Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS VECTORIALES

EL SUBESPACIO VECTORIAL

Índice

Presentación

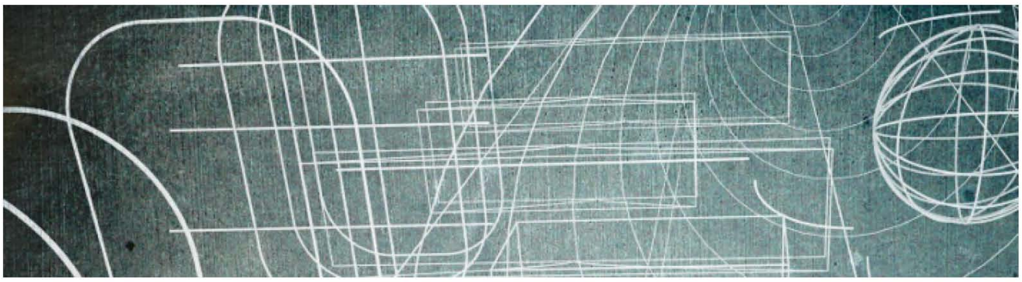
Ya hemos hablado del espacio vectorial, de la estructura general y de los vectores, las unidades elementales de esta. Pero las subestructuras de un espacio vectorial son tan interesantes o más que el espacio general. En un espacio real de dimensión tres, los subespacios supondrán estructuras geométricas tales como planos y rectas.

En el espacio de las matrices cuadradas de orden 3, las subestructuras son tensores y matrices asociadas a transformaciones geométricas en otros espacios tales como rotaciones, simetrías y proyecciones.

Los subespacios contarán con su propia organización interna de dimensiones y bases y eso es precisamente lo que vamos a estudiar en profundidad.

En este tema aprenderás:

- Qué es un subespacio, cómo funciona, que leyes sigue.
- Cómo se calcula la dimensión y la base de un subespacio.
- Cómo son las intersecciones, uniones y sumas de subespacios.
- Las distintas formas de expresar un subespacio: ecuaciones implícitas, paramétricas, etc.
- Y mucho más.



El subespacio vectorial M_2

Tras conocer los espacios vectoriales y sus bases, hemos de saber que al igual que ocurre en estructuras algebraicas de orden inferior, como los grupos y los anillos, el **espacio vectorial cuenta con subconjuntos** que presentan su misma estructura: los llamados **subespacios vectoriales**.

Pongamos un espacio vectorial como el de las matrices, M_{nxm}:

$$M_{nxm} = \left\{ M \in M_{nxm} \quad / \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2m} \\ \vdots \vdots \ddots \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nm} \end{pmatrix} \right. \quad \forall a_{ij} \in \Re \quad con \begin{cases} i = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ahora escojamos un subconjunto de este: las matrices cuadradas de 2x2, M_2.

$$M_2 = \left\{ A \in M_2 \quad / \quad A = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \quad \forall a, b, c, d \in \Re \right\}$$

M_2 sobre el cuerpo de los reales forma un espacio vectorial, pues cumple:

- **Axioma 1**. Ley modular.
- **Axioma 2**. Asociativa con escalares.
- **Axioma 3**. Doble distributiva.

Por lo tanto, al ser M_2 un espacio vectorial, y a su vez un subconjunto de otro espacio vectorial, M_{nxm}, se dirá que M_2 es subespacio vectorial de M_{nxm}.

Ley modular

$$\forall A \in M_2 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot A = A$$

Asociativa con escalares

$$\left.\begin{matrix} \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \\ \forall A \in M_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$$

Doble distributiva

Respecto a escalares:

$$\left.\begin{matrix} \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \\ \forall A \in M_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow (\lambda + \mu) \cdot A = (\lambda \cdot A) + (\mu \cdot A)$$

Respecto a vectores:

$$\left.\begin{matrix} \forall \lambda \in \mathfrak{R} \\ \forall A, B \in M_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda \cdot (A + B) = (\lambda \cdot A) + (\lambda \cdot B).$$

Linealidad en subespacios

El principal problema que presenta el cálculo de subespacios del modo presentado anteriormente, es que el cálculo de la axiomática completa de subespacios puede ser largo y complejo. Afortunadamente, hay una alternativa mucho más sencilla a la hora de llevar a cabo dicho cálculo, veámosla.

Un conjunto S contenido en un espacio vectorial V, $S \subset V$, será espacio vectorial de este si cumple:

- Que dados dos vectores de S, su suma da un nuevo vector de S: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in S \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} \in S$.

- Que dado el producto de un vector de S con un escalar, resulta otro vector de S: $\begin{cases} \forall \vec{u} \in S \\ \forall \lambda \in K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{u} \in S$

Estas dos condiciones se resumen en otra más sencilla de plantear que las resume. En general, esta última condición será la que se use a la hora de considerar el cálculo de un subespacio:

> Si la combinación lineal de dos vectores cualesquiera de S con dos reales cualesquiera del cuerpo, da como resultado otro vector de S, S será subespacio vectorial de V.

$$S \; es \; subespacio \; de \; V \; \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \\ \forall \lambda, \mu \in K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in S$$

Estas condiciones se cumplen siempre para el vector nulo, con lo que cabe añadir que el vector nulo del espacio pertenecerá siempre a todos los subespacios de este, siendo a su vez el vector nulo de los propios subespacios. Es decir:

$$\vec{0} \in V \quad \Rightarrow \quad \vec{0} \in S \; (siempre)$$

Ejemplo de cálculo de subespacio I

Veamos otro cálculo de subespacio a través de esta nueva definición. Veamos si S_2, el conjunto de las matrices simétricas de 2x2, es subespacio vectorial de M_2.

Recordemos que:

$$M_2 = \left\{ A \in M_2 \quad / \quad A = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R} \right\}$$

Y por otro lado, S_2 se definirá como:

$$S_2 = \left\{ A \in S_2 \quad / \quad A = \begin{pmatrix} ab \\ bc \end{pmatrix} \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{R} \right\}$$

Es decir, aquellas matrices cuadradas de 2x2 que tienen el mismo elemento a ambos lados de su diagonal principal, luego si se ha de cumplir la definición, tendremos que:

$$S_2 \; es \; subespacio \; de \; M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall A, B \in S_2 \\ \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda A + \mu B \in S_2$$

Si $A \in S_2 \quad A = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\gamma \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$

Si $B \in M_2 \quad B = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon \\ \varepsilon\phi \end{pmatrix} \quad \delta, \varepsilon, \phi \in \mathfrak{R}$

Por lo tanto $\lambda A+\mu B=\lambda\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\gamma\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\delta\varepsilon\\ \varepsilon\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha+\mu\delta\lambda\beta+\mu\varepsilon\\ \lambda\beta+\mu\varepsilon\lambda\gamma+\mu\phi\end{pmatrix}$

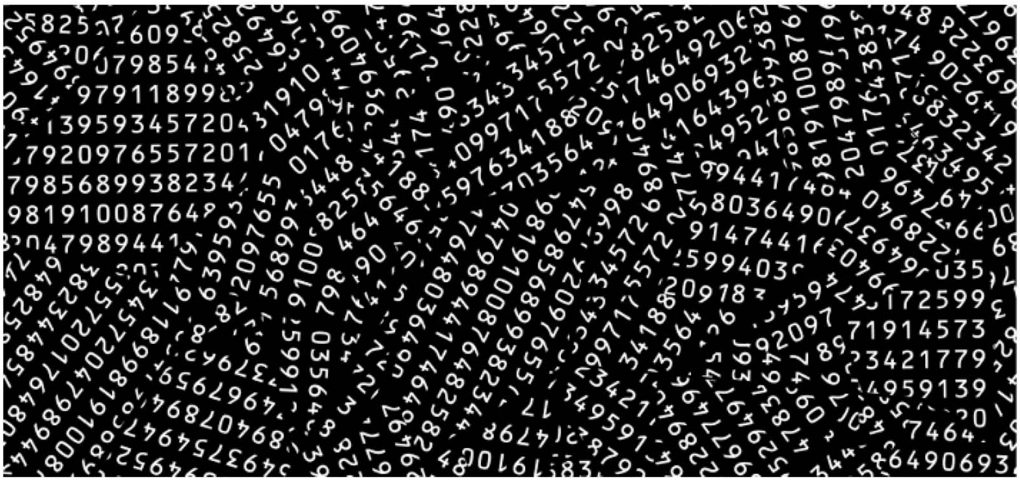
Ejemplo de cálculo de subespacio II

Vemos que la matriz resultante es efectivamente una matriz simétrica de 2x2, ya que presenta elementos distintos en su diagonal principal, y el mismo elemento a ambos lados de la misma: $\lambda\beta + \mu\varepsilon$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha + \mu\delta & \lambda\beta + \mu\varepsilon \\ \lambda\beta + \mu\varepsilon & \lambda\gamma + \mu\phi \end{pmatrix} \in M_2$$

Y por ende S_2, el conjunto de las matrices simétricas de 2x2, es subespacio vectorial de M_2.



Subespacios en R^n

Tras hablar de subespacios del espacio de las matrices, tratemos ahora el espacio vectorial más importante de todos: R^n.

Veamos primero cómo se puede plantear un subespacio de R^n. Los subespacios vectoriales son, a su vez, espacios vectoriales. Por lo tanto, presentan tanto dimensión como base.

En primer lugar está la expresión de este a partir de un sistema generador del mismo, pongámos un ejemplo en R^3: dado el conjunto $E = L\{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$, vamos a comprobar que se trata de un subespacio vectorial de R^3.

Lo primero que debemos entender es que si se nos presenta E como combinación lineal de tres vectores: $L\{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$, se nos está indicando que esos tres vectores conforman la base de E, siempre y cuando sean linealmente independientes.

Vemos que $(1,0,1)+(1,1,0)=(2,1,1)$, luego no son linealmente independientes (l.i.). Como el (2,1,1) depende linealmente de los otros dos vectores, nos deshacemos de él, porque no me da más información, y nos quedamos con (1,0,1) y (1,1,0). Partimos entonces de $E = L\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.

Para que un conjunto sea subespacio, debe cumplir:

$$E \text{ es subespacio de } \mathfrak{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u},\vec{v} \in E \\ \forall \lambda,\mu \in \mathfrak{R} \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in E$$

Luego $\forall \vec{x} \in E \quad \vec{x} = \alpha(1,0,1)+\beta(1,1,0) = (\alpha+\beta,\beta,\alpha) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{R}$ con lo que, si se puede escribir cualquier vector de E de esta forma, tendríamos:

Si $\vec{u} \in E \quad \vec{u} = (a+b, a, b)$

Si $\vec{v} \in E \quad \vec{v} = (c+d, c, d)$

Luego $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda(a+b, a, b) + \mu(c+d, c, d) = (\lambda(a+b) + \mu(c+d), \lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d) \in$

Como el vector resultante de la suma tiene la misma estructura que un vector de E, concluimos que E es subespacio vectorial.

Ecuaciones implícitas de un subespacio

Las ecuaciones implícitas de un subespacio son unas ecuaciones que explican cómo se encuentran ligadas las componentes de un vector genérico de ese subespacio.

Por ejemplo, un subespacio U de R^3 presenta la siguiente implícita:

$$U = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \Re^3 / \underbrace{x + y + z = 0}_{Ec.\ implícita\ de\ U} \right\}$$

¿Qué significa eso? Pues que U esta formado por aquellos vectores de R^3 cuyas componentes sumen 0. Por ejemplo: el $(2, -1, -1) \in U$.

Si nos hubiesen pedido calcular las ecuaciones implícitas de E, el subespacio que hemos estudiado un poco antes, habría que proceder como se indica a continuación:

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in E \quad \vec{x} = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) = (\alpha+\beta, \beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \Re \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} = \alpha + \beta & (i) \\ y = \beta & (ii) \\ z = \alpha & (iii) \end{cases}$$

Si introdujésemos (ii) y (iii) en (i), obtendríamos x=y+z, que es la ecuación implícita del subespacio.

El subespacio E es de dimensión 2 (*dim(E)=2*) porque su base está formada por dos vectores l.i.

También podríamos haber llegado a la misma conclusión viendo que el subespacio depende de dos parámetros en sus ecuaciones paramétricas. De hecho, conviene recordar la siguiente regla:

> Nº de incónitas = Nº de ecuaciones implícitas + Nº de parámetros

Si la dimensión de un subespacio coincide con la dimensión del espacio en el que está contenido, subespacio y espacio son iguales:

$$E \textit{ es subespacio de } V \;\Rightarrow\; E \subseteq V$$
$$\textit{si } \dim(E) = \dim(V) \;\Rightarrow\; E = V$$

Número de incógnitas

El número de incónitas puede plantearse también como dimensión del **espacio.**

Número de parámetros

El número de parámetros puede plantearse también como dimensión del **subespacio**.

Ecuación paramétrica de un subespacio

En el problema anterior, hemos llegado hasta el paso:

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in E \quad \vec{x} = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) = (\alpha+\beta, \beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \Re \quad \Rightarrow \quad \Bigg\{$$

A esas tres ecuaciones, (i), (ii) e (iii), se las conoce como ecuaciones paramétricas del subespacio. Las ecuaciones paramétricas permiten saber dos cosas: qué dimensión tiene el subespacio y qué estructura tienen los vectores de la base del subespacio.

La dimensión del subespacio viene dada por el número de parámetros linealmente independientes que estén presentes. En el caso enunciado más arriba sería 2, ya que presenta dos parámetros α y β.

En cuanto al cálculo de la base, en realidad este se debería extrapolar a partir del siguiente hecho: cualquier vector del subespacio se escribe: $\vec{x} = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0)$.

Sin embargo, si tomamos las paramétricas y sustituimos ordenadamente los parámetros por unos y ceros la obtendríamos con gran facilidad.

Primero sustituimos el primer parámetro por 1 y los restantes (en este caso solo hay uno) por 0:

$\begin{cases} x = 1+0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (1,0,1)$ Con lo que, efectivamente, obtenemos el primer vector de la base.

A continuación, sustituimos el segundo parámetro por 1 y los restantes (en este caso solo hay uno) por 0:

$\begin{cases} x = 0 + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (1,1,0)$ Con lo que, efectivamente, obtenemos el segundo vector de la base.

Quedando, como ya sabíamos, $E = L\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.

Subespacio a partir de sus implícitas

A continuación, vamos a trabajar un poco con las ecuaciones implícitas comprobando si el conjunto K describe un subespacio vectorial. Para eso tendremos a K definido mediante sus ecuaciones implícitas. Al final también vamos a calcular su dimensión y una base.

Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, lo que nos da un grado de libertad. Por este motivo, deberemos fijar un parámetro:

$$K = \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Re$$

Por lo que cualquier vector de K se escribirá:
$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in K \quad \vec{x} = \alpha(1, -1, 1) = (\alpha, -\alpha, \alpha) \quad \forall \alpha \in \Re$

Para que un conjunto sea subespacio, debe cumplir:

$$K \; es \; subespacio \; de \; \Re^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in K \\ \forall \lambda, \mu \in \Re \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in K$$

Con lo que, si se puede escribir cualquier vector de K de esta forma, tendríamos:

Si $\vec{u} \in K \quad \vec{u} = (a, -a, a)$

Si $\vec{v} \in K \quad \vec{v} = (c, -c, c)$

Luego
$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda(a, -a, a) + \mu(b, -b, b) = (\lambda a + \mu b, -(\lambda a + \mu b), \lambda a + \mu b) \in K$

Como el vector resultante de la suma $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ tiene la misma estructura que un vector de K, concluimos que K es subespacio vectorial. Para obtener su base, vamos a la ecuación paramétrica y le damos valor 1 al parámetro:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Re \xrightarrow{\alpha=1} (1,-1,1)$$

Luego la base de K es $B_K = \{(1,-1,1)\}$, y su dimensión dim(K)=1.

Ecuaciones implícitas de K

$$K = \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

A veces la cosa no funciona

Parece que cualquier conjunto dentro de un espacio vectorial tendrá estructura de subespacio, pero no es así. Vamos a comprobar si el conjunto E definido mediante las siguientes ecuaciones implícitas:

$E = \left\{ \forall \vec{x} = (x, y, z) \in \Re^3 / x + z = 3 \right\}$, describe un espacio vectorial.

Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, lo que nos da un grado de libertad. Por este motivo, deberemos fijar un parámetro:

$$x + z = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \Re$$

Luego cualquier vector de E se escribirá:

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in E \quad \vec{x} = (\alpha, \beta, 3 - \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in \Re$$

Para que un conjunto sea subespacio, debe cumplir:

$$K \; es \; subespacio \; de \; \Re^3 \; \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in K \\ \forall \lambda, \mu \in \Re \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in K$$

Con lo que si se puede escribir cualquier vector de E de esta forma, tendríamos:

Si $\vec{u} \in E \quad \vec{u} = (a, b, 3 - a)$

Si $\vec{v} \in E \quad \vec{v} = (c, d, 3 - c)$

Luego $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda(a, b, 3 - a) + \mu(c, d, 3 - c) = (\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d, 3(\lambda + \mu) - \lambda a - \mu c) \notin$

Como el vector resultante de la suma $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ **no tiene** la misma estructura que un vector de E, debido a que figura el término $3(\lambda + \mu)$ donde sólo debería haber un 3, concluimos que E **no es** subespacio vectorial.

Resumen

Definición de subespacio vectorial

Si la combinación lineal de dos vectores cualesquiera de S con dos reales cualesquiera del cuerpo, a como resultado otro vector de S, S será subespacio vectorial de V.

- $S \ es \ subespacio \ de \ V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \\ \forall \lambda, \mu \in K \end{cases} \Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in S$
- $\vec{0} \in V \quad \Rightarrow \quad \vec{0} \in S \ (siempre)$

Regla de las implícitas

Nº de incónitas = Nº de ecuaciones implícitas + Nº de parámetros

- Nº de incónitas puede plantearse también como dimensión del **espacio**.
- Nº de parámetros puede plantearse también como dimensión del **subespacio**.
  - Si la dimensión de un subespacio coincide con la dimensión del espacio en el que está contenido, subespacio y espacio son iguales.
  - $E \ es \ subespacio \ de \ V \ \Rightarrow \ E \subseteq V$
  - Si $\dim(E) = \dim(V) \ \Rightarrow \ E = V$