Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

LA DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

Índice

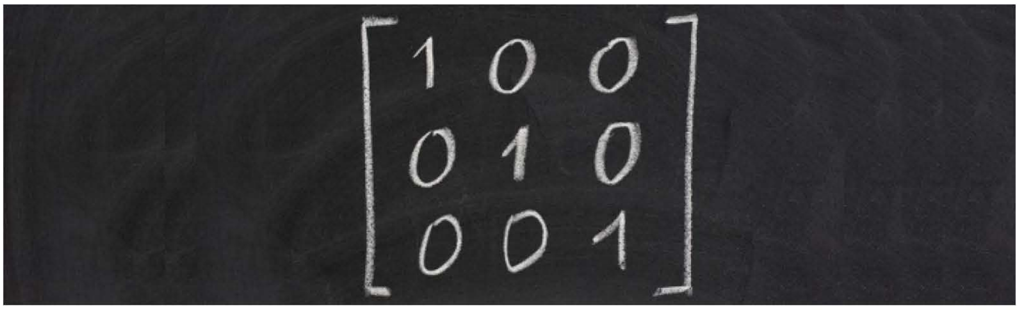
Presentación

El estudio del álgebra va siempre asociado al estudio de sus matrices. En particular el tema de autovalores y autovectores es interesante desde un punto de vista matricial. ¿Por qué? Por las posibilidades que ofrece de diagonalización por semejanza.

La expresión diagonal de la matriz tiene los autovalores situados a lo largo de la diagonal principal, arrojando mucha información sobre cómo funciona la transformación y qué características geométricas presenta la base de vectores propios donde se encuentra situada.

No es un tema muy complejo, pero si es muy completo. Veamos que aprenderemos con el:

- En este tema veremos cómo se expresa la matriz asociada a un homomorfismo en una base de vectores propios para presentar su expresión diagonal.
- Aprenderemos cuáles son los autovalores asociados a las proyecciones y a las simetrías.
- Estudiaremos la forma canónica de Jordan.
- Y mucho más.



Comencemos con un ejemplo

Intentemos resumir todo lo que hemos aprendido en un solo ejemplo largo.

En primer lugar, vamos a tener que establecer unas condiciones iniciales para saber dónde nos movemos. Pongamos que partimos de un endomorfismo f de $\Re^3$:

$$f : \Re^3 \to \Re^3$$

Definido de la forma:

$$f(\vec{x}) = (x^1 + x^2, x^1 + x^2, x^3)$$
$$\forall \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Re^3$$

Definimos la matriz de f, FB:

Teniendo definida la base B de $\Re^3$ como $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subset \Re^3$, dónde evidentemente sus vectores quedan definidos en la propia base como:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1,0,0)_B \\ \vec{e}_2 = (0,1,0)_B \\ \vec{e}_3 = (0,0,1)_B \end{cases}$$

1/3

La matriz FB queda:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{0}_{f(\vec{e}_2)} & \underbrace{1}_{f(\vec{e}_3)} \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la ecuación característica de f, utilizando $|F_B - \lambda I| = 0$

$$|F_B - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \left| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B} - \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

De esta manera, hemos obtenido los tres autovalores de f.

2/3

Recordemos que como f es un endomorfismo de $\Re^3$ y solo admite 3 autovalores. Estos, además, no tienen porqué ser distintos entre sí, aunque en este caso lo sean:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & OM(0) = 1 \\ \lambda_2 = 1 & OM(1) = 1 \\ \lambda_3 = 2 & OM(2) = 1 \end{cases}$$

Como cada uno de los autovalores es una raíz simple de la ecuación característica, todos los autovalores presentan orden de multiplicidad 1.

Si atendemos a la regla: $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$

Podremos deducir que, en este caso:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \quad OM(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq \dim(S(0)) \leq \underbrace{OM(0)}_{OM(0)=1} \;\Rightarrow\; 1 \leq \dim(S(0)) \leq 1 \;\Rightarrow\; \dim(S(0)) = 1 \\ \lambda_2 = 1 \quad OM(1) = 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq \dim(S(1)) \leq \underbrace{OM(1)}_{OM(1)=1} \;\Rightarrow\; 1 \leq \dim(S(1)) \leq 1 \;\Rightarrow\; \dim(S(1)) = 1 \\ \lambda_3 = 2 \quad OM(2) = 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq \dim(S(2)) \leq \underbrace{OM(2)}_{OM(2)=1} \;\Rightarrow\; 1 \leq \dim(S(2)) \leq 1 \;\Rightarrow\; \dim(S(2)) = 1 \end{cases}$$

Con lo que sabemos que las dimensiones de todos los subespacios característicos son 1.

3/3

Subespacios característicos I

Calculemos ahora los subespacios característicos. Recordemos que: $S(\lambda) = \ker(f - \lambda i)$. Eso significa que cada subespacio propio que calculemos lo tendremos que hacer según la ecuación matricial:

$$(F_B - \lambda I)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Empecemos con S(2):

$$S(2) = \ker(f - 2i) \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{F_B - 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - x^2 = 0 \\ -x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = \alpha \forall \alpha \in \Re \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

$$S(2) = L\left\{ \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}_1} \right\}$$

Continuemos con el cálculo de S(1):

$$S(1) = \ker(f - i) \quad \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F_B - I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = \beta \end{cases} \quad \forall \beta \in \Re$$

$$S(1) = L\left\{ \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{u}_2} \right\}$$

Subespacios característicos II

Por último vamos a calcular S(0) pero, en esta ocasión, notemos una pequeña diferencia:

$$S(0) = \ker(f - 0i) = \ker(f)$$

Luego el subespacio asociado al autovalor 0 es siempre el núcleo del endomorfismo. Luego siempre que el núcleo este formado por más vectores que el vector nulo, este será un subespacio propio.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 + x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \gamma \\ x^2 = -\gamma \\ x^3 = 0 \end{cases} \quad \forall \gamma \in \Re$$

$$S(0) = L\left\{ \underbrace{(1, -1, 0)}_{\vec{u}_3} \right\}$$

Bien ahora tengamos en cuenta los vectores que conforman cada una de las bases de los subespacios propios:

$$S(2) = L\left\{ \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}_1} \right\} S(1) = L\left\{ \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{u}_2} \right\} S(0) = L\left\{ \underbrace{(1,-1,0)}_{\vec{u}_3} \right\}$$

Fijémonos en que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es un sistema libre ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1-1) = 2 \neq 0$$

Formado por más vectores que el vector nulo

Recordemos que esta es la condición que se impone para que una aplicación lineal no sea inyectiva. Luego debemos recordar que, si dim(ker(f))=0, el 0 no puede ser autovalor de dicho endomorfismo.

Base de vectores propios

Con las bases de cada uno de los subespacios característicos calculadas previamente, podemos formar una base:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1}_{S(2)}, \underbrace{\vec{u}_2}_{S(1)}, \underbrace{\vec{u}_3}_{S(0)} \right\}$$

Recordando que: $S(2) = L\left\{ \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}_1} \right\}$ $\quad S(1) = L\left\{ \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{u}_2} \right\}$

$S(0) = L\left\{ \underbrace{(1,-1,0)}_{\vec{u}_3} \right\}$

Cada uno de los vectores de esta base pertenece a un subespacio propio, por lo tanto podemos afirmar que B' es una **base de vectores propios**.

Vamos a considerar entonces como es la transformación de cada uno de estos vectores a través de la aplicación f. Recordemos que siempre que un vector sea un vector propio:

$$\forall \vec{x} \in S(\lambda) \quad f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

Además hay que notar que los vectores de B' expresados en su propia base son:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1,0,0)_{B'} \\ \vec{u}_2 = (0,1,0)_{B'} \\ \vec{u}_3 = (0,0,1)_{B'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \in S(2) & \rightarrow & f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 & \rightarrow & f(\vec{u}_1) = (2,0,0)_{B'} \\ \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow & f(\vec{u}_2) = 1\vec{u}_2 = \vec{u}_2 & \rightarrow & f(\vec{u}_2) = (0,1,0)_{B'} \\ \vec{u}_3 \in S(0) & \rightarrow & f(\vec{u}_3) = 0\vec{u}_3 = \vec{0} & \rightarrow & f(\vec{u}_3) = (0,0,0)_{B'} \end{cases}$$

Diagonalización por semejanza

Partiendo de lo último que hemos dicho:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \in S(2) & \rightarrow & f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 & \rightarrow & f(\vec{u}_1) = (2,0,0)_{B'} \\ \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow & f(\vec{u}_2) = 1\vec{u}_2 = \vec{u}_2 & \rightarrow & f(\vec{u}_2) = (0,1,0)_{B'} \\ \vec{u}_3 \in S(0) & \rightarrow & f(\vec{u}_3) = 0\vec{u}_3 = \vec{0} & \rightarrow & f(\vec{u}_3) = (0,0,0)_{B'} \end{cases}$$

Veamos cómo es la matriz del homomorfismo expresado en la base de vectores propios:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{f(\vec{u}_2)} & \underbrace{0}_{f(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

Vemos que efectivamente, la matriz del homomorfismo expresada en la base de vectores propios es una matriz diagonal con los autovalores en su diagonal principal. El cambio de base entre B y B' es el habitual entre espacios vectoriales:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \underbrace{0}_{\vec{u}_1} & \underbrace{1}_{\vec{u}_2} & \underbrace{0}_{\vec{u}_3} \end{pmatrix}$$

Por lo que el cambio de base entre F_B y $F_{B'}$ será $F_{B'}=C^{-1}F_BC$. C cambia de base entre una base normal a una base de vectores propios donde la matriz asociada a la transformación es diagonal.

A este cambio de base se le llama **diagonalización por semejanza** porque da como resultado una matriz diagonal.

Matriz diagonal con los autovalores en su diagonal principal

$$F_B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

¿Cuándo no se puede diagonalizar? I

Bueno, hemos visto que la matriz diagonal es el resultado de expresar el homomorfismo en su base de vectores propios, dando como resultado una matriz diagonal con los autovalores en la diagonal principal. Eso significa que para que exista una matriz diagonal (para que f sea diagonalizable), tiene que existir a su vez dicha base de vectores propios:

f diagonalizable ⇔ $\exists B'$ base de vectores propios

Pero esta definición esta incompleta porque cuál es la condición para que exista la base de vectores propios. Lo cierto es que la base de vectores propios está formada a su vez por las bases de cada uno de los subespacios característicos:

Podemos formar una base: $B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1}_{S(2)}, \underbrace{\vec{u}_2}_{S(1)}, \underbrace{\vec{u}_3}_{S(0)} \right\}$

Solo si tenemos: $S(2) = L\left\{ \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}_1} \right\}$ $S(1) = L\left\{ \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{u}_2} \right\}$ $S(0) = L\left\{ \underbrace{(1,-1,0)}_{\vec{u}_3} \right\}$

Luego necesitamos tantos vectores propios en las bases de cada espacio característico como dimensión tenga el espacio. Esto siempre es así si las dimensiones de los subespacios suman la dimensión del espacio.

¿Cuándo no se puede diagonalizar? II

¿Pero cuándo no suman la dimensión del espacio?

Recordemos que se tiene que cumplir que $1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq OM(\lambda)$. Atendiendo a esta regla, si tuviésemos solo dos autovalores distintos, uno de orden de multiplicidad 1 y otro de orden de multiplicidad 2, por lo que hemos visto antes el primero tendría un subespacio de dimensión 1 forzosamente:

$$OM(\lambda) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq \underbrace{OM(\lambda)}_{OM(\lambda)=1} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{dir}$$

Pero el otro podría presentar dimensión 2, pero también dimensión 1:

$$OM(\lambda) = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq \underbrace{OM(\lambda)}_{OM(\lambda)=2} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \dim(S(\lambda)) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \text{di}$$

Si la dimensión fuese 2, su base tendría dos vectores y no habría problema, pero si su dimensión fuese 1, entonces solo tendríamos un vector en la base de cada subespacio, y no podríamos formar una base del espacio (que requiere 3). Con lo que no habría base de vectores propios y por tanto f no sería diagonalizable.

La condición última para la diagonalización, es por tanto:

$$f\ \textit{diagonalizable} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B'\ \textit{base de vectores propios} \quad \Leftrightarrow \quad OM(\lambda) = \dim(S(\lambda)) \quad \forall\lambda$$

Ejemplo de homomorfismo no diagonalizable

Ya sabemos que la diagonalización no siempre es posible, pero estudiemos un ejemplo concreto y veamos qué se puede hacer cuando se llega a tal final.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente matriz 3x3: $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculemos sus autovalores mediante la ecuación característica: $|F_B - \lambda I| = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8$

Los autovalores que obtenemos son: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 & \rightarrow \quad OM(2) = 1 \\ \lambda_2 = -2 & \rightarrow \quad OM(-2) = 2 \end{cases}$

El subespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ es $S(2) = \mathrm{Ker}(F_B - 2I)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}}_{F_B - 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x^1 + 3x^2 + x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = \alpha \\ x^3 = -\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Re$$

1/2

Quedando el subespacio característico: $S(2) = L\{(1,1,-1)\}$

$$\dim(S(2)) = 1 = OM(2)$$

Le ponemos nombre a la base de S(2): $\bar{u}_1 = (1,1,-1)$

El subespacio asociado a $\lambda_2 = -2$ es $S(-2) = \mathrm{Ker}(F_B + 2I)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B + 2I} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -\beta \\ x^2 = \beta \\ x^3 = -\beta \end{cases} \quad \forall \beta \in \Re$$

Quedando el subespacio característico: $S(-2) = L\{(-1,1,-1)\}$

$$\dim(S(-2)) = 1 \neq OM(-2) = 2$$

Luego la matriz F_B no es diagonalizable.

2/2

La forma canónica de Jordan I

Cuando nos topemos con un homomorfismo cuyas características lo hagan no diagonalizable, podemos calcular su forma canónica de Jordan. Comenzaremos intentando diagonalizar, por semejanza, una matriz F_B que no es diagonalizable. A partir de ella intentaremos obtener una matriz J semejante a F_B lo más parecida posible a una matriz diagonal.

Siguiendo con el ejemplo anterior, hagamos ahora algo un tanto distinto. Calculemos el subespacio asociado a -2 de orden 2: $S_2(-2) = \mathrm{Ker}(F_B + 2I)^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2}_{(F_B+2I)^2} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{x^1 + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^1 = \delta \\ x^2 = -\delta \\ x^3 = \gamma \end{cases} \quad \forall \delta, \gamma \in$$

Fijémonos que $S(-2) = \mathrm{Ker}(F_B + 2I) \subset S_2(-2) = \mathrm{Ker}(F_B + 2I)^2$ y ahora $\dim(S_2(-2)) = 2 = OM(-2)$.

Escojamos una base de este segundo subespacio, $S_2(-2)$, que contenga un vector del primero, $S(-2)$.

Tomamos un vector cualquiera $\bar{u}_3 \in S_2(-2) - S(-2)$, por ejemplo $\bar{u}_3 = (0,0,1)$.

Ahora calcularemos $\bar{u}_2$ como $\bar{u}_2 = (F_B + 2I)\bar{u}_3$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{F_B+2I}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = (1, -1, 1)$$

De esta manera, $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ es una base de $S_2(-2)$, y además $\bar{u}_2 \in S(-2)$.

La forma canónica de Jordan II

Podemos ahora establecer una base B' de la forma $B' = \left\{ \underbrace{\bar{u}_1}_{\in S(2)}, \underbrace{\bar{u}_2}_{\in S(-2)}, \underbrace{\bar{u}_3}_{\in S_2(-2)} \right\}$

Calculemos ahora expresión de la matriz asociada a f en B', $F_{B'}$:

$$f(\bar{u}_1) = 2 \cdot \bar{u}_1, \qquad f(\bar{u}_2) = -2 \cdot \bar{u}_2, \qquad f(\bar{u}_3) = \bar{u}_2 - 2 \cdot \bar{u}_3$$

Luego la matriz asociada a f en la base B' es:

$$F_{B'} = J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A la matriz J la llamamos forma canónica de Jordan de F_B y a la matriz

La matriz de cambio de base, C, entre B y B' estará formada por los vectores de B' escritos por columnas expresados en B:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo el cambio de base entre F_B y J: $\mathbf{J=C^{-1}F_BC}$

Resumen

Base de vectores propios

Es una base formada con las bases de cada uno de los subespacios característicos:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1}_{S(\lambda_1)}, \underbrace{\vec{u}_2}_{S(\lambda_2)}, \underbrace{\vec{u}_3}_{S(\lambda_3)} \right\}$$

Matriz en base de vectores propios

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \underbrace{0}_{f(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{f(\vec{u}_2)} & \underbrace{\lambda_3}_{f(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

El cambio de base entre B y B' es el habitual entre espacios vectoriales: $\boldsymbol{F_B = C^{-1} F_B C}$, donde C cambia de base entre una base normal a una base de vectores propios donde la matriz asociada a la transformación es diagonal.

A este cambio de base se le llama **diagonalización por semejanza** porque da como resultado una matriz diagonal.

$$f \text{ diagonalizable} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B' \text{ base de vectores propios} \quad \Leftrightarrow \quad OM(\lambda) = \dim(S(\lambda))$$