Hoja 2

(1) $f:\{1,2,\dots,m\}\to\{1,2,\dots,n\}$

Número de aplicaciones: n^m

Inyectivas: $m\leq n$ $\qquad \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Exhaustivas: $m\geq n$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m}{k}(n-k)^m$

(2) $|X\times X|=n^2$

Número de funciones $f: X\to X\times X$ $\quad n^{2n}$

(5) Si $A=\{\text{múltiplos de } 2\}$, $B=\{\text{múltiplos de } 5\}$

(a)

No coprimos $=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=500+200-100=600$

Coprimos $=1000-600=\underline{400}$

(b)

No coprimos, Sean $A=\{\text{múltiplos de } 2\}$, $B=\{\text{múltiplos de } 3\}$
$C=\{\text{múltiplos de } 5\}$

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$

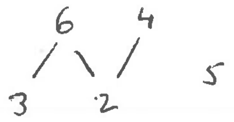
$=180+120+72-60-24-36+12=264$

Coprimos $=360-264=\underline{96}$

(9) (a) 1 es el mínimo. No hay máximo.

(b) Tienen mínimo los subconjuntos A que contengan el máximo común divisor de todos sus elementos. Tienen máximo los que contengan el mínimo común múltiplo de sus elementos.

(c) Veamos un ejemplo, sea $A=\{2,3,4,5,6\}$



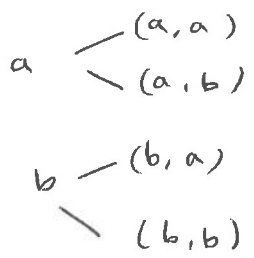
k es maximal si es el mcm de elementos de A y no tiene más arriba, p. ej. 6, 4, 5
k es minimal lo mismo con el mcd, por ej. 3, 2, 5

(d) los minimales de $\mathbb{Z}^+\setminus\{1\}$ son los números primos.

(e) Ir mirando sus elementos y luego tachando sus múltiplos.

Hoja 2

(11) Si $X = \{a, b\}$ tiene dos elementos



Son relacions de orden

$\{(a,a), (a,b), (b,b)\}$ ← isomorfos

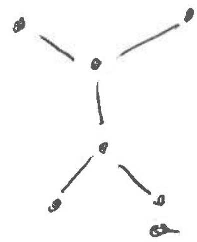
$\{(a,a), (b,a), (b,b)\}$ ←

$\{(a,a), (b,b)\}$

diagrama de los elementos de $X \times X$

Caso de 3 y de 4 elementos se seguiría la misma idea.

(12) En el ejemplo



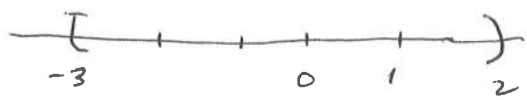
a es minimal, pero no el mínimo

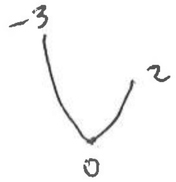
(14) En el orden lexicográfico, un subconjunto infinito no tiene por qué tener mínimo.

Por ejemplo $b \geq ab \geq aab \geq aaab \geq \dots$

(15) (a) El orden no es total ya que por ej. -2 y 2 no están relacionados.

(b) En $A = [-3, 2)$





A no tiene supremo ni máximo

$\inf(A) = 0$, $\min(A) = 0$

(19) $f(A) = \{ \frac{n-1}{2} : n \in A$ y n impar $\}$ es el conjunto de las mitades de los impares de A

f ~~es inyectiva y~~ exhaustiva. No inyectiva, por ej. para $A = \{2, 3, 1\}$, $B = \{3, 1\}$

$f(A) = f(B) = \{1, 0\}$.

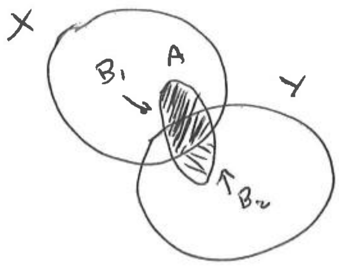
$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : f(A) = \emptyset\} = \{$números pares$\}$

Hoja 2

(10) (a) Sea $A \subset X \cup Y$, debemos probar que A tiene un mínimo (un primer elemento).

Si A está completamente contenido en X ó en Y, entonces A tendrá un primer elemento por estar X e Y bien ordenados.

Si no es el caso, dado $A \subset X \cup Y$, hacemos $A = B_1 \cup B_2$



donde $B_1 \subset X$, $B_2 \subset Y$ como en la figura. Ahora B_1 tendrá un primer elemento b_1, mientras que B_2 un primer elemento b_2, el más pequeño de ellos será el mínimo de A.

(b) Sea $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ son sucesiones crecientes. Dado $A \subset X$ sean

$$n_0 = \min\{n : \exists k \text{ tal } a_n + b_k \in A\}$$

$$m_0 = \min\{m : \exists k \text{ tal } a_k + b_m \in A\}$$

Entonces, si $a_{n_0} + b_{k_1}$, $a_{k_2} + b_{m_0}$ están en A y t es el más pequeño de estos dos valores

$$a_n + b_m \in A \Rightarrow (n \le k_2 \text{ y } m \le k_1) \text{ ó } a_n + b_m \geq t$$

pero como mucho sólo hay un número finito de n, m que satisfacen luego A tiene un mínimo.

(19) $f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$

$A \mapsto f(A) = \{\frac{n-1}{2} : n \in A \text{ y } n \text{ impar}\} = \{$ las mitades de los impares de A

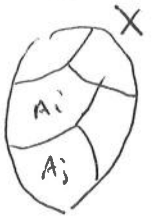
No es inyectiva ya que $f(A)$ no utiliza si A tiene pares o no.

Si es exhaustiva ya que dado $B \in P(\mathbb{N})$, si $m \in B$, los n tal que $\frac{n-1}{2} = m$ formarán un A tal que $f(A) = B$.

$f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{A \subset \mathbb{N} : f(A) = \emptyset\}$ que son los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que sólo contienen pares.

Hoja 3

(1) Dada la partición $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ la relación



$$x R y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo } A_i$$

es de equivalencia ya que se comprueba fácilmente que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Recíprocamente, si R es una relación de equivalencia en un conjunto X, la clase de equivalencia que contiene un elemento $x \in X$ es

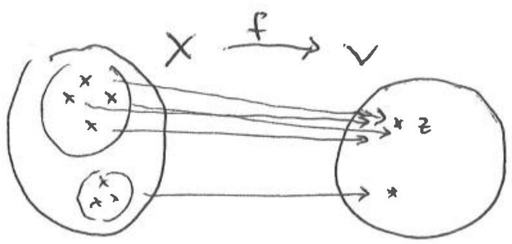
$$[x] = \{ y \in X : x R y \}$$

Las clases de equivalencia $\{A_i\}$ forman una partición, ya que todo elemento $x \in X$ está en algún A_i, por tanto $X = \bigcup A_i$ y además

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j$$

puesto que si $A_i = [x_i]$, $A_j = [x_j]$, si $y \in A_i \cap A_j$ entonces $y R x_i$, $y R x_j$ con lo que tendríamos $x_i R x_j$, esto es, que $[x_i] = [x_j]$.

(2) $x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ claramente es una relación de equivalencia pues es reflexiva, simétrica y transitiva



Si $y \in X$ es tal que $z = f(y)$, entonces $[y] = \{ x \in X : f(x) = f(y) = z \}$ pero este conjunto es $[y] = f^{-1}(\{z\})$. La aplicación

$$F : X/R \longrightarrow \operatorname{Im} f \quad \text{tal que} \quad F([y]) = f(y) = z$$

está bien definida, esto es, si $y_1 R y_2$ entonces $F([y_1]) = F([y_2])$, es inyectiva y exhaustiva. Luego F es biyectiva.

Hoja 3

(4) i) $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ dada por $f(\overline{m}) = m$ no está bien definida ya que si $m_1, m_2 \in \overline{m}$ con $m_1 \neq m_2$ entonces $\$$ es $\overline{m_1} = \overline{m_2}$ y f no tendría imagen única.

iii) Para que $G: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ tal que $G((\overline{m}, \overline{k})) = \overline{m+k}$ esté bien definida debemos comprobar que

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } m_1, m_2 \in \overline{m} \\ k_1, k_2 \in \overline{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{m_1 + k_1} = \overline{m_2 + k_2}$$

Por hipótesis $m_1 - m_2 = p_1 n$

$k_1 - k_2 = p_2 n$

sumando $m_1 + k_1 - (m_2 + k_2) = (p_1 + p_2)n$ luego si se cumple

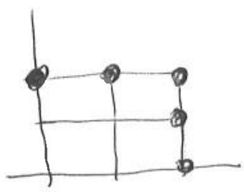
(5) Las clases de equivalencia son las hipérbolas $xy = k$ para $k \in \mathbb{R}$.

(6) En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(n,m) R (n',m') \Leftrightarrow \max\{n,m\} = \max\{n',m'\}$ es una relación de equivalencia.

La clase de equivalencia que contiene $(2,2)$ es

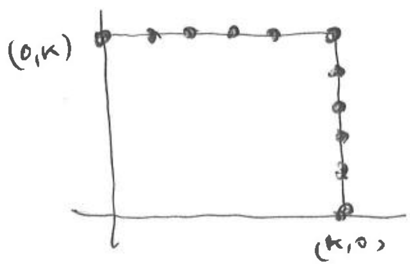
$[(2,2)] = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \max\{n,m\} = \max\{2,2\} = 2\} =$

$= \{(0,2), (1,2), (2,2), (2,0), (2,1)\}$



En general la clase de equivalencia que contiene (k,k) es

$C_k = \{(n,m) : \max\{n,m\} = k\}$



Hoja 3

(8) Un ejemplo de relación binaria reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica sería por ejemplo:

Dado $X = \{a, b, c\}$

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$$

los demás apartados van solviendo a partir de las definiciones.

(9) $m R_1 n \Leftrightarrow 5 \mid m + 2n$

No es de equivalencia, ya que no es reflexiva

$m R_2 n \Leftrightarrow 4 \mid (9m + 3n)$

Sí que es de equivalencia al ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Para las clases de equivalencia, en general

$$[j] = \{m \in \mathbb{Z} : m R_2 j\} = \{m : 4 \mid 9m + 3j\} = \{m : 9m + 3j = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Dado j debemos resolver la llamada ecuación diofántica

$$9m - 4k = -3j$$

que (se verá en su momento) tiene por soluciones

$$m = -3j + 4n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

Estos son los elementos del conjunto $[j]$. Aparecen por tanto las cuatro clases de equivalencia distintas

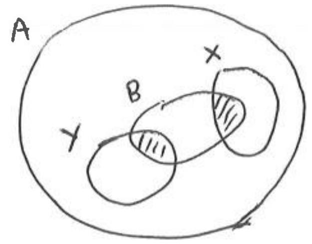
$[0] = \{\dots, -4, 0, 4, 8, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

$[2] = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$

$[3] = \{\dots, -13, -9, -5, -1, 3, 7, \dots\}$

(10)



Es de equivalencia. Si $|B| = n$ hay $n+1$ clases de equivalencia de $0, 1, 2, \ldots, n$ elementos

$$\left| \mathcal{P}(A)/_R \right| = n+1$$

(14) Demostremos primero el

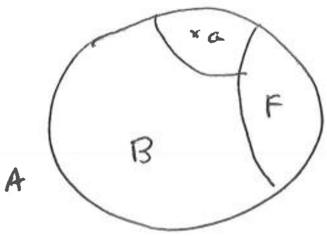
Lema Si A es infinito se puede extraer un subconjunto F numerable.

Dem En efecto, sea $x_0 \in A$, de $A \setminus \{x_0\}$ extraemos un elemento que llamamos x_1 (por ejemplo el primer elemento si $A \setminus \{x_0\}$ está bien ordenado). Sea ahora $A \setminus \{x_0, x_1\}$ del que extraemos un elemento x_2, consideramos ahora $A \setminus \{x_0, x_1, x_2\}$ y vamos repitiendo el proceso. Encontramos de este modo el conjunto numerable

$$E = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset A$$

Obsérvese que en la demostración hemos utilizado el axioma de elección o su equivalente el principio de buena ordenación.

Hacemos ahora
$$A = E \cup \{a\} \cup \underbrace{(A \setminus (E \cup \{a\}))}_{= B}$$



$E \cup \{a\}$ es equipotente con E (ya que simplemente con la lista de elementos de E hacemos una lista de $E \cup \{a\}$)

Conseguiremos una biyección de $A \setminus \{a\}$ en $A = E \cup \{a\} \cup B$ tomando la biyección $E \cup \{a\} \leftrightarrow E$ junto con $B \leftrightarrow B$

Hoja 3

(15) a) $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ Por el teorema de Cantor - Schröder - Bernstein donde una de las inyecciones puede ser

$$F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m,n) \longmapsto 2^m 3^n$$

(o cualquier otra que funcione).

b) $|\mathbb{N}\times\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

Otra vez con el teorema CSB, donde si $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ una de las inyecciones es

$$F : \mathbb{N}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m, r_n) \longmapsto 2^m \times 3^n$$

c) $|\mathbb{R}\times\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$

Puede usarse que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$ y utilizar luego que $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$, lo cuál puede probarse ya que $\mathbb{R}$ es equipotente con $(0,1)$, luego $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ será equipotente con $(0,1)\times(0,1)$, pero ahora $(0,1)\times(0,1)$ es equipotente con $(0,1)$ pues podemos definir una biyección

$$f : (0,1)\times(0,1) \longrightarrow (0,1)$$

dada por, si

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$
$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$
$$f(x,y) = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

f) Sea $A = \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, entonces $|A| = |\mathbb{R}|$, pues al ser $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$

Si A fuera numerable, entonces lo sería $A\cup\mathbb{N}$ y no lo es.