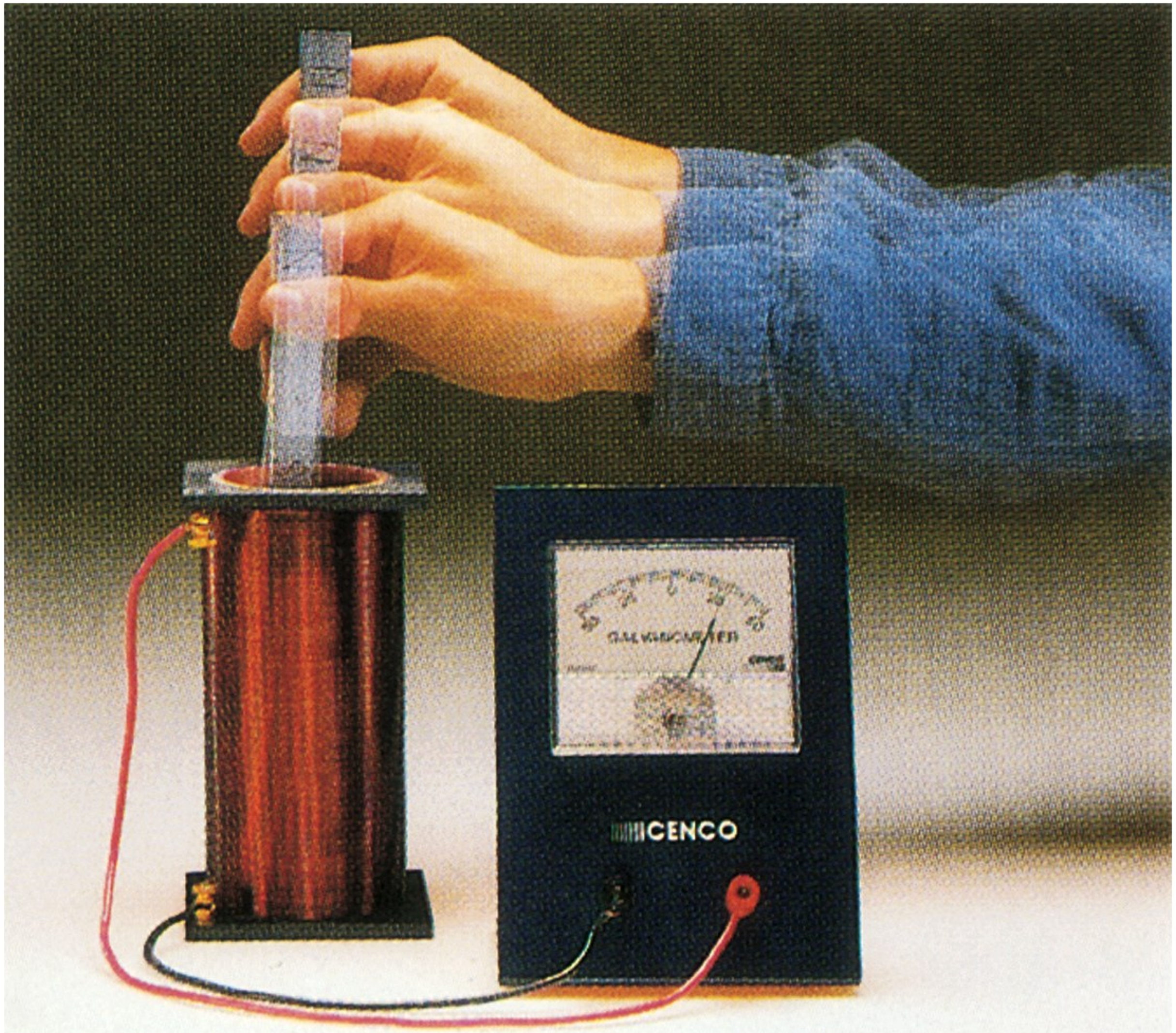
Prof. Maurizio Mattesini

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Capítulo 28

Inducción magnética



A veces, **al extraer la clavija del enchufe** de un circuito eléctrico observamos la producción de una **pequeña chispa**. Antes de la desconexión, el cordón eléctrico transporta una corriente, que como sabemos genera un campo magnético alrededor de la corriente. Al desconectar, la corriente cesa bruscamente y el campo magnético que le rodea se colapsa. El campo magnético variable produce una fem que tiende a mantener la corriente original generando así un chispa a través del enchufe. Una vez que el campo magnético se ha anulado y, por lo tanto, deja de ser variable, la fem inducida es cero.

Demostración de una **fem inducida**. Cuando un imán se aleja de la bobina se induce en ésta una fem, como indica la desviación del galvanómetro. No se observa ninguna desviación con el imán en reposo.

¿Qué origina la corriente cuando se mueve el imán?

En 1830 **Michael Faraday** (UK) y **Joseph Henry** (USA) descubrieron independientemente que la variación temporal del flujo magnético debida a un campo magnético variable que atraviesa la superficie de un espira conductora, induce en ésta una corriente. Las fems y las corrientes causadas por los flujos magnéticos variables se denominan **fems inducidas** y **corrientes inducidas**.

Una fem producida cuando un conductor (espira en movimiento) se mueve en una región en la que existe un campo magnético se denomina **fem de movimiento**. Una bobina que gira en un campo magnético es un elemento básico de un generador que convierte energía mecánica en energía eléctrica.

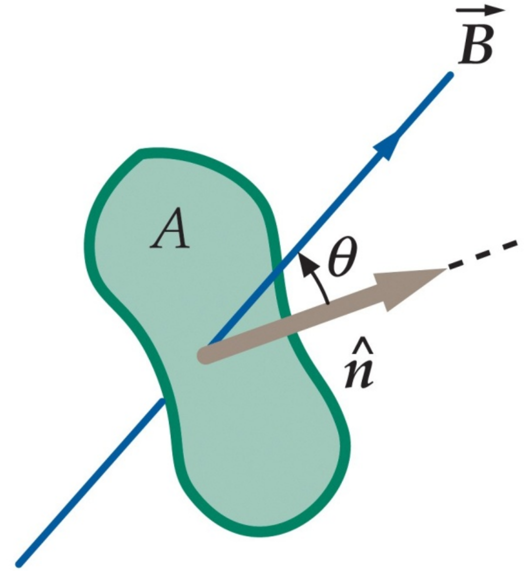
28-1
Flujo magnético

Flujo magnético

El flujo de un campo magnético a través de una superficie se calcula de modo análogo al flujo de un campo eléctrico (sección 22.2). Sea *dA* un elemento de área sobre la superficie y **n** el vector unitario perpendicular al elemento. Hay dos direcciones normales y podemos elegir de forma arbitraria cuál de ellas consideramos que debe ser la dirección del vector unitario **n**. Sin embargo, el signo del flujo no depende de dicha dirección. El flujo magnético se define por la expresión

$$\boxed{\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_S B_n\, dA}$$

FLUJO MAGNÉTICO



La unidad del flujo magnético es la del campo magnético multiplicada por la unidad del área, el *tesla-metro cuadrado*, y se denomina **weber** (Wb):

$$1\ Wb = 1\ T \cdot m^2$$

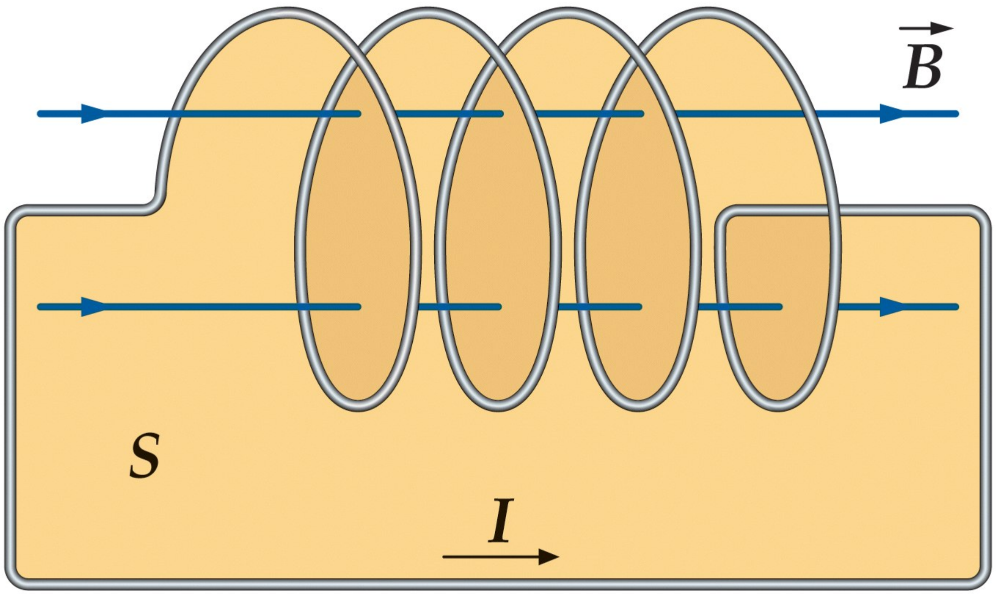
Como el campo **B** es $\propto$ al número de líneas del campo magnético por unidad de área, <u>el flujo mgnético es $\propto$ al número de líneas que atraviesan el área</u>.

Si el campo **B** forma un ángulo θ con la normal al área de un bucle, el flujo a través el mismo es ϕ_m=**B·n** $A=BA\cos\theta = B_nA$.

Con frecuencias trataremos el **flujo a través de una superficie rodeada por una bobina** que contine varias vueltas de alambre

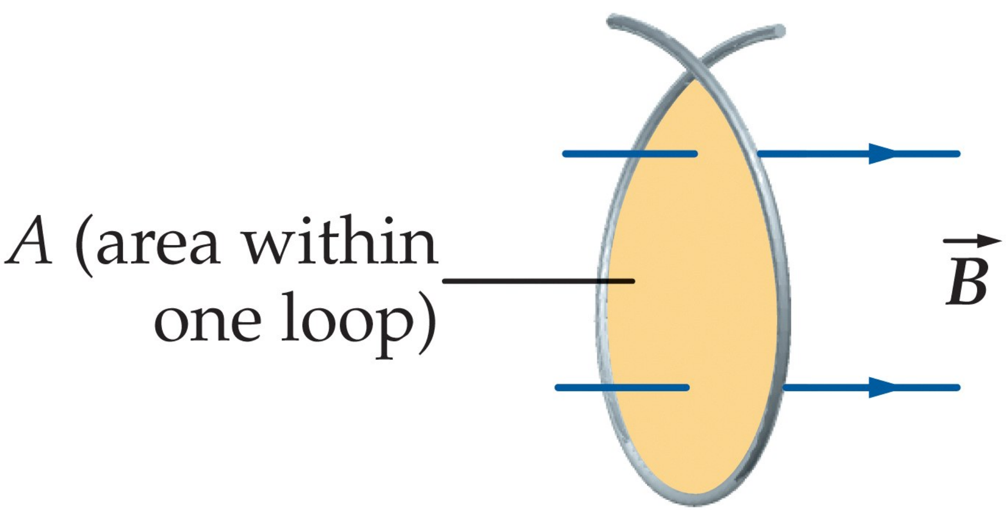
$$\phi_m = NBA\ \cos\ \theta$$

en donde *A* es el área de la superficie plana encerrada por una sola vuelta.



El flujo a través de la superficie *S* encerrada por la bobina con *N* vueltas es proporcional a las líneas de campo que penetran en la superficie:

La bobina de la figura contiene <u>4 vueltas</u>. Las dos líneas de campo dibujadas penetran la superficie <u>4 veces</u>, una vez por cada vuelta, de tal forma que el flujo a través de la superficie *S* es cuatro veces mayor que la que penetra por cada vuelta de la bobina.



El área *A* de la superficie plana es (casi) la encerrada por una vuelta de la bobina.

Flujo a través de un solenoide

EJEMPLO 28.1
Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de 40 cm de longitud, 2.5 cm de radio y 600 vueltas, cuando transporta una corriente de 7.5 A.

Planteamiento del problema: El campo **B** dentro del solenoide es constante y paralelo al eje del solenoide. Por lo tanto, es perpendicular al plano de las espiras. Necesitamos determinar *B* dentro del solenoide y luego multiplicar *B* por *NA*.

1. El flujo magnético es el producto del número de vueltas, el campo magnético y el área de las espiras:

$$\phi_m = NBA\cos\theta = NBA\cos 0 = NBA$$

2. El campo magnético dentro del solenoide viene dado por $B = \mu_o nI$, en donde $n = N/\ell$ es le número de vueltas por unidad de longitud:

$$\phi_m = N\mu_o nIA = N\mu_o\left(\frac{N}{\ell}\right)IA = \frac{\mu_o N^2 IA}{\ell}$$

3. Expresar el área de las espiras en función de su radio:

$$A = \pi r^2$$

4. Sustituir los valores determinados para calcular el flujo:

$$\phi_m = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\ T\cdot m/A\right)\left(600\ vueltas\right)^2\left(7.5\ A\right)\pi\left(0.025\ m\right)^2}{0.40\ m} = \boxed{1.66\times10^{-2}\ \text{Wb}}$$

back

28-2
Fem inducida y ley de Faraday

Ley de Faraday

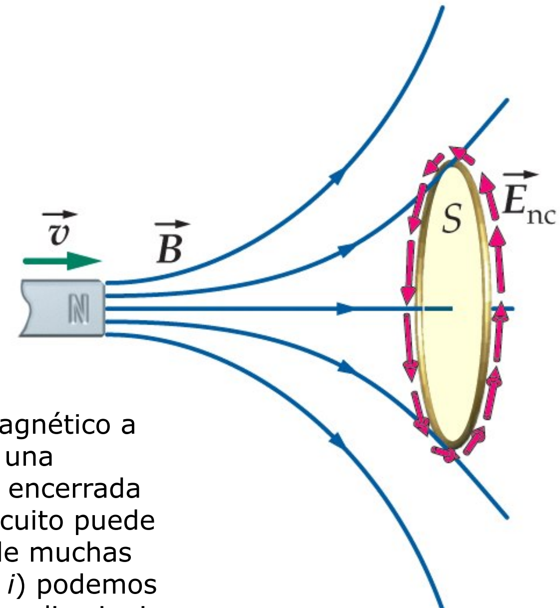
Los experimentos de **Faraday** y **Henry** demostraron que si el flujo magnético a través de un área rodeada por un circuito varía por cualquier medio, se induce una fem[1] que es igual en módulo a la variación por unidad de tiempo del flujo que atraviesa el circuito. Es decir:

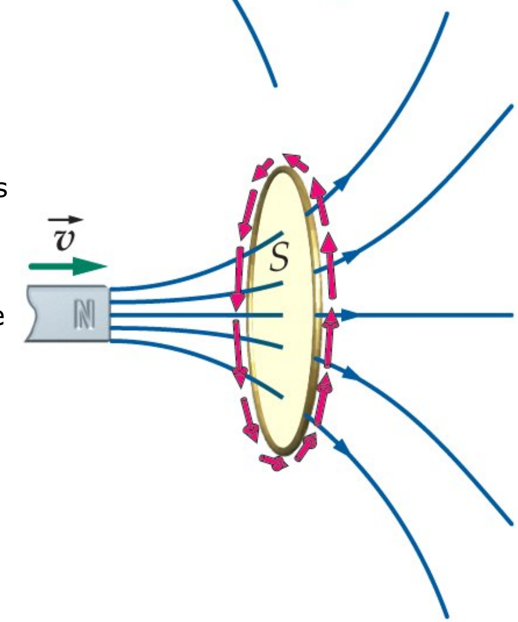
$$\boxed{\xi = -\frac{d\phi_m}{dt}} \qquad \text{LEY DE FARADAY}$$

Este resultado es conocido como la **ley de Faraday**. El signo negativo en esta ley concierne al sentido de la fem inducida que analizaremos en las próximas secciones.

Consideramos una sola espira de un conductor fija en un campo magnético, como se indica en la figura. Cuando el flujo magnético que atraviesa la espira de alambre es variable, se induce en la misma una fem. La fem se distribuye a través de toda la espira y equivale a un campo eléctrico no conservativo $\mathbf{E}_{nc}$ tangente al alambre.

Como esta fem es el trabajo realizado por unidad de carga, deben existir fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles que realicen trabajo sobre ellas. Las **fuerzas magnéticas** no pueden realizar trabajo y por lo tanto no podemos atribuir la fem al trabajo por dichas fuerzas. Son las **fuerzas eléctricas** asociadas con un campo eléctrico no conservativo $\mathbf{E}_{nc}$ las que realizan trabajo sobre las cargas móviles.





El flujo magnético a través de una superficie encerrada por un circuito puede variarse de muchas maneras: *i*) podemos aumentar o disminuir la corriente que produce el campo *ii*) se pueden mover unos imanes permanentes alejándolos o acercándolos a la superficie *iii*) se puede hacer girar el propio circuito en un campo magnético fijo *iv*) se puede aumentar o disminuir el área del circuito en el interior de un campo magnético.

[1]La fem se detecta usualmente observando una corriente en el circuito, pero aparece incluso aunque el circuito sea incompleto (abierto), de modo que no existe corriente.

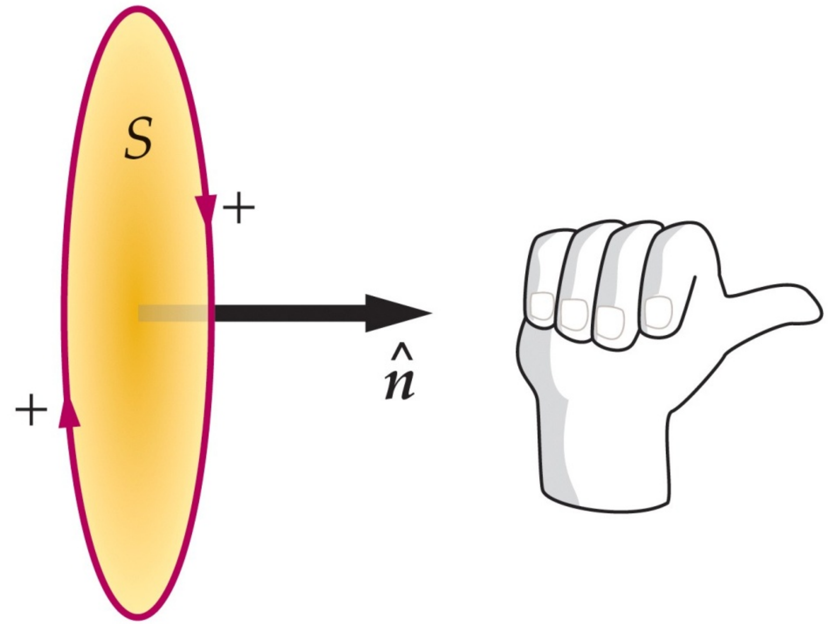
La integral de línea de este campo eléctrico alrededor de un circuito completo es igual al <u>trabajo realizado por unidad de carga</u>, el cual es la fem del circuito.

Los campos eléctricos que hemos estudiado previamente eran el resultado de **cargas eléctricas estáticas**. Estos campos son **conservativos**, lo cual significa que su circulación alrededor de una curva cerrada *C* es cero.

Sin embargo, el campo eléctrico resultante de un flujo magnético variable **no es conservativo**. La circulación alrededor de *C* es una fem inducida igual a la variación con el tiempo del flujo magnético a través de cualquier superficie *S* encerrada por *C* cambiada de signo:

$$\boxed{\xi = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = -\frac{d\phi_m}{dt}}$$

FEM INDUCIDA EN UN CIRCUITO ESTACIONARIO EN UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE



Colocando el pulgar de la mano derecha en la dirección y el sentido del vector unitario **n** de la superficie *S*, los dedos de la mano derecha se curvan indicando la dirección tangencial positiva en *C*.

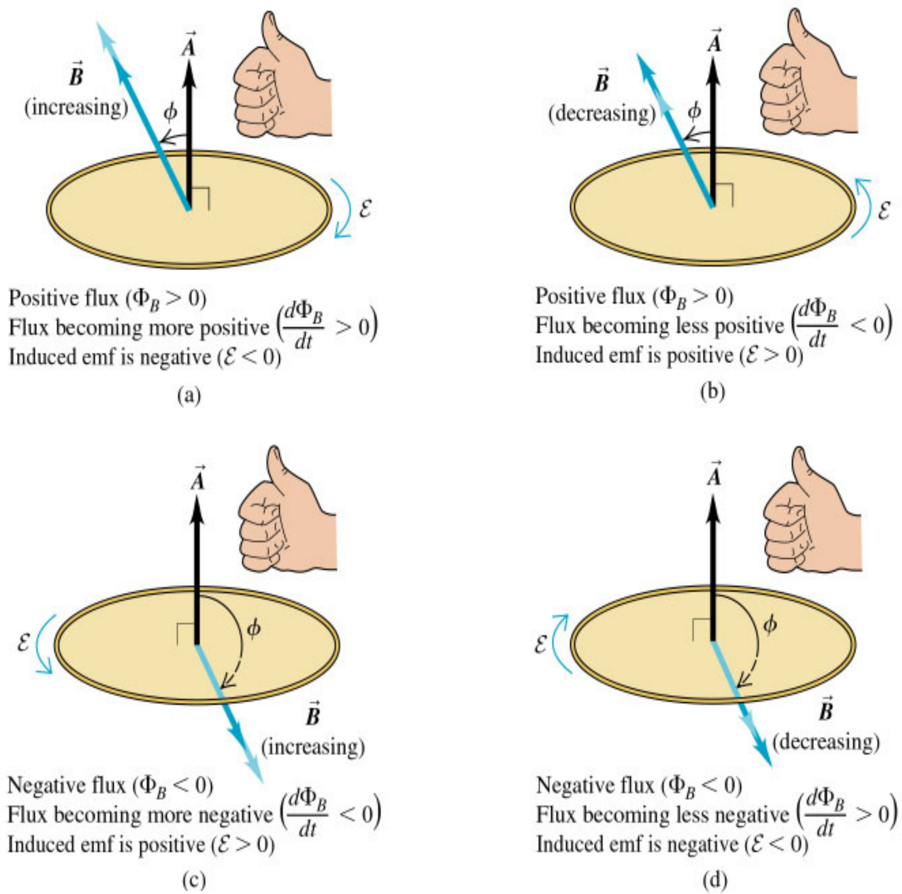
Una **convención de signos** nos permite utilizar la ecuación anterior para determinar el sentido del campo **E** y la fem inducida. Según esta convención, la dirección tangencial positiva a lo largo de la curva *C* se relaciona con la dirección y el sentido del vector unitario **n** mediante **la regla de la mano derecha**. **Si $d\phi_m/dt$ es positivo, de acuerdo con la ley de Faraday, tanto E_{nc} como ξ tienen dirección tangencial negativa.**

$$\boxed{I = \frac{\xi}{R}}$$

CORRIENTE INDUCIDA

El sentido de $\mathbf{E}_{nc}$ y ξ quedan determinados por la **ley de Lenz** que se estudia en la siguente sección.

Dirección de la fem inducida



$$\boxed{\xi = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = -\frac{d\phi_m}{dt}}$$

Podemos encontrar la dirección de la fem o de la corriente inducidas utilizando algunas sencillas reglas de signos:

1. Definir una dirección positiva para el área vectorial **A**.

2. A partir de las direcciones de **A** y de **B**, determinar el signo del flujo magnético ϕ_m y de su razón de cambio $d\phi_m/dt$.

3. Determinar el signo de la fem o de la corriente inducidas. Si el flujo está aumentando, de modo que $d\phi_m/dt$ es positiva, entonces la fem o la corriente inducidas son negativas; si el flujo está disminuyendo, $d\phi_m/dt$ es negativa y la fem o la corriente inducidas son positivas.

4. Finalmente, determinar la dirección de la fem o de la corriente inducidas utilizando la mano derecha. Doblar los dedos alrededor del vector **A** con el pulgar en la dirección de **A**. Si la fem o la corriente inducidas en el circuito son *positivas*, su dirección será la misma que la de los doblados; si la fem o la corriente son *negativas*, la dirección será la opuesta.

Fem inducida en un bobina circular I

EJEMPLO 28.2

Un campo magnético uniforme forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 vueltas y un radio de 4 cm. El campo varía a razón de 85 T/s, permaneciendo fija su dirección. Determinar, el módulo de la fem inducida en la bobina.

Planteamiento del problema: La fem inducidas es igual a *N* veces la variación del flujo a través de cada vuelta por unidad de tiempo. Como **B** es uniforme, el flujo a través de cada vuelta es simplemente $\phi_m = BA \cos \theta$, en donde $A = \pi r^2$ es el área de una espira.

1. El módulo de la fem viene dada por la ley de Faraday:

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

2. Para un campo uniforme, el flujo es:

$$\phi_m = N\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} A = NBA \cos\theta$$

3. Sustituir ϕ_m por esta expresión y calcular ξ:

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(NBA\cos\theta\right) = -N\pi r^2 \cos\theta \frac{dB}{dt}$$

$$\xi = -(300)\pi(0.04\ m)^2 \cos 30^\circ (85\ T/s) = -111\ V \quad \Rightarrow \boxed{|\xi| = 111\ V}$$

28-3
Ley de Lenz

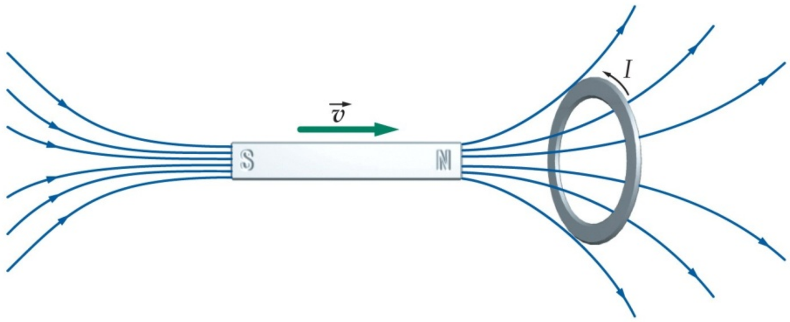
Ley de Lenz

El signo negativo de la ley de Faraday está relacionado con la dirección de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducida pueden determinarse mediante un principio general físico llamado **ley de Lenz**:

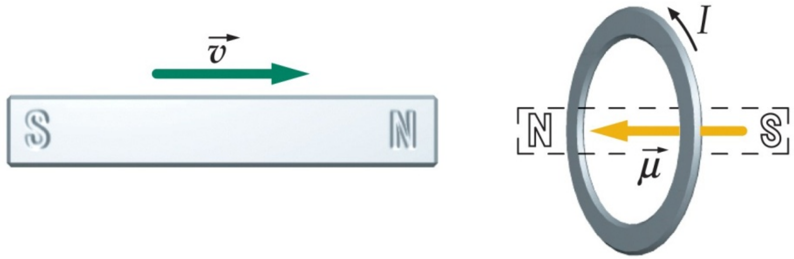
> La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.

LEY DE LENZ

Este enunciado no especifica el tipo de variación que causa la fem y la corriente inducidas, lo cual intencionadamente queda sin concretar para cubrir una diversidad de condiciones. Algunos ejemplos aclararán este punto:



El movimiento del imán hacia la derecha induce una fem y una corriente en la espira. La ley de Lenz establece que esta fem y la correspondiente corriente inducida deberá tener una dirección tal que se oponga al movimiento del imán. Es decir, la corriente inducida en la espira produce un campo magnético el cual ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda cuando el imán se aproxima por la derecha.

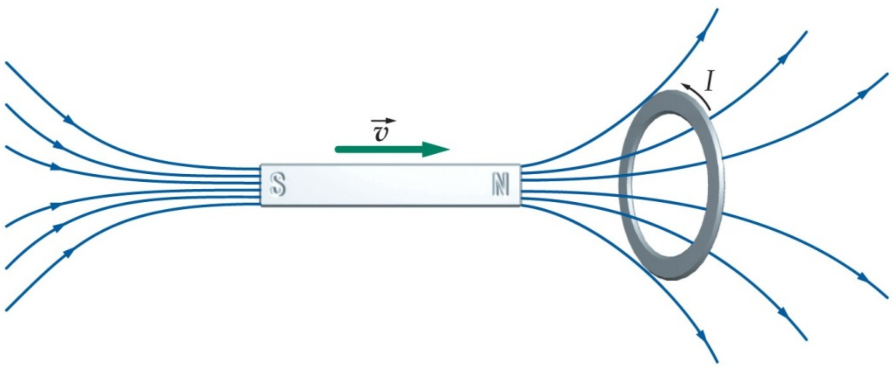


El momento magnético de la espira **μ** (se representa e la figura como si fuera un imán) debido a la corriente inducida es tal que se opone al movimiento de la barrita de imán real. Este imán se mueve hacia la espira y por lo tanto el momento magnético inducido repele la barrita imanada.

Formulación alternativa de Ley de Lenz

Supongamos que la corriente en al espira de la figura fuera opuesta a la dirección mostrada. Entonces habría una fuerza magnética cuando el imán se aproximase hacia la derecha que causaría una aceleración.

Si esto fuera así, aplicando una pequeña fuerza a un imán en dirección a una espira conductora, aquél se movería hacia ésta con velocidad creciente sin ninguna aportación energética por nuestra parte, lo cual **violaría el principio de conservación de la energía**. Sin embargo, la realidad es que la energía se conserva y la ley de Lenz es consistente con esta realidad.



Se puede enunciar la ley de Lenz de forma alternativa en términos del flujo magnético de la siguiente forma:

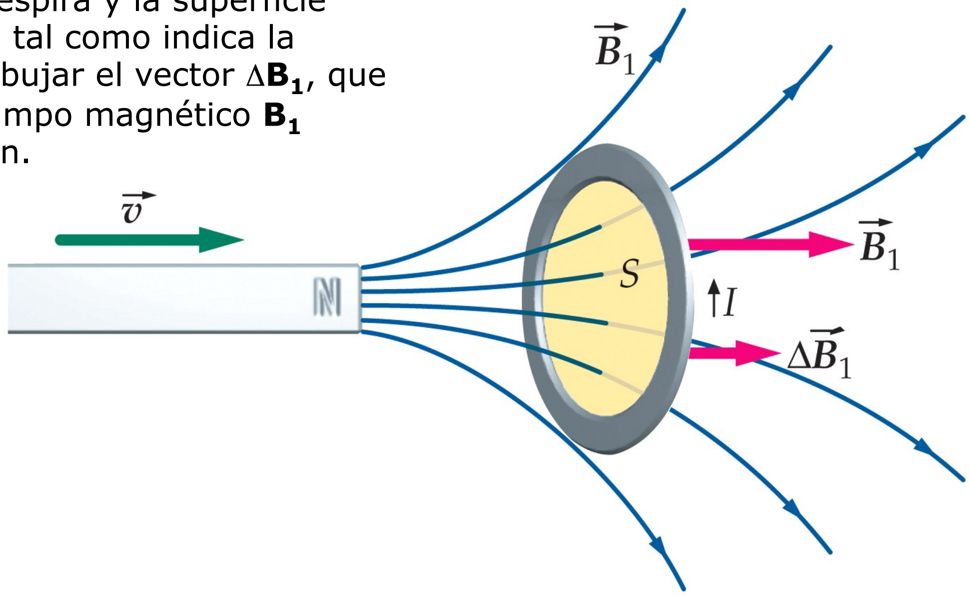
Cuando se produce una variación del flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera una flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación.

Ley de Lenz y corriente inducida

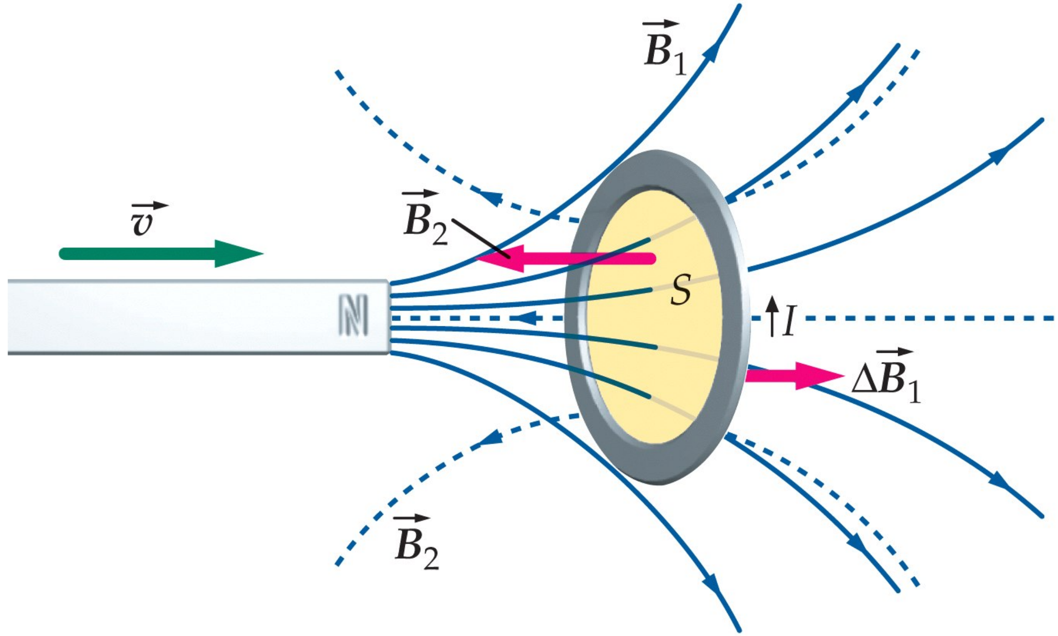
EJEMPLO 28.5
Usando la forma alternativa de la ley de Lenz, determinar el sentido de la corriente inducida en la espira mostrada en la figura.

Planteamiento del problema: Utilizar la regla de la mano derecha para determinar el sentido de esta corriente inducida.

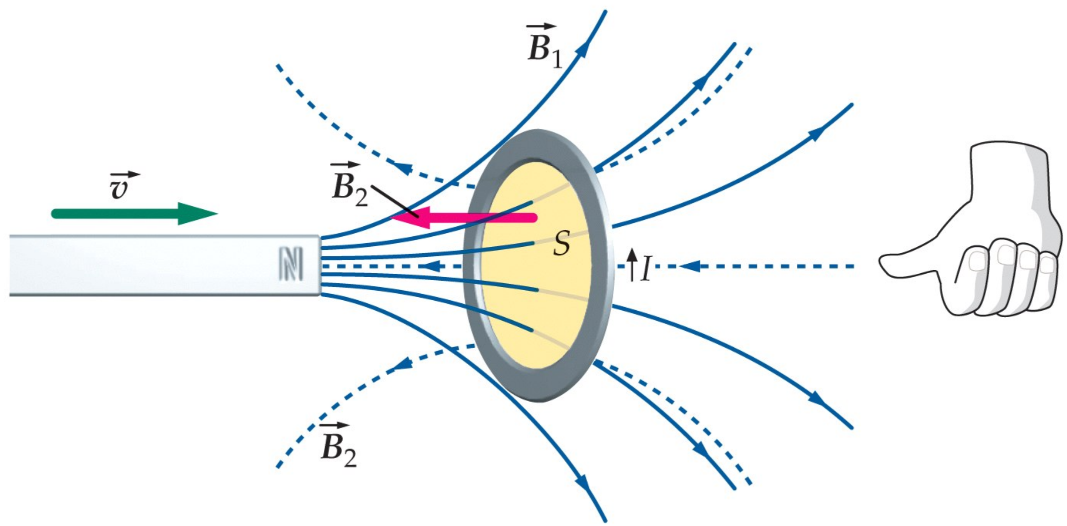
1. Dibujar un esquema de la espira y la superficie plana *S* encerrada por ésta tal como indica la figura. En la superficie *S* dibujar el vector $\Delta\mathbf{B_1}$, que representa el cambio de campo magnético $\mathbf{B_1}$ cuando se aproxima el imán.



2. Dibujar un esquema del campo $\mathbf{B_2}$ que representa el campo magnético generado por la corriente inducida en la espira. Utilizar la forma alternativa de la ley de Lenz para determinar el sentido de $\mathbf{B_2}$.

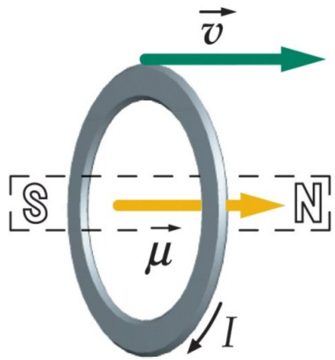


3. Teniendo en cuenta la regla de la mano derecha y el sentido de $\mathbf{B_2}$ determinar el sentido de la corriente inducida en la espira tal como se indica en la figura.



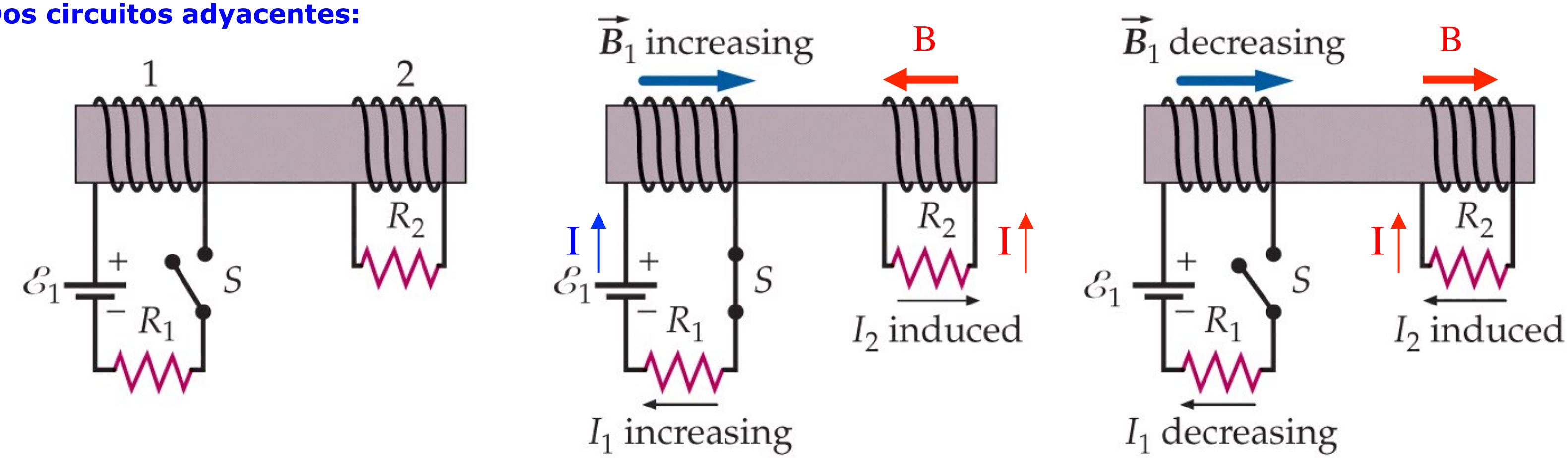
Ejemplos de la ley de Lenz

1) Una espira se aleja de la barra magnética estacionaria:



En la figura el imán está en reposo y la espira se mueve alejándose de él. En la figura se indican también la corriente inducida y el momento magnético. En este caso **el imán atrae a la espira**, según exige la ley de Lenz, oponiéndose al movimiento de ésta.

2) Dos circuitos adyacentes:

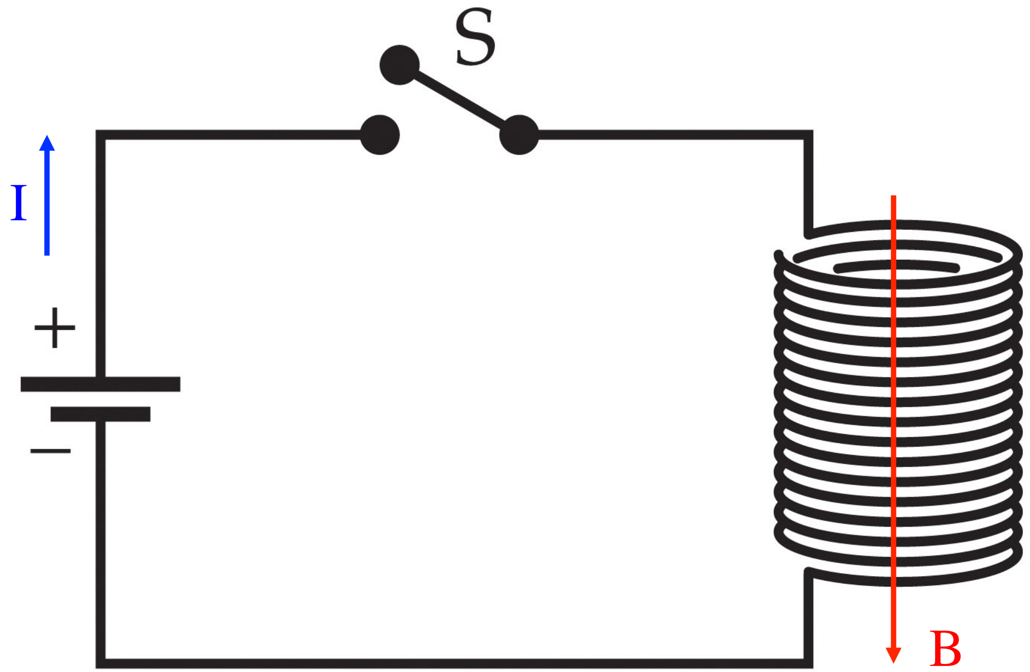


Cuando se cierra el interruptor *S*, la corriente del *circuito 1* no alcanza su valor estacionario $\mathcal{E}_1/R_1$ instantáneamente, sino que tarda un tiempo breve para variar desde cero a este valor final. Durante este tiempo, mientras la corriente está aumentando, el flujo del *circuito 2* está variando y existe una corriente inducida en dicho circuito en el sentido indicado. Cuando la corriente del *circuito 1* alcance su valor estacionario, este flujo dejará de ser variable y no existerá ninguna corriente inducida en el *circuito 2*. Cuando se abre el interruptor del *circuito 1* y al corriente disminuya hasta cero, aparecerá momentanemente en el *circuito 2* una corriente inducida en sentido opuesto. Es importante tener muy bien en cuenta que **existe una fem inducida sólo mientras el flujo está variando**.

3) Consideramos el circuito aislado sencillo de la figura:

Cuando existe una corriente en el circuito, existe un flujo magnético a través de la bobina debido a su propia corriente. Cuando la corriente varía, el flujo de la bobina también varía y existe una fem inducida en el circuito. Esta ***fem autoinducida*** se opone a la variación de la corriente y se denomina **fuerza contra fem**.

Debido a esta fem autoinducida, la corriente de un circuito no puede saltar instantáneamente desde cero hasta un valor finito o desde cierto valor determinado hasta cero.



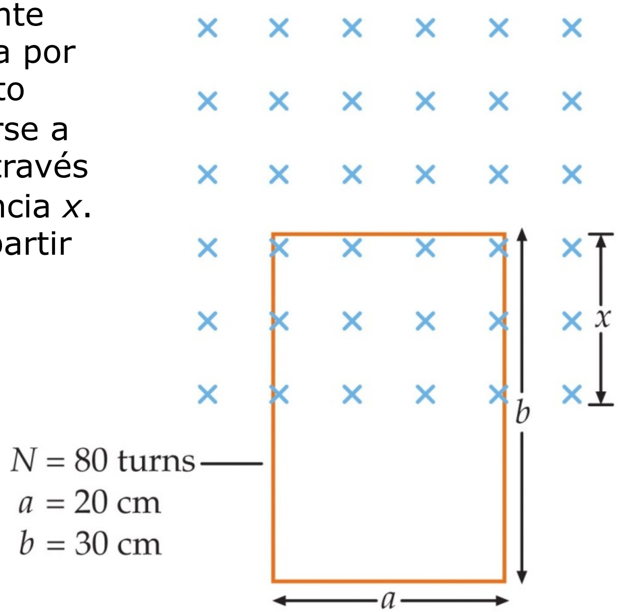
Joseph Henry observó la presencia de una **chispa** que saltaba en el interruptor cuando intentaba abrir el circuito. Esta chispa se debe a la gran fem inducida que se presenta cuando la corriente varía rápidamente. **En este caso al fem inducida intenta mantener la corriente original**. La gran fem inducida produce una gran diferencia de potencial a través del interruptor cuando éste se abre. El campo eléctrico entre los bornes del interruptor es suficientemente grande para provocar la **ruptura dieléctrica del aire**. Cuando se da la ruptura dieléctrica, el aire conduce la corriente eléctrica en forma de chispa.

Ley de Lenz y una bobina en movimiento

EJEMPLO 28.6

Una bobina rectangular de *N* vueltas de anchura *a* y longitud *b*, cada una, donde *N*=80, *a*=20 cm y *b*=30 cm, está situada en un campo magnético *B*=0.8 T dirigido hacia dentro de la página. Como indica la figura, sólo la mitad de la bobina se encuentra en la región del campo magnético. La resistencia *R* de la bobina es de 30 Ω. Determinar el módulo, dirección y sentido de la corriente inducida al desplazarse la bobina con una velocidad de 2 m/s (*a*) hacia la derecha, (*b*) hacia arriba y (*c*) hacia abajo.

Planteamiento del problema: La corriente inducida es igual a la fem inducida dividida por la resistencia. La fem inducida en el circuito cuando se mueve la bobina puede calcularse a partir de la variación temporal del flujo a través de ésta. El flujo es proporcional a la distancia *x*. El sentido de la corriente se determina a partir de la ley de Lenz.



(a) 1. La corriente inducida es igual a la fem dividida por la resistencia :

$$I = \frac{\xi}{R}$$

2. El módulo de la fem inducida viene dada por la ley de Faraday :

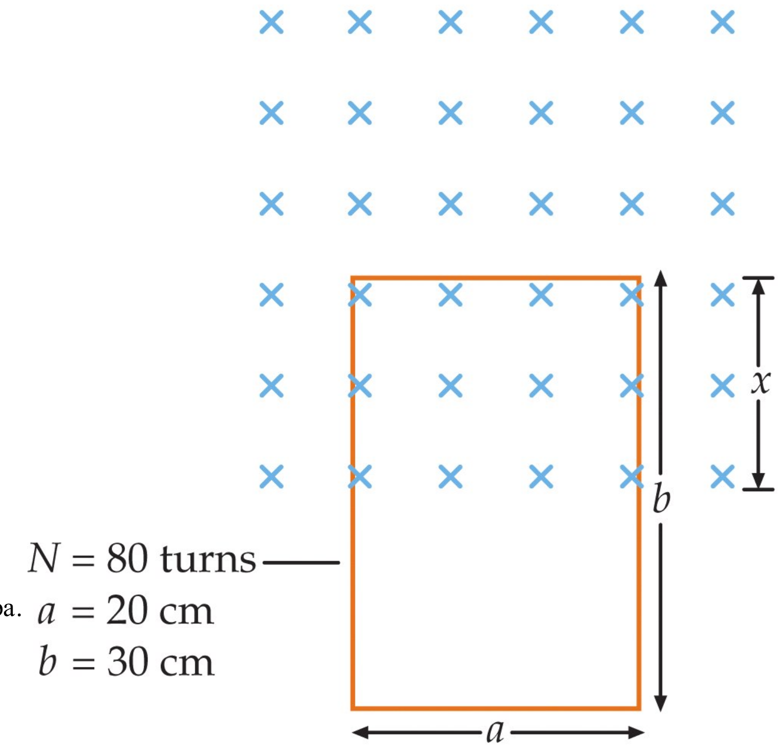
$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

3. El flujo a través de la bobina es N veces el que atraviesa cada vuelta de ésta. Eligimos la dirección del vector unitario $\mathbf{\hat{n}}$ como la dirección hacia adentro de la pagína. El flujo a través de la superficie S de cada vuelta es Bax :

$$\phi_m = \mathrm{N}\mathbf{B}\cdot\mathbf{\hat{n}}\mathrm{A} = \mathrm{NBax}$$

4. Cuando la bobina se mueve hacia la derecha (o hacia la izquierda), el flujo no cambia (hasta que la bobina sale de la región del campo magnético). La corriente es, por lo tanto, cero :

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = 0, \text{ así tenemos que } \boxed{I = 0}$$



(b) 1. Calcular la derivada del flujo respecto al tiempo cuando la bobina se mueve hacia arriba. En este caso x aumenta, de modo que $\frac{dx}{dt}$ es positiva :

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(NBax)}{dt} = NBa\frac{dx}{dt}$$

2. Calcular el módulo de la corriente :

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{NBa(dx/dt)}{R} = \frac{(80)(0.8\,T)(0.20\,m)(2\,m/s)}{30\,\Omega} = 0.853\,A$$

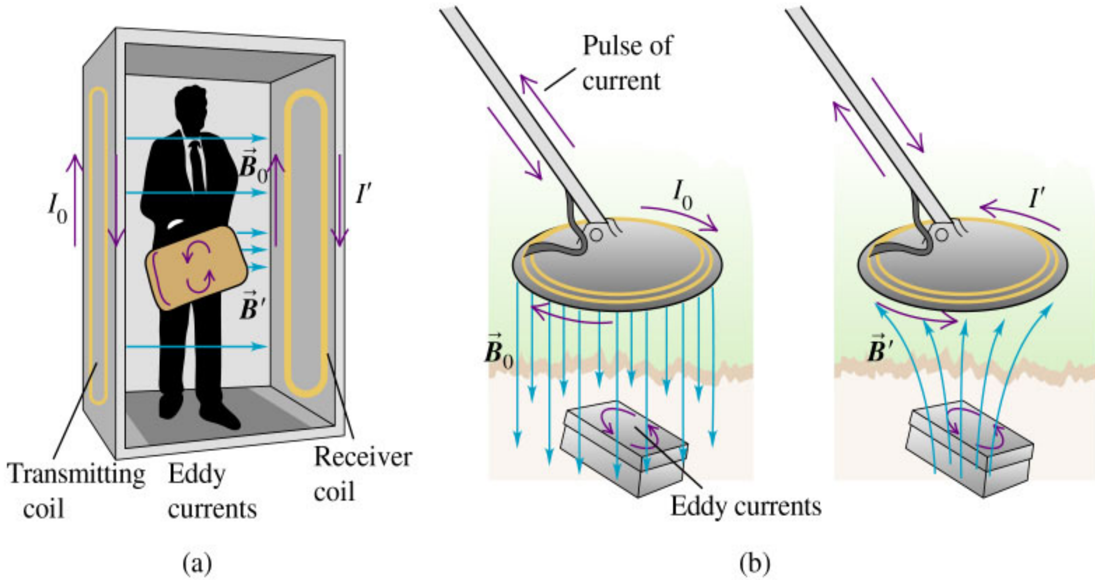
3. Cuando la bobina se mueve hacia arriba, el flujo $\mathbf{B}$ a través de S es creciente. La corriente inducida debe producir un campo magnético cuyo flujo a través de S tiende a compensar el aumento de flujo del campo externo que se produce según x aumenta. Esto implica que el producto escalar con el vector unitario $\mathbf{\hat{n}}$ es negativo. Tal campo magnético en S se dirige hacia fuera de la pagína. Para producir un campo magnético en este sentido, la corriente inducida deberá ser antihoraria :

$$\boxed{I = 0.853\,A \text{ en sentido antihorario.}}$$

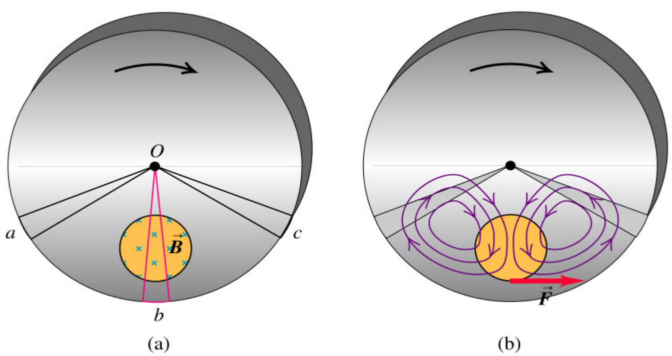
(c) Cuando la bobina se mueve hacia abajo, el flujo $\mathbf{B}$ a través de S es decreciente. La corriente inducida debe producir un campo magnético cuyo flujo a través de S tiendea compensar la disminución de flujo del campo externo que se produce según x decrece. Esto implica que el producto escalar con el vector unitario $\mathbf{\hat{n}}$ es positivo. Tal campo magnético en S se dirige hacia dentro de la pagína. Para producir un campo magnético en este sentido, la corriente inducida deberá ser horaria :

$$\boxed{I = 0.853\,A \text{ en sentido horario.}}$$

Corrientes parásitas



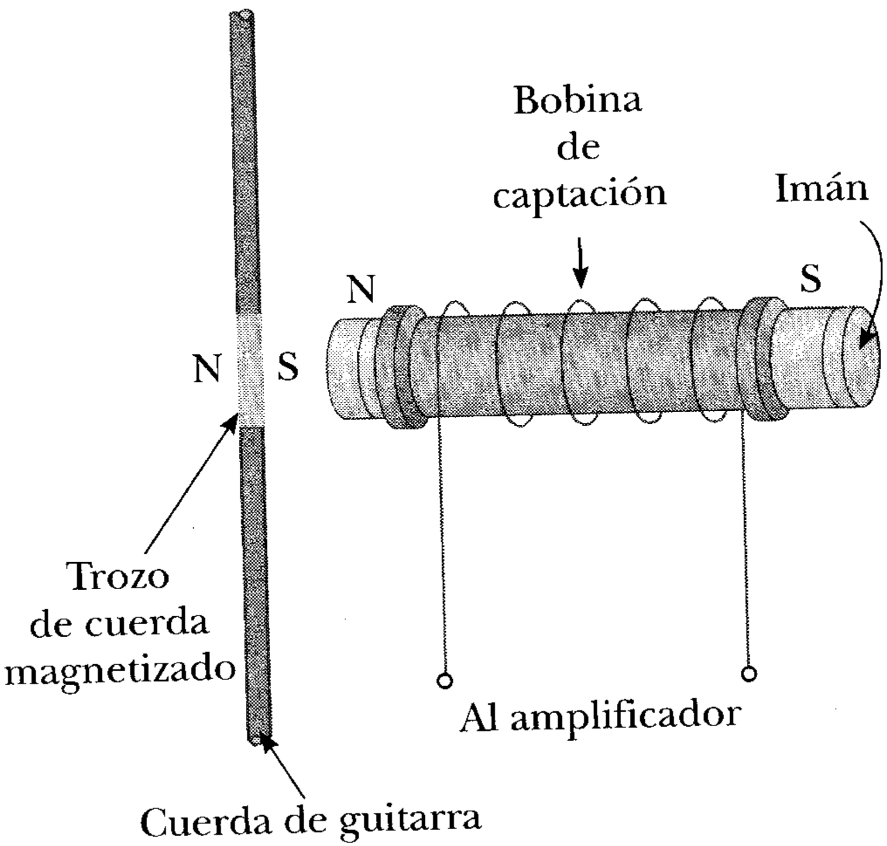
Los **detectores de metales** que se utilizan en los puntos de revisión de seguridad de los aeropuertos funcionan detectando corrientes parásitas inducidas en objetos metálicos. Se utilizan dispositivos análogos para hallar tesoros enterrados, tales como tapas de botellas y monedas perdidas.



(*a*) **Disco metálico en rotación** a través de un campo magnético perpendicular **B**. (*b*) Corrientes parasitas formadas por la fem inducida.

El sector *Ob* se desplaza a través del campo y tiene una fem inducida. Los sectores *Oa* y *Oc* no están en el campo, pero ofrecen caminos conductores de regreso para que las cargas desplazadas a lo largo de *Ob* retornen de *b* a *O*. El resultado es un circulación de corrientes parásitas en el disco. Esta corriente debe experimentar una fuerza magnética (**F**=*I***L**x**B**) que se ***opone*** a la rotación del disco. Por lo tanto, esta fuerza debe ser hacia la derecha. La interacción entre las corrientes parásitas y el campo genera una **acción de frenado sobre el disco**.
Estos efectos sirven para detener rápidamente la rotación de una sierra circular cuando se corta el suministro de energía. También, el frenado por corrientes parásitas se emplea en ciertos vehículos eléctricos.

Pastillas (*pickup/soapbar*) de una guitarra eléctrica



(a)

1. Las pastillas están formadas por un imán permanente rodeadas por un bobinado de alambre de cobre.

2. Cuando un cuerpo ferromagnético (una cuerda) se mueve dentro del campo magnético del imán permanente **provoca una corriente inducida en el bobinado** proporcional a la amplitud del movimiento y de frecuencia igual a la oscilación del cuerpo. Esta corriente es muy débil por lo que el cableado del interior de la guitarra así como el cableado hasta la amplificación debe estar muy bien apantallado para evitar ruidos parásitos.

3. Esta corriente inducida es luego amplificada

Las pastillas electromagnéticas se encuentran en diversas formas, pero principalmente dos: las **single coil** con un solo núcleo magnético y las **humbucker** con dos núcleos magnéticos y doble bobinado para eliminar ruidos.

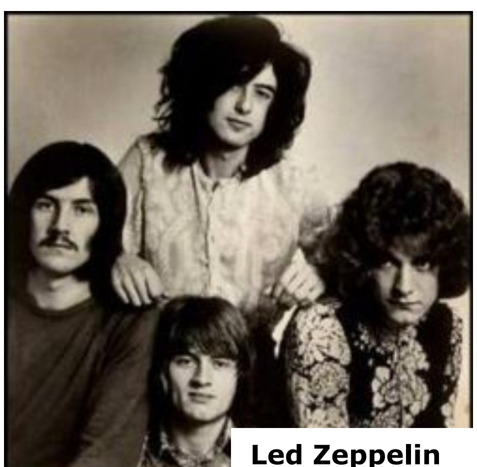
Pastillas (*pickup/soapbar*) de una guitarra eléctrica

Eric Clapton

Las pastillas pueden ser de dos tipos: **single coil** y **humbucker**:

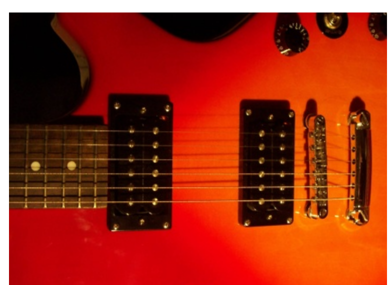
Las pastillas de **bobinado simple** (single coil) tienden a producir mayor sonido de retorno y están asociadas a las **Fender Stratocaster**.

Blues Before Sunrise



Led Zeppelin

Las pastillas humbucker usa **dos bobinas**, esto hace que por una parte incrementen la salida y por otra, al tener polaridad inversa las bobinas, que el ruido y las interferencias se reducen. Asociadas a las guitarras **Gibson Les Paul**.



Puff Daddy feat Jimmy Page - Come with me

PROBLEMA 17

Una bobina circular tiene 25 vueltas y un radio de 5 cm. Se encuentra en el ecuador, donde el campo magnético terrestre es 0.7 G norte. Determinar el flujo magnético a través de la bobina cuando (*a*) su plano es horizontal, (*b*) su plano es vertical y su eje apunta al norte, (*c*) su plano es vertical y su eje apunta al este, y (*d*) su plano es vertical y su eje forma un ángulo de 30° con el norte.

$$\phi_m = NBA\cos\theta$$

$$\phi_m = NB\pi r^2\cos\theta = 25\left(0.7\,G\,\frac{1\,T}{10^4\,G}\right)\pi\left(5\times10^{-2}\,m\right)^2\cos\theta = \left(1.37\times10^{-5}\,Wb\right)\cos\theta$$

(a) Cuando el plano es horizontal $\left(\theta = 90^\circ\right)$:

$$\phi_m = \left(1.37\times10^{-5}\,Wb\right)\cos 90^\circ = \boxed{0}$$

(b) Cuando el plano es vertical y su eje apunta al norte $\left(\theta = 0^\circ\right)$:

$$\phi_m = \left(1.37\times10^{-5}\,Wb\right)\cos 0^\circ = \boxed{1.37\times10^{-5}\,Wb}$$

(c) Cuando el plano es vertical y su eje apunta al este $\left(\theta = 90^\circ\right)$:

$$\phi_m = \left(1.37\times10^{-5}\,Wb\right)\cos 90^\circ = \boxed{0}$$

(d) Cuando el plano es vertical y su eje forma un ángulo de 30° con el norte $\left(\theta = 30^\circ\right)$:

$$\phi_m = \left(1.37\times10^{-5}\,Wb\right)\cos 30^\circ = \boxed{1.19\times10^{-5}\,Wb}$$

PROBLEMA 20

Determinar el flujo magnético a través de un solenoide de longitud 25 cm, radio 1 cm y 400 vueltas, que transporta una corriente de intensidad 2 A.

$$\phi_m = NBA\cos\theta$$

$$B = \mu_o nI = \mu_o\left(\frac{N}{\ell}\right)I$$

$$A = \pi r^2$$

$$\phi_m = N\left[\mu_o\left(\frac{N}{\ell}\right)I\right]\left(\pi r^2\right)\cos\theta = \frac{N^2\mu_o I\pi r^2}{\ell}$$

$$\phi_m = \frac{(400)^2\left(4\pi\times10^{-7}\ T\cdot m/A\right)(3\ A)\pi(0.01\,m)^2}{0.25\ m} = \boxed{7.58\times10^{-4}\ Wb}$$

PROBLEMA 28

El flujo que atraviesa una espira viene dado por $\phi_m=(t^2-4t)x10^{-1}$ Wb, donde t se da en segundos. (a) Hallar la fem inducida en función del tiempo. (b) Hallar ϕ_m y para t=0 s, t=2 s, t=4 s y t=6 s.

(a) Utilizar la ley de Faraday para calcular ξ en función del tiempo:

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d\left[\left(t^2-4t\right)\times 10^{-1}\,Wb\right]}{dt} = -\left(2t-4\right)\times 10^{-1}\,Wb/s = \boxed{-\left(0.2t-0.4\right)V}$$

(b) Hallar ϕ_m para $t=0\,s, t=2\,s, t=4\,s$ y $t=6\,s$:

$$\phi_m(0\,s) = \left[\left(0\right)^2-4\left(0\right)\times 10^{-1}\,Wb\right] = \boxed{0\,Wb}$$

$$\xi(0\,s) = -\left[0.2\left(0\right)-0.4\right]V = \boxed{0.400\,V}$$

$$\phi_m(2\,s) = \left[\left(2\right)^2-4\left(2\right)\times 10^{-1}\,Wb\right] = \boxed{-0.400\,Wb}$$

$$\xi(2\,s) = -\left[0.2\left(2\right)-0.4\right]V = \boxed{0\,V}$$

$$\phi_m(4\,s) = \left[\left(4\right)^2-4\left(4\right)\times 10^{-1}\,Wb\right] = \boxed{0\,Wb}$$

$$\xi(4\,s) = -\left[0.2\left(4\right)-0.4\right]V = \boxed{-0.400\,V}$$

$$\phi_m(6\,s) = \left[\left(6\right)^2-4\left(6\right)\times 10^{-1}\,Wb\right] = \boxed{1.200\,Wb}$$

$$\xi(6\,s) = -\left[0.2\left(6\right)-0.4\right]V = \boxed{-0.800\,V}$$

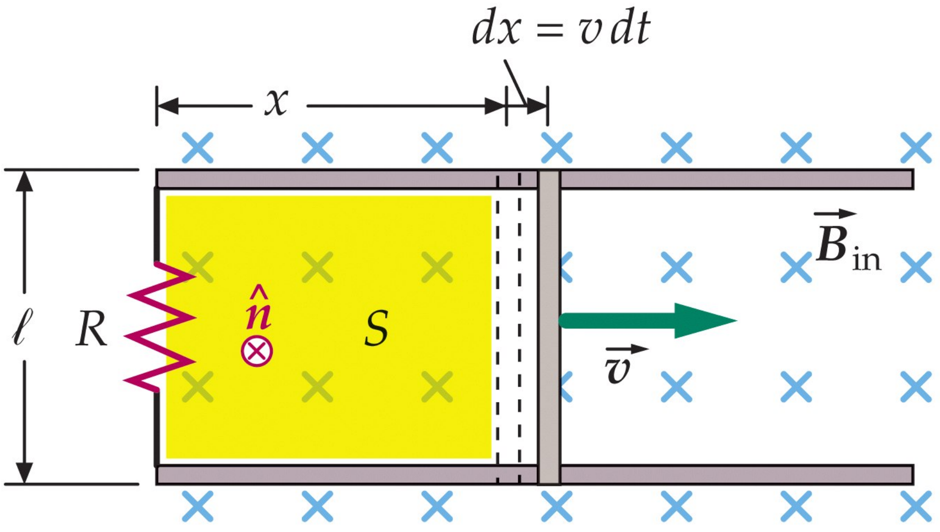
28-4
Fem de movimiento

Fem de movimiento

La fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético se denomina **fem de movimiento**:

Fem de movimiento es toda fem inducida por el movimiento de un conductor en un campo magnético.

DEFINICIÓN- FEM DE MOVIMIENTO



La figura muestra una varilla conductora que se desliza a lo largo de dos conductores que están unidos a una resistencia. Existe un campo magnético **B** uniforme dirigido hacia el papel.

Cuando la barra se mueve hacia la derecha, el área de la superficie *S* crece y el flujo magnético entrante al papel que atraviesa se incrementa. En el circuito se induce una fem de magnitud *Blv*, produciéndose una corriente en sentido contrario al de las agujas del reloj, la cual genera un flujo saliente del papel que se opone al cambio del flujo debido al movimiento del la varilla.

El flujo magnético es: $\phi_m = \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}A = B_n A = B\ell x$

Cuando *x* aumenta una distancia *dx*, el área *S* incluida en el circuito cambia en $dA=l dx$ y el flujo se modifica en $d\phi_m=Bl\,dx$. La variación de flujo por unidad de tiempo es:

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B\ell\frac{dx}{dt} = B\ell v$$

en donde $v=dx/dt$ es la velocidad de la barra. Por lo tanto, la fem inducida en este circuito es :

ECUACIÓN GENERAL PARA LA FEM EN MOVIMIENTO

$$\xi = \oint_C (v\times B)\cdot d\ell = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

FEM PARA UNA VARILLA QUE SE MUEVE PERPENDICULARMENTE A ELLA MISMA Y A **B**

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B\ell v$$

28-6
Inductancia

Autoinducción

El flujo magnético que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el mismo y con las corrientes que circulan por circuitos próximos.

Consideramos una bobina por la que circula una corriente I:

La corriente produce un campo magnético B que varía de un punto a otro, pero en todos los puntos $\mathbf{B} \propto I$. El flujo magnético a través de la bobina, por lo tanto, es también proporcional a I:

$$\boxed{\phi_m = LI}$$

DEFINICIÓN-AUTOINDUCCIÓN

en donde L es una constante llamada **autoinducción** de la bobina que depende de la forma geométrica de la misma.

La unidad del SI de inductancia es el **henrio** (H) que es igual a la unidad del flujo (el Weber) dividido por la intensidad de corriente (el Amperio):

$$1\,H = 1\,\frac{Wb}{A} = 1\,\frac{T \cdot m^2}{A}$$

La autoinducción de un solenoide enrollado apretadamente puede calcularse directamente[1] usando al ecuación $L=\phi_m/I$. El campo **B** en un solenoide de longitud l y N vueltas que transporta una corriente I fue calculado en el ejemplo 28.1:

$$\phi_m = \frac{\mu_o N^2 IA}{\ell} = \mu_o n^2 IA\ell$$

en donde $n=N/l$ es el número de vueltas por unidad de longitud. La autoinducción, por lo tanto, se obtiene dividendo ϕ_m por la intensidad de corriente I:

$$\boxed{L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_o n^2 A\ell}$$

AUTOINDUCCIÓN DE UN SOLENOIDE

Como es lógico, la autoinducción es $\propto$ n^2 (al cuadrado del número de vueltas por unidad de longitud) y al volumen (Al). Así pues, la autoinducción depende sólo de factores geométricos. De acuerdo con las dimensiones de esta ecuación, μ_o puede expresarse en henrio por metro:

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$$

[1] En principio, la autoinducción de cualquier bobina o circuito puede calcularse suponiendo la existencia de una corriente I, determinando **B** en cada punto de una superficie encerrada por la bobina, calculando el flujo ϕ_m y usando la ecuación $L=\phi_m I$. En la práctica, el cálculo es muy difícil. Sin embargo, la autoinducción de un solenoide enrollado apretamente puede calcularse directamente.

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo debido a la corriente también se modifica y, por lo tanto, en el circuito se induce una fem. Como <u>la autoinducción del circuito es constante</u>, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

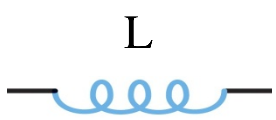
$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

De acuerdo con la **ley de Faraday**, resulta

$$\xi = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Así, pues, la fem autoinducida es proporcional a la variación con el tiempo de la intensidad de corriente.

Una bobina o solenoide con muchas vueltas posee una gran autoinducción y se denomina **inductor**. En los circuitos se representa con el símbolo



La diferencia de potencial entre los extremos de un inductor viene dada por:

$$\boxed{\Delta V = \xi - Ir = -L\frac{dI}{dt} - Ir}$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE LOS EXTREMOS DE UN INDUCTOR

donde *r* es la resistencia interna del inductor. Si el inductor tiene un núcleo de hierro, la resistencia interna incluye las propiedades de este núcleo. Par un inductor ideal *r*=0.

Autoinducción de un solenoide

EJEMPLO 28.11
Determinar la autoinducción de un solenoide de longitud 10 cm, área 5 cm^2, y 100 vueltas.

Planteamiento del problema: Podemos calcular la autoinducción en henrios mediante la ecuación:

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu_o n^2 A\ell$$

$1.\ L$ viene expresada por la ecuación:

$$L = \mu_o n^2 \mathrm{A}\ell$$

2. Convertir las magnitudes conocidas en unidades del SI:

$$\ell = 10\ cm = 0.1\ m$$

$$A = 5\ cm^2 = 5 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$n = \frac{N}{\ell} = \frac{(100\ vueltas)}{(0.1\ m)} = 1000\ vueltas / m$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H / m$$

$3.$ Sustituir estos valores en L:

$$L = \mu_o n^2 \mathrm{A}\ell = (4\pi \times 10^{-7}\ H/m)(10^3\ vueltas/m)(5 \times 10^{-4}\ m^2)(0.1\ m) = \boxed{6.28 \times 10^{-5}\ H}$$

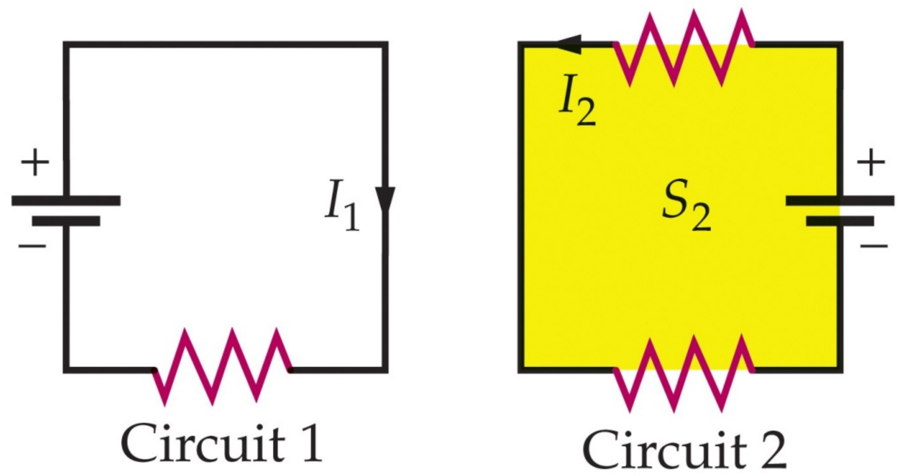
Inductancia mutua

Cuando dos o más circuitos están próximos uno al otro, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no sólo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por los circuitos próximos.

Sea I_1 la corriente en ele circuito 1 de la izquierda e I_2 la del circuito 2 de la derecha. El campo magnético **B** en al superficie *S* es superposición de $\mathbf{B_1}$ debido a I_1 y $\mathbf{B_2}$ debido a I_2, siendo $\mathbf{B_1}$ proporcional a I_1 y $\mathbf{B_2}$ proporcional a I_2. Por lo tanto podemos expresar el flujo de $\mathbf{B_1}$ que atraviesa el circuito 2, $\phi_{m2,1}$ como:

$$\boxed{\phi_{m2,1} = M_{2,1} I_1}$$

DEFINICIÓN-INDUCTANCIA MUTUA



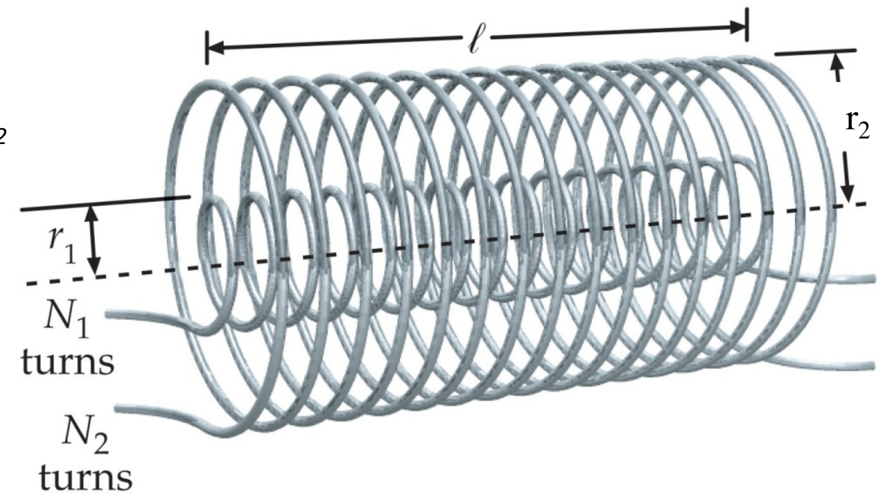
Dos circuitos adyacentes. El campo magnético en S_2 se debe parcialmente a la corriente I_1 y parcialmente a I_2. El flujo a través de cualquiera de los circuitos es la suma de dos términos, uno proporcional a I_1 y el otro a I_2.

en donde $M_{2,1}$ es la **inductancia mutua** de los dos circuitos que depende de la disposición geométrica entre ambos. En particular, si los circuitos están bastante separados, el flujo $\mathbf{B_1}$ a través del circuito 2 será pequeño y la inductancia mutua también lo será.

El flujo neto ϕ_{m2} de $\mathbf{B=B_1+B_2}$ que atraviesa el circuito 2 es $\phi_{m2} = \phi_{m2,2} + \phi_{m2,1}$.

Inductancia mutua de dos solenoides concéntricos

Sea *l* la longitud común de ambos solenoides y supongamos que el solenoide interior tiene N_1 vueltas y radio r_1 y que el solenoide exterior tiene N_2 vueltas y radio r_2. Calcularemos la inductancia mutua $M_{2,1}$ suponiendo que el solenoide interior transporta una corriente I_1 y determinando el flujo magnético ϕ_{m2} debido a esta corriente a través del solenoide exterior.



El campo $\mathbf{B_1}$ debido al solenoide interno es constante en su <u>espacio interior</u>:

$$B_1 = \mu_o(N_1/\ell)I_1 = \mu_o n_1 I_1, \quad r < r_1$$

<u>Fuera</u> del solenoide interno, el campo $\mathbf{B_1}$ es despreciable. El flujo de $\mathbf{B_1}$ que atraviesa el solenoide externo es, por lo tanto

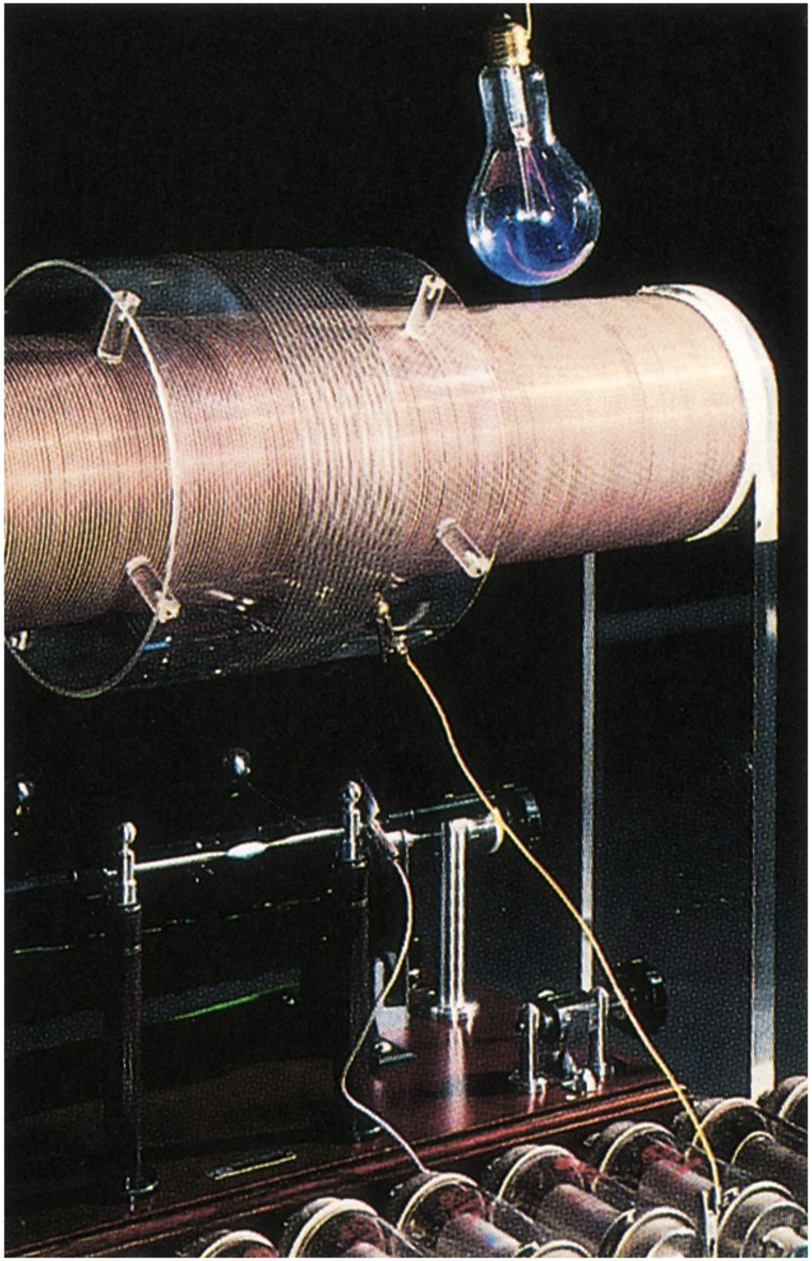
$$\phi_{m2} = N_2 B_1\left(\pi r_1^2\right) = n_2 \ell B_1\left(\pi r_1^2\right) = \mu_o n_2 n_1 \ell\left(\pi r_1^2\right) I_1$$

Obsérvese que el área utilizada para calcular el flujo que atraviesa el solenoide exterior no es el área de dicho solenoide (πr_2^2), sino el área del solenoide interior (πr_1^2), ya que el campo magnético debido al solenoide interior es cero fuera del mismo.

La **inductancia mutua** es, por lo tanto,

$$M_{2,1} = \frac{\phi_{m2,1}}{I_1} = \mu_o n_2 n_1 \ell \pi r_1^2$$

<u>Obsérvese</u> que $\mathbf{M_{2,1}=M_{1,2}}$. Puede demostrarse que éste es un resultando general. Por ello, prescindimos de los subíndices de la inductancia mutua y **escribiremos simplemente M**.



Carrete de Tesla. Este dispositivo funciona como un transformador (Capítulo 29). La corriente alterna de bajo voltaje del arrollamiento exterior se transforma en una corriente alterna de mayor voltaje en el arrollamiento interior. La fem alterna inducida en la bobina interior por la corriente variable de la bobina exterior es suficientemente grande para encender la bombilla situada encima de las bobinas.

28-7
Energía magnética

Energía magnética

Un inductor almacena energía magnética, del mismo modo que un condensador almacena energía eléctrica.

Consideremos un circuito formado por una inductancia ***L*** y una resistencia ***R*** en serie con una batería de fem $\mathcal{E}_o$ y un interruptor *S* como se muestra en al figura. Aplicando **la ley de las mallas** de Kitchhoff en este circuito, resulta

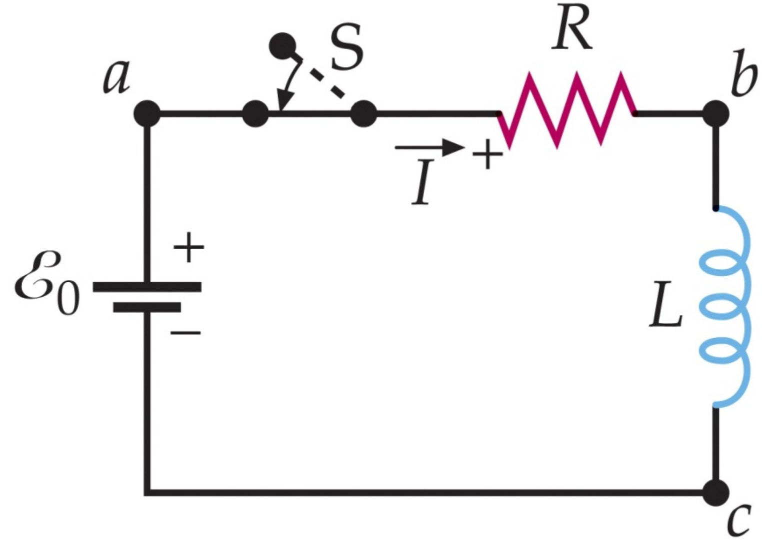
$$\xi_o - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Multiplicando ambos miembros por la intensidad de corriente *I* se obtiene:

$$\xi_o I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt}$$

El término $\boldsymbol{\mathcal{E}_o I}$ es la <u>potencia suministrada</u> por la batería. El término $\boldsymbol{I^2R}$ es la <u>potencia disipada</u> en forma de calor en la resistencia *R*. El término ***LI dI/dt*** representa la <u>energía que por unidad de tiempo incide en el inductor</u>. Si U_m es la energía en el inductor, se verifica

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \quad \rightarrow \quad dU_m = LI\,dI$$



Integrando desde $t=0$, cuando la corriente es nula hasta, $t=\infty$, cuando la corriente ha alcanzado su valor final I_f, resulta:

$$U_m = \int dU_m = \int_0^{I_f} LI\,dI = \frac{1}{2}LI_f^2$$

La energía almacenada en un inductor que transporta una corriente *I* viene dada por

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

ENERGÍA ALMACENADA EN UN INDUCTOR

Energía magnética en un solenoide largo

En el proceso de producir una corriente en un inductor, se crea un campo magnético en el espacio interior a la bobina del mismo. Es decir, podemos imaginar que la energía almacenada en un inductor es energía almacenada en el campo magnético creado.

En el caso especial de un **solenoide largo**, el campo magnético está relacionado con la corriente I y el número de vueltas por unidad de longitud n por

$$B = \mu_o n I \;\rightarrow\; I = \frac{B}{\mu_o n}$$

y la autoinducción viene expresada por:

$$L = \mu_o n^2 A\ell$$

en donde A es el área transversal y l la longitud. Sustituyendo I y L en U_m resulta

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_o n^2 A\ell\left(\frac{B}{\mu_o n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_o}A\ell$$

La magnitud Al es el volumen del espacio contenido dentro del solenoide, donde se crea el campo magnético.

La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía magnética** u_m:

$$\boxed{u_m = \frac{B^2}{2\mu_o}}$$

DENSIDAD DE ENERGÍA MAGNÉTICA

Aunque está ecuación se ha obtenido para el caso especial del campo magnético en un solenoide largo, el resultado es general. Es decir, siempre que exista un campo magnético en el espacio, la energía magnética por unidad de volumen viene dada por misma ecuación.

Obsérvese la semejanza con la densidad de energía eléctrica en un campo eléctrico:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

28-8
Circuitos *RL*

Circuitos resistencia (R)-inductor (L)

Un circuito que contiene una **resistencia** y un **inductor** se denomina **circuito *RL***. Como a temperatura ambiente todos los circuitos contienen resistencia y autoinducción, el análisis de un circuito *RL* puede aplicarse en cierta extensión a todo circuito.

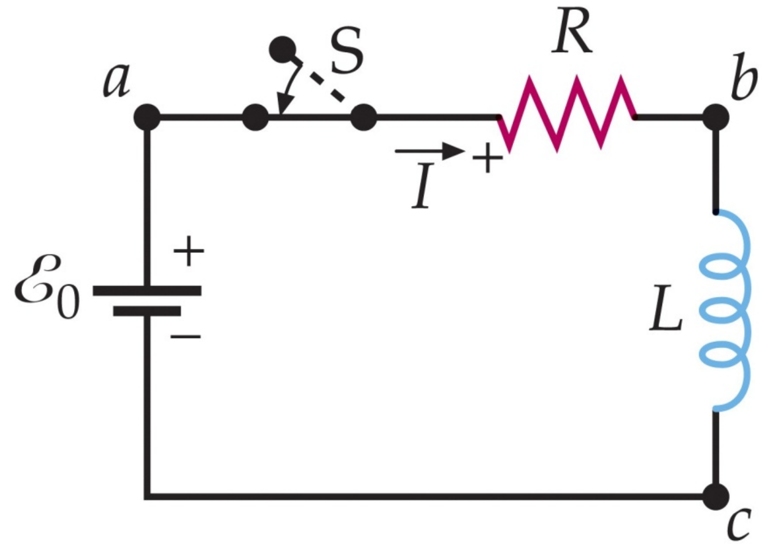
Para el circuito de la figura la aplicación de la **regla de las mallas de Kirchhoff** nos proporciona:

$$\xi_o - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

<u>Inicialmente</u>, justo después de cerrar el interruptor, la corriente es nula, de modo que IR es cero y LdI/dt es igual a la fem de la batería, ξ_o. Haciendo I=0 en la ecuación, resulta:

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{I=0} = \frac{\xi_o}{L}$$

Cuando la corriente crece, IR crece también y dI/dt disminuye. Obsérvese que la corriente no puede saltar súbitamente de cero a un valor finito como lo haría si no tuviera inductancia.



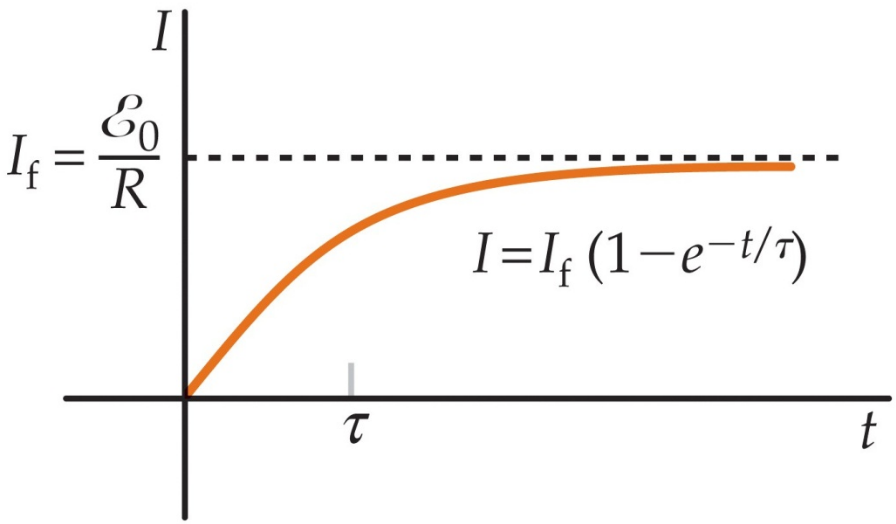
Cuando la inductancia L no es despreciable, dI/dt es finita y, por lo tanto, la corriente debe ser continua en el tiempo. En un tiempo breve, la corriente alcanza un valor positivo I, y su variación con el tiempo es:

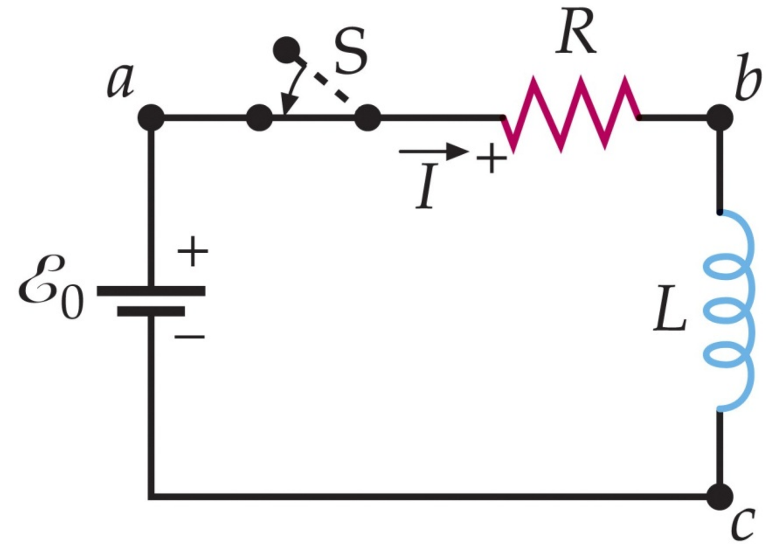
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\xi_o}{L} - \frac{IR}{L}$$

En este momento I es todavía creciente, pero su ritmo de crecimiento es menor que en el instante t=0. El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo dI/dt igual a cero:

$$I_f = \frac{\xi_o}{R}$$

La figura muestra la variación de la corriente en este circuito en función del tiempo. Esta figura es semejante a la que representa la variación de la carga en un condensador cuando éste se carga en un circuito *RC*.





La ecuación $\xi_o - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$ tiene la misma forma que la ecuación correspondiente a la carga de un condensador y puede resolverse de igual modo, es decir, separando variables e integrando. El resultado es:

$$I = \frac{\xi_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) = I_f\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

en donde $I_f = \mathcal{E}_0/R$ es la corriente cuando $t \to \infty$.

El símbolo τ representa la **constante de tiempo del circuito**:

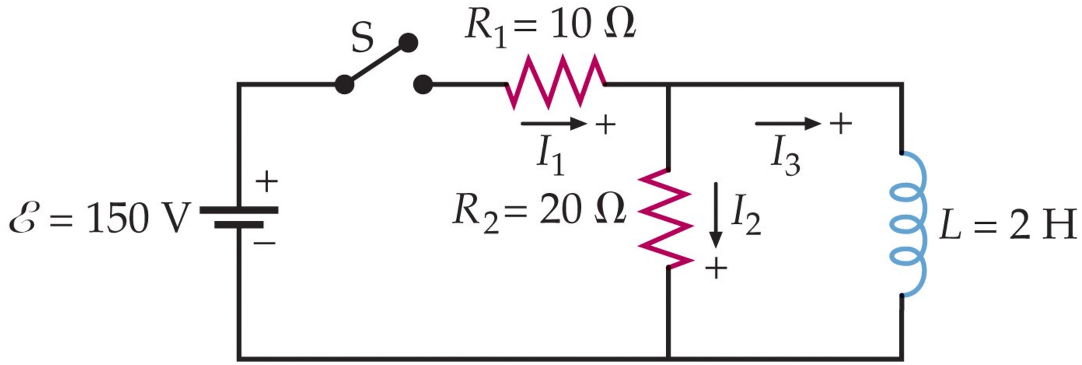
$$\tau = \frac{L}{R}$$

Cuanto mayor es la autoinducción *L* o menor la resistencia *R*, más tiempo exige el establecimiento de una fracción determinada de la corriente final I_f.

Corrientes inicial y final

EJEMPLO 28.15

Determinar las corrientes I_1, I_2 e I_3 en el circuito que se muestra en la figura, (*a*) inmediatamente después de cerrar el interruptor *S* y (*b*) al cabo de un largo tiempo de cerrar *S*. Pasado este largo tiempo, se abre el interruptor. (*c*) Inmediatamente después de abrir el interruptor determinar las tres corrientes y (*d*) determinar la caída de potencial en los extremos de la resistencia. (*e*) Determinar las tres corrientes un largo tiempo después de abrir *S*.



Planteamiento del problema: (*a*) Simplificaremos el cálculo teniendo en cuenta que la corriente en un inductor no puede cambiar bruscamente. Por lo tanto, la corriente en el inductor debe ser cero inmediatamente después de cerrar el interruptor, porque era cero antes. (*b*) Cuando la corriente alcanza su valor final, dI/dt es igual a cero y, por lo tanto, no hay caída de potencial a través del inductor. Este actúa como un cortocircuito, es decir, como un alambre de resistencia nula. (*c*) Inmediatamente después de abrir el interruptor, la corriente en el inductor sigue siendo la misma que antes de la apertura. (*d*) Un tiempo largo después de abrir el interruptor, todas las corrientes son nulas.

(a) 1. En el instante de cerrar el circuito en S la corriente a través del inductor es cero, exactamente igual que lo era inmediatamente antes de que se cerrara. Aplicando la regle de los nudos podemos relacionar I_1 e I_2 :

$I_3 = \boxed{0}$

$I_1 = I_2 + I_3$

así $I_1 = I_2$

2. La corriente en la malla de la izquierda se obtiene aplicándole la regla de las mallas:

$\xi - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$

así $I_2 = \dfrac{\xi}{R_1 + R_2} = \dfrac{150\,V}{10\,\Omega + 10\,\Omega} = \boxed{5\,A}$

(b) 1. Pasado un tiempo suficientemente largo, la corriente se vuelve estacionaria y el inductor actúa como un cortocircuito de tal forma que la caída de potencial entre los extremos de la resistencia R_2 es cero. Aplicando la regla de las mallas obtenemos I_2 :

$-L\dfrac{dI_3}{dt} + I_2 R_2 = 0$

$0 + I_2 R_2 = 0 \Rightarrow \boxed{I_2 = 0}$

2. Aplicando otra vez la regla de las mallas a la malla de la izquierda, obtenemos I_1 :

$\xi - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$

$\xi - I_1 R_1 - 0 = 0$

por lo tanto

$I_1 = \dfrac{\xi}{R_1} = \dfrac{150\,V}{10\,\Omega} = \boxed{15\,A}$

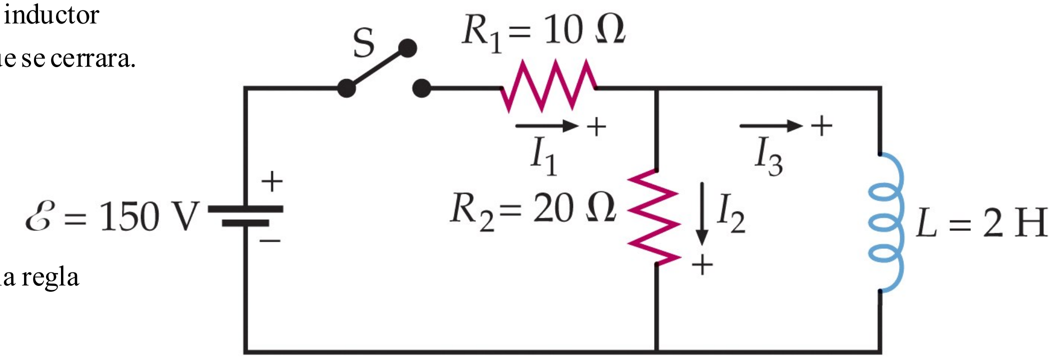
3. Aplicando la regla de los nudos obtenemos I_3 :

$I_1 = I_2 + I_3$

$15\,A = 0 + I_3$

por lo tanto

$I_3 = \boxed{15\,A}$



(c) Cuando el interruptor es reabierto, I_1 se hace cero instantáneamente. La corriente I_3 en el inductor varía de forma continua, de tal forma que en aquel instante $I_3 = 15\,A$. Aplicando la regla de los nudos obtenemos I_2 :

$I_3 = \boxed{15\,A}$

$I_1 = I_2 + I_3$

por lo tanto

$I_2 = I_1 - I_3 = 0 - 15\,A = \boxed{-15\,A}$

(d) Aplicando la ley de Ohm obtenemos la caída de potencial entre los extremos de R_2 :

$V = I_2 R_2 = (15\,A)(20\,\Omega) = \boxed{300\,V}$

(e) Pasado un tiempo suficientemente largo después de que el interruptor fuera abierto, todas las corrientes deberán ser cero :

$I_1 = I_2 = I_3 = \boxed{0}$

Observaciones: ¿Puede sorprendernos que la caída de potencial a través de R_2 en el apartado (*d*) sea superior a la fem de la batería? Esta caída de potencial es igual a la fem del inductor.