1) Las matrices de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se suelen escribir en la forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Decir si es verdadero o falso que los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tienen la estructura que se afirma:

i) $\big(\{A \,/\, a_{21} = 0\}, +, \cdot\big)$ es un cuerpo.

ii) $\big(\{A \,/\, a_{12} = 0\}, +, \cdot\big)$ es un anillo no conmutativo.

iii) $\big(\{A \,/\, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1\}, \cdot\big)$ es un grupo.

iv) $\big(\{A \,/\, a_{11} = a_{22},\ a_{12} = a_{21} = 0\}, +, \cdot\big)$ es un cuerpo.

v) $\big(\{A \,/\, a_{ij} \in \mathbb{Z},\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \text{ y } a_{21} \text{ es par}\}, \cdot\big)$ es un grupo.

vi) $\big(\{A \,/\, a_{12} = a_{21}\}, +, \cdot\big)$ es un anillo.

2) Comprobar que el conjunto $\{n + m\sqrt{2} \,/\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un anillo con la suma y producto habituales.

3) Comprobar que $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ define una operación cerrada en $C = \{-1 < x < 1\}$. ¿Es $(C, *)$ un grupo abeliano?

4) Estudiar si en $\mathbb{Z}$ la operación $n * m = n + m + 2mn$ es conmutativa y asociativa.

5) Comprobar que el conjunto de funciones $C = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ no es un grupo abeliano con la composición. ¿Lo es si exigimos que las funciones sean biyectivas?

6) Comprobar que la operación $n * m = nm(n+1)(m+1)/4$ es cerrada en $\mathbb{Z}$. ¿Es conmutativa y asociativa?

7) En el conjunto $P = \{\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ se definen las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ con las siguientes tablas:

$\oplus$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$

$\otimes$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$

Con estas operaciones, P es un cuerpo.

i) Comprobar la propiedad asociativa para $\clubsuit \oplus \spadesuit \oplus \heartsuit$.

ii) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $\spadesuit$?

iii) Resolver la ecuación $x \oplus x \oplus (\heartsuit \otimes x) = \clubsuit$.

Nota: El grupo abeliano $(P, \oplus)$ se llama grupo de Klein o *Viergruppe*. En el libro de Miguel de Guzmán "Cuentos con cuentas", se dan un par de aplicaciones de este grupo a la resolución de algunos rompecabezas.

8) Demostrar que la diferencia simétrica de conjuntos es una operación conmutativa y asociativa.