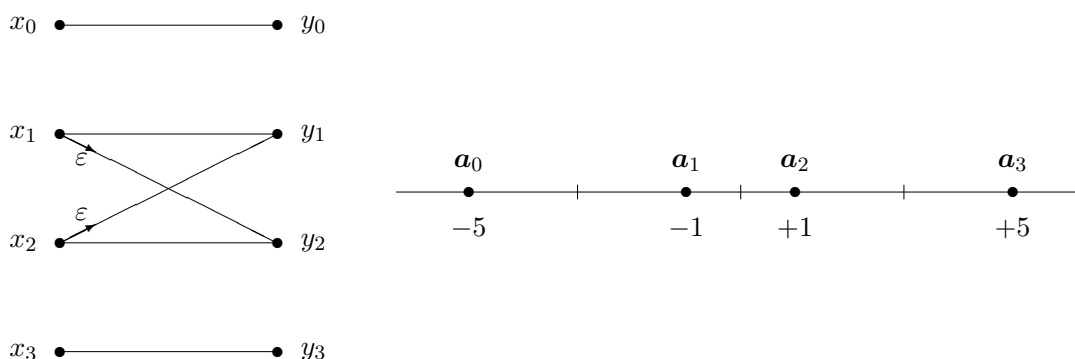


Figura 4.31: Canales para el Problema 4.30.

Problema 4.31 Un canal discreto sin memoria (DMC) con alfabeto de entrada $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ y alfabeto de salida $\mathcal{A}_Y = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ viene dado por la siguiente

matriz de canal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_0 & \varepsilon_0 & 0 & a \\ 0 & 1 - \varepsilon_1 & b & 0 \\ 0 & c & 1 - \varepsilon_1 & 0 \\ d & 0 & \varepsilon_0 & 1 - \varepsilon_0 \end{bmatrix}.$$

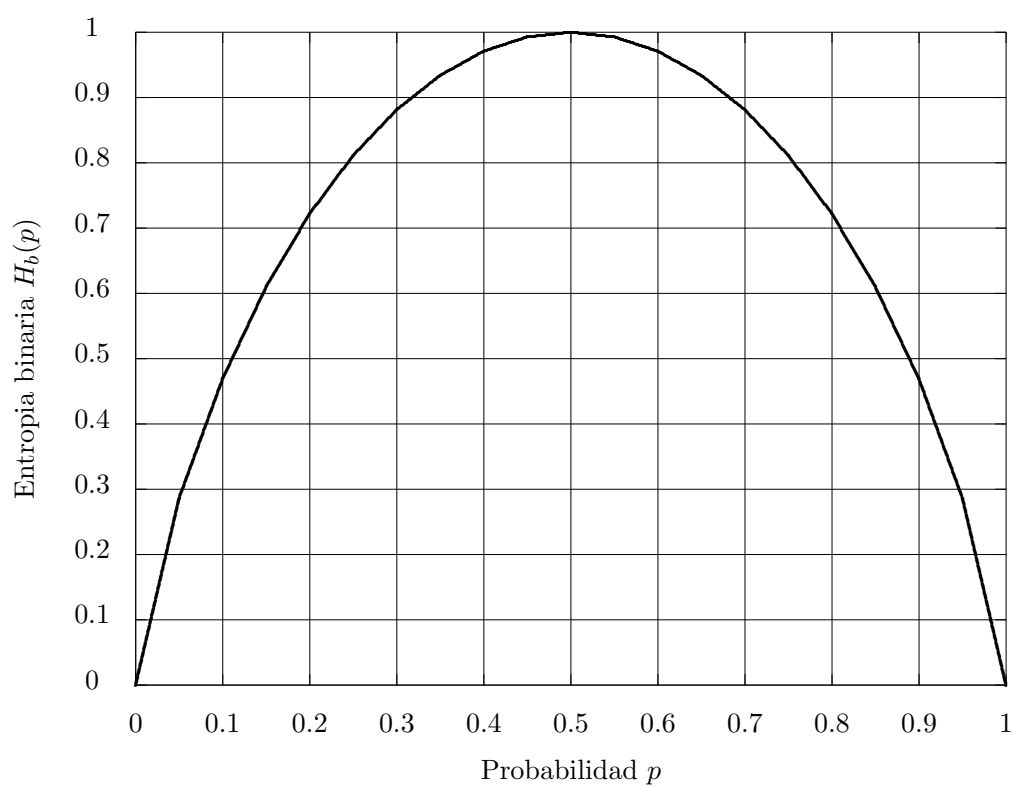
- a) Determine el valor de las constantes a , b , c y d , y calcule $H(Y)$, $H(X, Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, e $I(X, Y)$ para el canal si los símbolos de entrada son equiprobables.
- b) Calcule la capacidad del canal de la figura en función de ε_0 y de ε_1 .

NOTA: Para el cálculo de la capacidad de canal, tenga en cuenta la simetría del canal, que hace que la dependencia de $I(X, Y)$ con respecto a $p_X(x_0)$ y a $p_X(x_3)$ por un lado, y a $p_X(x_1)$ y $p_X(x_2)$ por el otro, sea equivalente. Es decir, que el máximo de la información mutua se alcanzará para $p_X(x_0) = p_X(x_3)$ y $p_X(x_1) = p_X(x_2)$.

Problema 4.32 Un canal discreto sin memoria (DMC) con alfabeto de entrada $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1, x_2\}$ y alfabeto de salida $\mathcal{A}_Y = \{y_0, y_1, y_2\}$ viene dado por la siguiente matriz de canal

$$\mathbf{P}_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_0 & \varepsilon_0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 1 - 2\varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_0 & 1 - \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

- a) Calcule $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, e $I(X, Y)$ para el canal si los símbolos de entrada son equiprobables.
- b) Calcule la capacidad del canal de la figura en función de ε_0 si se ha fijado $p_X(x_1)=0$.
- c) Calcule la capacidad del canal de la figura en función de ε_0 y de ε_1 .
NOTA: Para el cálculo de la capacidad de canal, tenga en cuenta la simetría del canal, que hace que la dependencia de $I(X, Y)$ con respecto a $p_X(x_0)$ y a $p_X(x_2)$ sea equivalente. Es decir, que el máximo de la información mutua se alcanzará para $p_X(x_0) = p_X(x_2)$.
- d) Si $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ para qué valor de ε se alcanza la máxima capacidad. Explique por qué es esta capacidad la máxima alcanzable en un canal con 3 símbolos de entrada.

Figura 4.32: Función de entropía binaria, $H_b(p)$.