Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS VECTORIALES

EL CAMBIO DE BASE

Índice

Presentación

La posición general, dentro de cualquier disposición es un término que siempre tiene una connotación relativa implícita. No sabemos dónde se encuentra algo por sí solo, sino que podemos decir donde está respecto al resto de los elementos de su sistema.

El posicionamiento es la base desde la que parten los problemas tanto en espacios vectoriales como en otras muchas ramas científico técnicas desde la física a la ingeniería. El estudio de la posición es el estudio de los sistemas de referencia y de sus relaciones. En álgebra eso tiene un nombre: cambio de base.

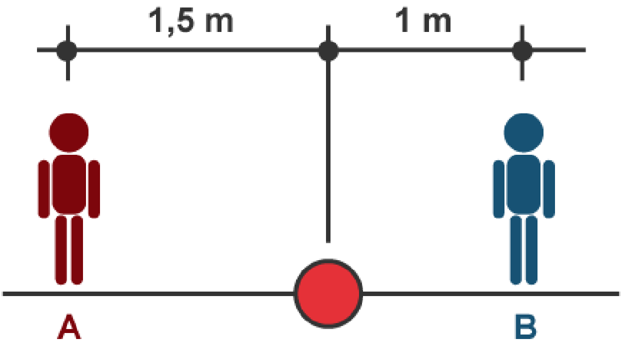
Nosotros lo vamos a estudiar de forma teórica y práctica, porque este tema será una de las premisas que se deben conocer al detalle antes de enfrentar figuras más complejas que en adelante lo englobarán.

En este tema aprenderás:

- Qué es un cambio de base, profundizando en el concepto de base y su funcionamiento.
- Cómo se lleva a la práctica un cambio de base.
- Cómo funciona un sistema de posicionamiento relativo en un espacio.
- Y muchas cosas más.

Posiciones relativas

Observa el siguiente croquis de posiciones de dos personajes frente a un balón. El personaje A está a 1.5 metros del balón, mientras que el B se encuentra a 1 metro. Si preguntas a cada uno de ellos a qué distancia está el balón, cada uno contestará un número distinto, pero el balón seguirá en el mismo sitio.

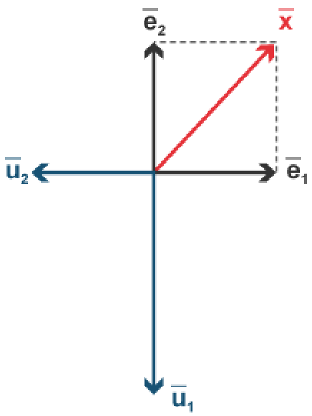


Incluso si el personaje A conoce su distancia al balón y también su distancia al personaje B, entonces podrá conocer la distancia de B al balón. Es decir, que cuando tenemos puntos de vista distintos, las medidas que se hacen desde cada uno de un mismo elemento pueden variar a pesar de que el elemento permanezca imovil, debido a la diferencia de orientación y posición espacial de cada uno de los sitemas de referencia.

Asimismo, si conocemos la posición de un elemento en un sistema, y la posición relativa de los restantes sistemas de regencia respecto a ese sistema, podremos conocer la posición del elemento en todos los sistemas.

Dos bases en el plano

Planteemos un escenario sencillo dentro de un espacio vectorial sencillo. Por ejemplo, el que tenemos a continuación en R2: aquí podemos observar dos bases que llamaremos $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, así como un vector $\vec{x}$. Ahora bien, ese vector , $\vec{x}$, puede expresarse como combinación lineal de cualquiera de las bases planteadas. De tal manera tendríamos:



$$\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1\ ,\ 1)_B$$
$$\vec{x} = -\tfrac{1}{2}\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \left(\tfrac{-1}{2}\ ,\ -1\right)_{B'}$$

El vector $\vec{x}$ no ha variado. Simplemente, está siendo observado desde otro punto de vista. Por eso sus componentes varían.

De la misma manera podemos expresar cada uno de los vectores de las bases tanto en B como en B'. Veamos:

$$\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = (1,0)_B = 0\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = (0,-1)_{B'}$$
$$\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = (0,1)_B = {}^{-1}\!/_2\ \bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 = \left({}^{-1}\!/_2\ ,\ 0\right)_{B'}$$
$$\bar{u}_1 = 0\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = (0,-2)_B = 1\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 = (1,0)_{B'}$$
$$\bar{u}_2 = -1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = (-1,0)_B = 0\bar{u}_1 + 1\bar{u}_2 = (0,1)_{B'}$$

Ahora conocemos la expresión de $\vec{x}$ en ambas bases y la expresión relativa de cada base en la suya y en la otra. Esto nos permite efectuar un cambio de base a $\vec{x}$.

$$\vec{x} = -\tfrac{1}{2}\,\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = -\tfrac{1}{2}\,\underbrace{\vec{u}_1}_{-2\vec{e}_2} - \underbrace{\vec{u}_2}_{-\vec{e}_1} = -\tfrac{1}{2}\,(-2\vec{e}_2) - (-\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Este aún no es el sistema más eficiente de cambio de base, que estudiaremos más adelante, pero planta las bases de su esencial funcionamiento.

Relación analítica entre dos bases de un mismo espacio

Sea $V^n(K)$ un espacio de dimensión n, y sean $B_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B_2 = \left\{\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_n{}'\right\}$ dos bases del mismo.

Se supondrán conocidas las coordenadas de los vectores de la base B_2 en la base B_1 por las relaciones:

$$\vec{e}_j{}' = c^i{}_j \vec{e}_i \quad \forall i, j \in I_n$$

- Sea $\vec{x} \in V$ un vector genérico. Se tratará de obtener la relación que liga sus coordenads en ambas bases.
- Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ las coordenadas de $\vec{x}$ en $B_1 \to \vec{x} = x^i \cdot \vec{e}_i$.
- Sean $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ las coordenadas de $\vec{x}$ en $B_2 \to \vec{x} = x^{j'} \cdot \vec{e}_j{}'$.

$$\vec{x} = x^{j'} \cdot \vec{e}_j{}' = x^{j'} c^i{}_j \vec{e}_i \to x^{j'} c^i{}_j = x^i \quad \forall i, j \in I_n$$

Luego el cambio de base $\vec{e}_j{}' = c^i{}_j \vec{e}_i \quad \forall i, j \in I_n$ lleva aparejado el cambio de coordenadas:

$$x^i = x^{j'} c^i{}_j \quad \forall i, j \in I_n$$

Se dará ahora la expresión matricial a los cambios anteriores:

$$\vec{e}_j{}' = c^i{}_j \vec{e}_i \to \begin{cases} j = 1 \to \vec{e}_1{}' = c^1{}_1 \vec{e}_1 + \ldots + c^n{}_1 \vec{e}_n \\ \qquad \vdots \\ j = n \to \vec{e}_n{}' = c^1{}_n \vec{e}_1 + \ldots + c^n{}_n \vec{e}_n \end{cases}$$

Que en forma matricial se expresa:

$\left\|\vec{e}_1{}' \ldots \vec{e}_n{}'\right\| = \|\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\| \begin{pmatrix} c^1{}_1 \cdots c^1{}_n \\ \vdots\vdots\vdots \\ c^n{}_1 \cdots c^n{}_n \end{pmatrix}$ quedando la matriz $C = \begin{pmatrix} c^1{}_1 \cdots c^1{}_n \\ \vdots\vdots\vdots \\ c^n{}_1 \cdots c^n{}_n \end{pmatrix}$.

Matriz de cambio de base

La matriz descrita anteriormente...

$$C = \begin{pmatrix} c^1{}_1 \cdots c^1{}_n \\ \vdots\vdots\vdots \\ c^n{}_1 \cdots c^n{}_n \end{pmatrix}$$

...recibe el nombre de matriz de cambio de base de B_1 a B_2 y proporciona en su columna i, las coordenadas del vector $\vec{e}_i{}'$ en la base B_1.

$$x^i = x^{j'} c^i{}_j \rightarrow \begin{cases} i = 1 \rightarrow x^1 = x^{1'} c^1{}_1 + \ldots + x^{n'} c^n{}_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ i = n \rightarrow x^n = x^{1'} c^1{}_n + \ldots + x^{n'} c^n{}_n \end{cases}$$

Que en forma matricial se expresa:

$$\left\| x^1 \ldots x^n \right\| = \left\| x^{1'} \ldots x^{n'} \right\| \begin{pmatrix} c^1{}_1 \cdots c^n{}_1 \\ \vdots\vdots\vdots \\ c^1{}_n \cdots c^n{}_n \end{pmatrix}$$

Es decir: $\left\| x^1 \ldots x^n \right\| = \left\| x^{1'} \ldots x^{n'} \right\| C^T$

O bien: $\left\| x^{1'} \ldots x^{n'} \right\| = \left\| x^1 \ldots x^n \right\| \left(C^{-1} \right)^T$

Luego matricialmente el cambio de base: $\left\| \vec{e}_1{}' \ldots \vec{e}_n{}' \right\| = \left\| \vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n \right\| C$

lleva aparejado el cambio de coordenadas: $\left\| x^{1'} \ldots x^{n'} \right\| = \left\| x^1 \ldots x^n \right\| \left(C^{-1} \right)^T$

Caso práctico de cambio de base

La explicación analítica puede ser un poco oscura de principio, con lo que vamos a ver el caso del cambio de base para **R**^{3}.

Sea una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de **R**^{3}, y otra base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ del mismo espacio.

Para poder hacer el cambio de base, es requisito conocer una de las bases expresada en función de la otra. En este caso pongamos que tenemos:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + a^3\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = b^1\vec{u}_1 + b^2\vec{u}_2 + b^3\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = c^1\vec{u}_1 + c^2\vec{u}_2 + c^3\vec{u}_3 \end{cases}$$

Vamos entonces a calcular la expresión de la matriz de cambio de base.

Sabemos que existe la siguiente relación entre bases: $B \underset{C^{-1}}{\overset{C}{\rightleftarrows}} B'$. C es la matriz de cambio de base de B a B', mientras que C^{-1} es la matriz de cambio de base de B' a B. En la relación decimos, habitualmente, que la base "nueva" es aquella a la que llega la felecha y la base "antigua" es aquella de la que parte.

De esa forma, para C: B es la base antigua y B' es la base nueva, y para C^{-1}, B' es la antigua y B es la nueva.

C tiene por columnas los vectores de la base B' expresados en B. Es decir, que C tiene por coumnas los vectores de la base "nueva", expresados en la antigua:

$$C = \left(\begin{array}{ccc} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \underbrace{a^3}_{\vec{v}_1} & \underbrace{b^3}_{\vec{v}_2} & \underbrace{c^3}_{\vec{v}_3} \end{array} \right)$$

¿Pero cómo funciona?

Vista con objetividad, una matriz de cambio de base no es más que una herramienta para lograr expresar un vector, cuyas componentes tenemos en una base B, en otra base B'.

Sigamos en R^3, de momento. Sea una base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de R^3, y otra base $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ del mismo espacio.

Si tenemos un vector cualquiera $\vec{x}\in\Re^3$, podremos expresar dicho vector en cualquier base de R^3 incluidas las citadas B y B':

$$\vec{x}=(x,y,z)_B=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$$

$$\vec{x}=(a,b,c)_{B'}=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2+c\vec{u}_3$$

Pues bien, la matriz de cambio de base me permite obtener una un juego de componentes a partir de otro de la forma:

$$(C)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B}$$ o bien $(\,abc\,)_{B'}\,(C)^{T} = (\,xyz\,)_{B}$

$$\left(C^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B'}$$ o bien $(\,xyz\,)_{B}\left(C^{-1}\right)^{T} = (\,abc\,)_{B'}$

Ejemplo de cambio de base I

Sea una base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de **R**^{3}, y otra base $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ del mismo espacio.

Si sabemos que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1=\vec{u}_1+2\vec{u}_2+\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2=\vec{u}_1+\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3=\vec{u}_2+\vec{u}_3 \end{cases}$$

Vamos entonces a calcular la expresión de los vectores de B expresados en B'. Sabemos que existe la siguiente relación entre bases:

$$B\xrightarrow{C}B' \qquad B\xleftarrow{C^{-1}}B'$$

C tiene por columnas los vectores de la base B' expresados en B.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \underbrace{1}_{\vec{v}_1} & \underbrace{1}_{\vec{v}_2} & \underbrace{1}_{\vec{v}_3} \end{pmatrix}$$

Análogamente C^{-1} tiene por columnas los vectores de la base B expresados en B'.

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \underbrace{-1}_{\vec{u}_1} & \underbrace{0}_{\vec{u}_2} & \underbrace{1}_{\vec{u}_3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo de cambio de base II

Esto se podría calcular mediante la inversa habitual de una matriz: $C^{-1} = \frac{Adj(C)^t}{|C|}$ o bien despejando los vectores de la base B de la expresión inicial:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)_{B'} \\ \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)_{B'} \\ \vec{u}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)_{B'} \end{cases}$$

Sea como fuere, llegaríamos a la expresión pedida:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)_{B'} \quad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)_{B'} \quad \vec{u}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)_{B'}$$

Ejemplo de cambio de componentes

Utilicemos ahora la matriz de cambio de base para calcular la expresión del vector $\vec{w}=(1,1,1)_B$ en B' y la del vector $\vec{z}=(1,1,1)_{B'}$ en B.

- Para obtener la expresión del vector $\vec{w}=(1,1,1)_B$ en B':

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \underbrace{-1}_{\vec{u}_1} & \underbrace{0}_{\vec{u}_2} & \underbrace{1}_{\vec{u}_3} \end{pmatrix}}_{C^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B}_{\vec{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}}_{\vec{w}} \rightarrow \vec{w}=(1/2\,,1/2\,,0)_{B'}$$

- Para obtener la expresión del vector $\vec{z}=(1,1,1)_{B'}$ en B:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \underbrace{1}_{\vec{v}_1} & \underbrace{1}_{\vec{v}_2} & \underbrace{1}_{\vec{v}_3} \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}}_{\vec{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_B}_{\vec{z}} \rightarrow \vec{z}=(2,3,3)_B$$

Calcular la expresión del vector

Ya hemos calculado antes tanto

$$C = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}}_{\vec{v}_1} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{\vec{v}_2} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}_{\vec{v}_3} \end{pmatrix}$$

como

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix}}_{\vec{u}_1} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix}}_{\vec{u}_2} & \underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}}_{\vec{u}_3} \end{pmatrix}.$$

Resumen

Matriz de cambio de base

- Con dos bases: $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de R^3.
- El cambio se realiza: $B \underset{C^{-1}}{\overset{C}{\rightleftarrows}} B'$. Necesito una base expresada en la otra:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2 + a^3\vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = b^1\vec{u}_1 + b^2\vec{u}_2 + b^3\vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = c^1\vec{u}_1 + c^2\vec{u}_2 + c^3\vec{u}_3 \end{cases}$$

- De donde obtengo: $C = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \underbrace{a^3}_{\vec{v}_1} & \underbrace{b^3}_{\vec{v}_2} & \underbrace{c^3}_{\vec{v}_3} \end{pmatrix}$

$(C)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ o bien $(a)_{B'}(C)^T = (x)_B$

$\left(C^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B'}$ o bien $(x)_B\left(C^{-1}\right)^T = (a)_{B'}$