HOJA DE EJERCICIOS 10
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. De las siguientes aplicaciones σ entre intervalos, di cuales constituyen un cambio de parámetro (es decir, un difeomorfismo). De aquéllos que lo sean, señala si conserva o invierte el sentido de avance.

a) $\sigma : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\sigma(\tilde{t}) = \operatorname{sen} \tilde{t}$.

b) $\sigma : [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \to [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $\sigma(\tilde{t}) = \cos \tilde{t}$.

c) $\sigma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$, $\sigma(\tilde{t}) = \cos \tilde{t}$.

d) $\sigma : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $\sigma(\tilde{t}) = \tilde{t}^3$.

e) $\sigma : [1, 2] \to [-8, -1]$, $\sigma(\tilde{t}) = -\tilde{t}^3$.

f) $\sigma : [0, 1] \to [0, 1]$, $\sigma(\tilde{t}) = \frac{1}{2}\tilde{t}$.

Problema 2. (a) Dada la 1-forma $\omega = (x_1 + x_3)\, dx_1 - x_2^2\, dx_2 + x_2\, x_3\, dx_3$ en $\mathbb{R}^3$, calcula $\omega_{(1,2,-1)} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) De una 1-forma ω en $\mathbb{R}^2$ se sabe que $\omega_{(1,2)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$ y $\omega_{(1,2)} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$. Calcula $\omega_{(1,2)} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Problema 3. De una 2-forma ω en $\mathbb{R}^3$ se sabe que:

$$\omega_{(1,2,1)} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \,, \quad \omega_{(1,2,1)} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -4 \,, \quad \omega_{(1,2,1)} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = -4 \,.$$

Calcula $\omega_{(1,2,1)} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Problema 4. Calcula los siguientes productos exteriores en $\mathbb{R}^3$:

a) $(dx + dy - dz) \wedge (dx + dy + dz)$.

b) $(x\, dx + y\, dy + z\, dz) \wedge (x\, dy + y\, dz + z\, dx)$.

c) $(dx - z\, dy) \wedge \big((x^2 + y^2 + z^2)\, dx \wedge dz + xyz\, dy \wedge dz\big)$.

Problema 5. Calcula el "pull-back" $f^*\omega$ para cada una de las siguientes formas ω y funciones f:

a) $f : \mathbb{R}^2_{\mathbf{u}} \to \mathbb{R}^3_{\mathbf{x}}$, $f(u_1, u_2) = (u_1^2, u_2^2, e^{u_1 u_2})$, $\omega = x_2\, dx_1 + (x_1 - x_2 - x_3)\, dx_2 - dx_3$.

b) $f : \mathbb{R}^2_{uv} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, e^u)$, $\omega = (x^2 - y^2)\, dx \wedge dy - 3\,(x^2 + y^2)\, dy \wedge dz$.

c) $f : \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^3_{xyz}$, $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\, dx + (x - \cos z)\, dy + (x^2 + y^2 - 1)\, dz$.

Problema 6. Se considera la siguiente 1-forma en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $\omega = \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$:

a) Comprueba que ω es cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Demuestra que no es exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ viendo que $\displaystyle\int_\alpha \omega \neq 0$ para un camino cerrado α en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Demuestra que $\omega|_{(1,\infty)\times\mathbb{R}}$ es exacta y encuentra un potencial suyo.

d) Demuestra que $\omega|_{(-\infty,-1)\times\mathbb{R}}$ es exacta y encuentra un potencial suyo.

Problema 7. Demuestra que la 1-forma

$$\omega = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$$

es exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y construye un potencial suyo. Utilízalo para calcular la integral $\displaystyle\int_\alpha \omega$ de α a lo largo del camino α dado por $\alpha(t) = \big(e^t, t\big)$, $t \in [0,2]$.

Problema 8. Decide si las siguientes formas de Pfaff son exactas y, en caso afirmativo, encuentra un potencial.

a) $\omega = (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $\omega = y\cos(yz)\,dx + (x\cos(yz) - xyz\,\mathrm{sen}(yz) + 2yz)\,dy + \big(y^2 - xy^2\,\mathrm{sen}(yz)\big)\,dz$ en $\mathbb{R}^3$.

Problema 9. (a) Halla una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal manera que la forma $\omega = x^2 y\,dx + f(x)\,dy$ sea exacta.
(b) Demuestra que no existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la forma $\omega = x^2 y\,dx + g(y)\,dy$ sea exacta en $\mathbb{R}^2$.

Problema 10. Construye una normal unitaria continua ν para cada una de las siguientes hipersuperficies M. Se sobreentiende que $a, b, c > 0$.

a) La elipse $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$.

b) El grafo $\{(x_1, \ldots, x_{k-1}, f(x_1, \ldots, x_{k-1})) : (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in W\}$ con $f : W \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto W de $\mathbb{R}^{k-1}$.

c) El elipsoide $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1$.

d) El trozo de hiperboloide de dos hojas $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1,\ -2c < z < 2c\right\}$.

e) El trozo de paraboloide elíptico $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{z}{c} = \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2,\ 0 \le z < c\right\}$.

Problema 11. a) Explica por qué la elipse $\Gamma_1 = \left\{(x,y) : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$ es la imagen de la circunferencia unidad por la aplicación

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}.$$

Utiliza esta observación para dar una parametrización inyectiva de la elipse (menos un punto) a partir de una parametrización de la circunferencia. Ajusta esa parametrización para que sea compatible con la normal unitaria ν que has elegido en el ejercicio **10.** a).
Utiliza la parametrización ajustada para calcular $\displaystyle\int_{(\Gamma_1,\nu)} \big((x+y)\,dx - x\,dy\big)$.

b) Haz lo mismo con el trozo de hipérbola $\Gamma_2 = \left\{(x,y) : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1\,,\ -c < y < c\right\}$ (es decir, elige una normal unitaria ν y construye una parametrización compatible) y calcula $\displaystyle\int_{(\Gamma_2,\nu)} \left[\sqrt{b^2 + y^2}\,dx + xy\,dy\right]$.

Problema 12. a) Explica por qué el elipsoide $S = \left\{(x,y,z) : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$ es la imagen de la esfera unidad por la aplicación $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $(x,y,z) \mapsto \big(ax\,,\,by\,,\,cz\big)$. Utiliza esta observación para dar una parametrización inyectiva del elipsoide (menos un subconjunto que sea un arco) a partir de una parametrización de la esfera. Ajusta la parametrización para que sea compatible con la normal unitaria ν elegida en el ejercicio **10.** c).
Utiliza la parametrización ajustada para calcular $\displaystyle\int_{(S,\nu)} z\,dx \wedge dy$.

b) Para el trozo de hiperboloide reglado $M = \left\{(x,y,z) : \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{z}{c}\right)^2\,,\ -1 < z < 1\right\}$ elige una normal unitaria continua ν, construye una parametrización inyectiva de M menos un arco, que sea compatible con la normal unitaria elegida, y calcula $\displaystyle\int_{(M,\nu)} x\,dy \wedge dz$.

Problema 13. Para cada una de las siguientes parametrizaciones φ de la circunferencia $x^2+y^2=1$, construye la norma unitaria compatible con φ:

a) $\varphi(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t),\ \ t\in(0,2\pi)$.

b) $\varphi(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t),\ \ t\in(0,2\pi)$.

c) $\varphi(t)=(t, \sqrt{1-t^2}),\ \ t\in(-1,1)$.

d) $\varphi(t)=(t, -\sqrt{1-t^2}),\ \ t\in(-1,1)$.

Problema 14. Para cada una de las siguientes parametrizaciones φ del hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$, construye la normal unitaria compatible con φ:

a) $\varphi(u,v)=(\cos u\cosh v, \operatorname{sen} u\cosh v, \operatorname{senh} v),\ \ u\in(0,2\pi),\ \ v\in\mathbb{R}$.

b) $\varphi(u,v)=(\cos v\cosh u, \operatorname{sen} v\cosh u, \operatorname{senh} u),\ \ u\in\mathbb{R},\ \ v\in(0,2\pi)$.

c) $\varphi(u,v)=(u,v,\sqrt{u^2+v^2-1}),\ \ (u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}(0,1)$.

d) $\varphi(u,v)=(u,v,-\sqrt{u^2+v^2-1}),\ \ (u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}(0,1)$.

e) $\varphi(u,v)=(\sqrt{v^2+1}\cos u, \sqrt{v^2+1}\operatorname{sen} u, v),\ \ u\in(0,2\pi),\ \ v\in\mathbb{R}$.

Problema 15. Halla la derivada exterior de las siguientes formas:

a) $x\,dy+y\,dx$.

b) $(u+v)\,(du+dv)$.

c) $f(x)\,dx+g(y)\,dy$.

d) $2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy$.

e) $(x+z)\,dx+(y-z)\,dy+(x-y)\,dz$

f) $xy\,dz+xz\,dy+yz\,dx$.

g) $(x^2+y+z^2)\,dx\wedge dz+xyz\,dy\wedge dz-\operatorname{sen}(yz)\,dx\wedge dy$.

h) $x_3\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4-x_2\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+x_3\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4-x_4\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$.

Problema 16. Comprueba que la 2-forma en $\mathbb{R}^3$

$$\omega=(1-z\,e^{yz})\,dx\wedge dy+(1-y\,e^{yz})\,dx\wedge dz+(2y+z+\operatorname{sen} z)\,dy\wedge dz$$

es cerrada. Concluye que es exacta y halla una 1-forma η tal que $\omega=d\eta$.

Problema 17. Dada la 3-forma en $\mathbb{R}^4$

$$\omega=x_1\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+x_2\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4+x_3\,dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4+x_4\,dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4,$$

comprueba que es cerrada y halla una 2-forma η tal que $\omega=d\eta$.

Problema 18. Halla una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ de tal manera que la 2-forma en $\mathbb{R}^3$

$$\omega=(x+y+xz)\,dx\wedge dy+\big(x^2+y\operatorname{sen} x+\cos z\big)\,dx\wedge dz+f(x)\,dy\wedge dz$$

sea cerrada. Para esa f, calcula una 2-forma η tal que $\omega=d\eta$.

Problema 19. Considera la superficie $M=\Big\{(x,y,z)\,,\ z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\Big\}$. Elige una orientación $\mathcal{O}$ de M y calcula la correspondiente integral $\displaystyle\int_{(M,\mathcal{O})}\big(\,x\,dy\wedge dz+dx\wedge dz\,\big)$.

Problema 20. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. Demuestra que la suma de formas exactas en U es exacta en U. Demuestra que la suma de formas cerradas en U es cerrada en U. Demuestra que si α es una forma exacta en $\mathbb{R}^2$ entonces $\omega=\alpha+x\,dy$ no es exacta en $\mathbb{R}^2$.