TEMA 1

INTEGRALES DOBLES

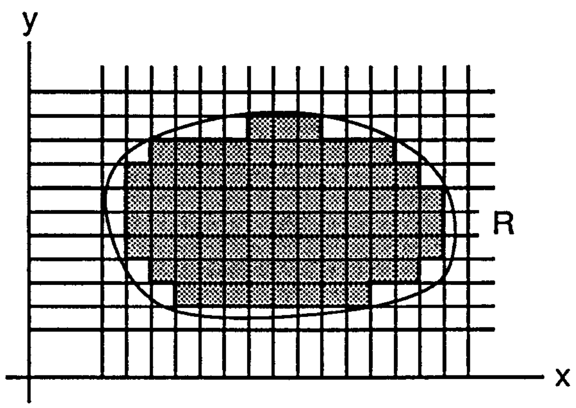
INTEGRAL DOBLE

Definición

Sea R una región cerrada y acotada del plano IR^2.
Sea $f: IR^2 \rightarrow IR$ una función definida sobre la región R.
Los pasos que conducen a la definición de integral doble son:

1. Consideramos una cuadrícula que contenga a R siendo A_i $i = 1,...,n$ rectángulos de la cuadrícula, de áreas respectivas ΔA_i, totalmente contenidos en R.
2. Escogemos (x_i, y_i) punto arbitrario de A_i para $i = 1,...,n$.
3. Calculamos la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$
4. Consideramos cuadrículas cada vez más finas que contengan a R, de modo que las dimensiones de cada rectángulo tiendan a 0, y el número de rectángulos contenidos en R sea cada vez mayor. Entonces definimos:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \; := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$$



Funciones integrables

La función escalar de dos variables f definida en la región R cerrada y acotada se dice que es integrable sobre R si y sólo si verifica la existencia del límite anterior y su valor es finito. El valor del límite recibe el nombre de integral doble de f sobre R.

Condición suficiente de integrabilidad

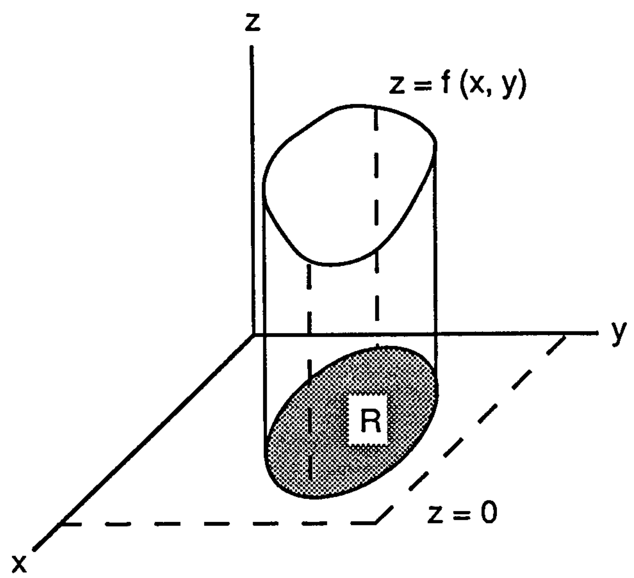
Si la función f es continua en la región R cerrada y acotada entonces f es integrable sobre R.

Interpretación de la integral doble

(1) Si $f(x, y) = 1$ en R, entonces Área (R) $= \iint_R 1\, dA$

(2) Si $f(x, y) \geq 0$ en R, entonces $\iint_R f(x, y)\, dA$

representa el volumen del sólido de paredes laterales rectas limitado arriba por la superficie $z = f(x, y)$ y abajo por la región R en el plano $z = 0$.



(3) Si $f(x, y) \geq g(x, y)$, entonces $\iint_R [f(x, y) - g(x, y)]\, dA$

representa el volumen del sólido limitado entre las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$, siendo R la región del plano $z = 0$ cuya frontera es la proyección de la curva intersección de ambas superficies.

Propiedades de la integral doble

(1) $\iint_R k\, f(x, y)\, dA = k \iint_R f(x, y)\, dA \qquad k \in \mathbb{R}$

(2) $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$

(3) Si $R = R_1 \cup R_2$ donde $R_1 \cap R_2$ es a lo sumo una curva,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

Cálculo de integrales dobles sobre rectángulos

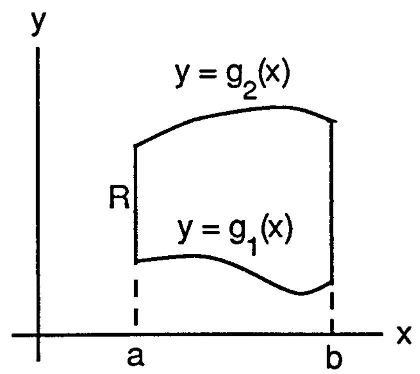
Si $f(x, y)$ es una función continua sobre el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Regiones de tipo I y regiones de tipo II en el plano

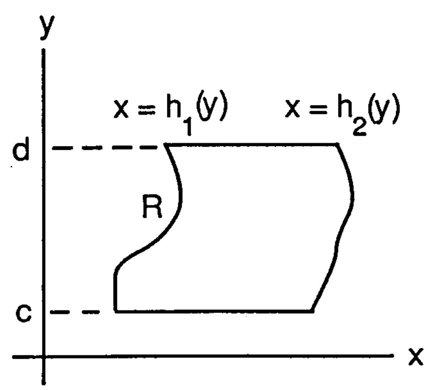
La región R es del tipo I en el plano si existen dos funciones continuas $g_1(x)$ y $g_2(x)$ de manera que los puntos de R pueden expresarse en la forma:

$$a \le x \le b$$
$$g_1(x) \le y \le g_2(x)$$



La región R es del tipo II en el plano si existen dos funciones continuas $h_1(y)$ y $h_2(y)$ de manera que los puntos de R pueden expresarse en la forma:

$$c \le y \le d$$
$$h_1(y) \le x \le h_2(y)$$



Teorema

(a) Si R es una región de tipo I, y f (x, y) es continua en R:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(b) Si R es una región de tipo II, y f (x, y) es continua en R:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Cambio de variable

En coordenadas rectangulares cartesianas $dA = dx\,dy$.

Sea ahora el cambio de coordenadas dado por la aplicación:

$$\left.\begin{array}{l} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{array}\right\}$$

siendo T la región del plano uv que se aplica en la región R del plano xy.

Si se cumplen las condiciones siguientes:

- Las funciones X, Y, $\partial X/\partial u$, $\partial X/\partial v$, $\partial Y/\partial u$, $\partial Y/\partial v$ son continuas en T.
- La aplicación de T sobre R es biyectiva.
- El jacobiano de la aplicación $J(u,v) \neq 0$.

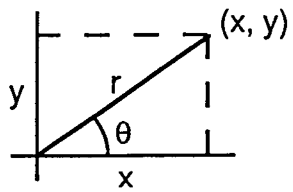
entonces:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(X(u,v), Y(u,v))\ |J(u,v)|\ du\,dv$$

Cambios de variable usuales

1. Coordenadas polares

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad J(r,\theta) = r$$



2. Coordenadas polares descentradas

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad J(r,\theta) = r$$

3. Coordenadas elípticas

$$\left.\begin{array}{l} x = a\,r\cos\theta \\ y = b\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad J(r,\theta) = a\,b\,r$$

4. Transformaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} x = A\,u + B\,v \\ y = C\,u + D\,v \end{array}\right\} \quad J(u,v) = AD - BC \qquad AD - BC \neq 0$$

Aplicaciones de la integral doble

Supongamos que tenemos un cuerpo plano acotado (lámina de grosor despreciable), de forma que su masa total está distribuida en forma conocida siguiendo una función de densidad superficial $\mu = \mu(x, y)$.

Entonces:

$$\text{Masa de } R = M(R) = \iint_R \mu(x,y)\,dx\,dy$$

(1) Centro de masas de un cuerpo plano

Si denotamos por $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del centro de masas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M(R)} \iint_R x\,\mu(x,y)\,dx\,dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{M(R)} \iint_R y\,\mu(x,y)\,dx\,dy$$

(2) Momentos de inercia de un cuerpo plano

Sea r una recta y denotemos por $d(x, y)$ la distancia de la recta r al punto (x, y) de la región R. El momento de inercia del cuerpo plano respecto a la recta r resulta ser:

$$I_r = \iint_R d^2(x,y)\,\mu(x,y)\,dx\,dy$$

En particular, los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados son:

$$I_X = \iint_R y^2 \mu(x,y)\, dx\, dy \qquad\qquad I_Y = \iint_R x^2 \mu(x,y)\, dx\, dy$$

El momento polar de inercia o momento respecto al origen es:

$$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\, \mu(x,y)\, dx\, dy = I_Y + I_X$$

TEMA 1. PROBLEMAS

1.1 Calcular las siguientes integrales dobles, sobre el rectángulo R que se indica.

(a) $\iint_R x\,y\,(x+y)\,dA \qquad R=[0,1]\times[0,1]$

(b) $\iint_R (y+x-3xy^2)\,dA \qquad R=[0,1]\times[1,3]$

(c) $\iint_R \operatorname{sen}^2 x\,\operatorname{sen}^2 y\,dA \qquad R=[0,\pi]\times[0,\pi]$

(d) $\iint_R (x\operatorname{sen} y - y\,e^x)\,dA \qquad R=[-1,1]\times[0,\pi/2]$

1.2 Dibujar la región de integración y calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x\cos(x+y)\,dA$ R triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π)

(b) $\iint_R e^{x+y}\,dA \qquad R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \;/\; |x|+|y|\le 1\}$

(c) $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ R región limitada por la recta $y=x$ y por la parábola $y=x^2$

(d) $\iint_R 2xy\,dA$ R región limitada por las rectas $y=0$, $y=x$, $x+y=2$

(e) $\iint_R x^2y^2\,dA$ R región limitada por las rectas $y=1$, $y=2$, $x=0$, $y=x$

(f) $\iint_R (x^2-y^2)\,dA$ R región limitada por la gráfica de $y=\operatorname{sen} x$ y el segmento $[0,\pi]$ en $y=0$

1.3 Calcular la integral doble

$$\iint_R |y - x^2| \, dA \qquad R = [-1,1] \times [0,2]$$

1.4 Calcular las integrales dobles $\iint_R f(x, y)\, dA$ para las funciones f y los rectángulos R que se indican.

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} x + y & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad R = [0,1] \times [0,1]$$

(b) $$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \qquad R = [-1,1] \times [-1,1]$$

(c) $$f(x,y) = \begin{cases} (x + y)^{-2} & x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad R = [1,2] \times [1,4]$$

1.5 Una pirámide está delimitada por los tres planos de coordenadas y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen.

1.6 Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

1.7 Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$.

1.8 Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros parabólicos $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

1.9 Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $z = 0$.

1.10 Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $y = -x$, $x - y = 2$, $x + y = 2$ y $z = 0$.

1.11 Calcular el volumen del sólido de paredes laterales rectas limitado arriba por la gráfica de $z = f(x, y)$ y abajo por la región R en el plano $z = 0$, en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad R = \{ (x, y) / |x| \leq 1, |y| \leq 1 \}$

(b) $f(x, y) = 3x + y$ $\quad R = \{ (x, y) / 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x > 0, y > 0 \}$

(c) $f(x, y) = y + 2x + 20$ $\quad R = \{ (x, y) / x^2 + y^2 \leq 16 \}$

1.12 Calcular por integración doble el área de los recintos limitados por:

(a) circunferencia de centro (0,a) y radio a.
(b) elipse de semiejes 5 y 4.
(c) triángulo de lados $y = x$, $y = -x$, $x = 2$.

1.13 Calcular el área de la región del plano xy encerrada por la lemniscata cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

1.14 Calcular la integral doble $\iint_R x^2 \, dx \, dy$ donde R es la región del plano xy interior a la cardioide $r = 1 - \cos \theta$.

1.15 En cada uno de los siguientes casos describir la región de integración en coordenadas cartesianas, describirla luego en coordenadas polares y calcular cada integral mediante ese cambio:

(a) $$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$$

(b) $$\int_0^{a} \int_0^{x} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

(c) $$\int_0^{1} \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)^{-1/2} \, dy \, dx$$

(d) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

1.16 Calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ R región acotada de frontera $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

(b) $\displaystyle\iint_R (x^3y+y-x)\,dx\,dy$ R semicírculo derecho de centro (0,0) y radio 1

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{(x^2-y^2)\,x - 2\,y^2\,x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ R primer cuadrante del círculo $x^2+y^2 \le 9$

(d) $\displaystyle\iint_R \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ R región acotada de frontera $r^2 = \cos 2\theta$

1.17 Utilizar una transformación lineal conveniente para calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iint_R (x-y)^2 \operatorname{sen}^2 (x+y)\,dx\,dy$
R paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$

(b) $\displaystyle\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$
R triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x+y=1$

1.18 Dada la transformación: $\left.\begin{array}{l} x = u+v \\ y = v-u^2 \end{array}\right\}$ calcular el área de la región R del plano xy cuya imagen en el plano uv es el triángulo de vértices (0,0), (2,0), (0,2). ¿Cómo viene descrita la región R en el plano xy ?

1.19 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $2z = 1$.

1.20 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

1.21 Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

1.22 Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

1.23 Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ y a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

1.24 Calcular el volumen del sólido interior a las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$.

1.25 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{2x}{a}$ y el plano $x = a$.

1.26 (a) Calcular el valor del área de la superficie plana exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ e interior a la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

(b) Encontrar la masa de esta superficie si su densidad superficial es proporcional a la distancia al origen.

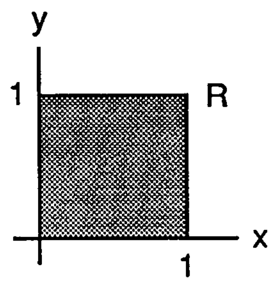
1.27 Calcular las coordenadas del centro de masas de un pétalo de la rosa $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ si su densidad superficial es constante.

1.28 Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados del cuerpo delgado plano de contorno $x^2 + y^2 = 1$ para $y \geq 0$ e $y = 0$, si su función de densidad superficial es $\mu (x, y) = 1 + y$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL TEMA 1

1.1 Calcular las siguientes integrales dobles, sobre el rectángulo R que se indica.

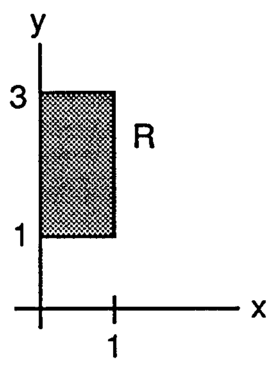
(a) $\iint_R x\,y\,(x+y)\,dA \qquad R = [0,1] \times [0,1]$



$R = [0,1] \times [0,1] \qquad$ Recinto: $\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{array}$

$$\iint_R x\,y\,(x+y)\,dA = \int_0^1 \int_0^1 x\,y\,(x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{3}$$

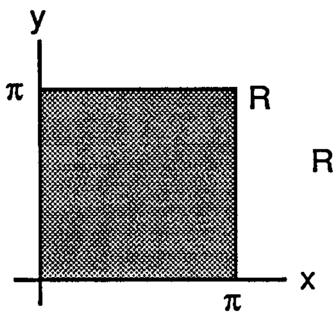
(b) $\iint_R (y + x - 3xy^2)\,dA \qquad R = [0,1] \times [1,3]$



$R = [0,1] \times [1,3] \qquad$ Recinto: $\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 3 \end{array}$

$$\iint_R (y + x - 3xy^2)\,dA = \int_0^1 \int_1^3 (y + x - 3xy^2)\,dy\,dx = -8$$

(c) $\iint_R \text{sen}^2 x\, \text{sen}^2 y\,dA \qquad R = [0,\pi] \times [0,\pi]$

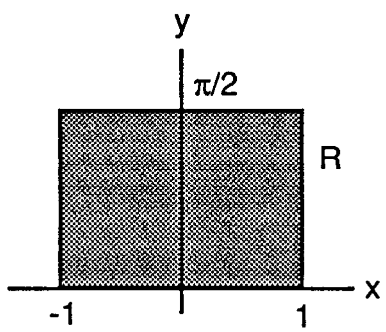


R = [0,π] x [0,π] Recinto: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

$$\iint_R \operatorname{sen}^2 x \, \operatorname{sen}^2 y \, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, \operatorname{sen}^2 y \, dy\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 y \, dy = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2y}{2}\, dy = \frac{\pi^2}{4}$$

(d) $\iint_R (x \operatorname{sen} y - y\, e^x)\, dA$ R = [-1,1] x [0,π/2]



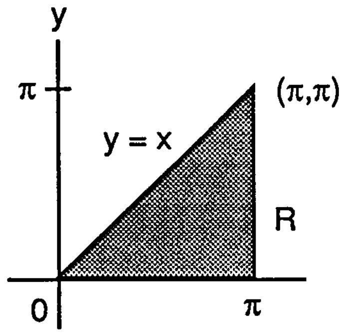
R = [-1,1] x [0,π/2]

Recinto: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi/2$

$$\iint_R (x \operatorname{sen} y - y\, e^x)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \operatorname{sen} y - y\, e^x)\, dy\, dx = \left(\frac{1}{e} - e\right)\frac{\pi^2}{8}$$

1.2 Dibujar la región de integración y calcular las siguientes integrales dobles:

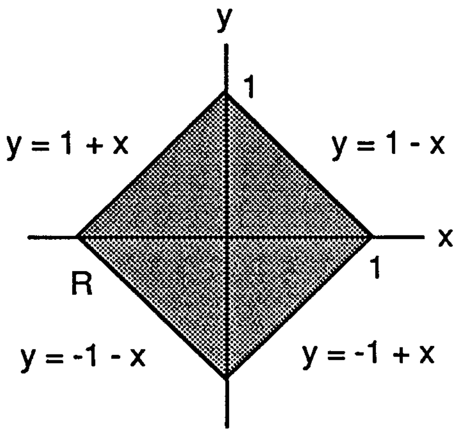
(a) $\iint_R x \cos(x + y)\, dA$ R triángulo de vértices (0,0), (π,0) y (π,π)



Recinto: $\begin{array}{l} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le x \end{array}$

$$\iint_R x \cos(x+y)\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{x} x \cos(x+y)\, dy\, dx = \frac{-3}{2}\pi$$

(b) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\, dA$ $\qquad R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| + |y| \le 1 \}$

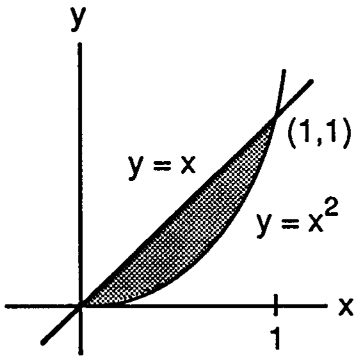


Recinto: $\begin{array}{c} -1 \le x \le 0 \\ -1 - x \le y \le 1 + x \\ \\ 0 \le x \le 1 \\ -1 + x \le y \le 1 - x \end{array}$

$$\iint_R e^{x+y}\, dA = \int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}\, dy\, dx + \int_0^1\int_{-1+x}^{1-x} e^{x+y}\, dy\, dx = e - \frac{1}{e}$$

(c) $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$ $\qquad$ R región limitada por la recta $y = x$

y por la parábola $y = x^2$

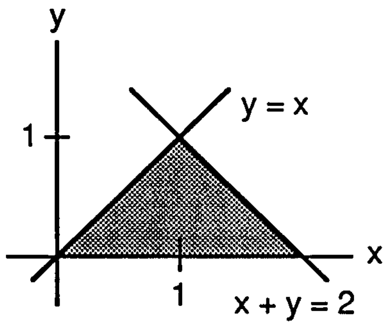


Recinto: $\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{array}$

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{3}{35}$$

(d) $\iint_R 2xy\, dA$ R región limitada por las rectas

$y = 0,\ y = x,\ x + y = 2$

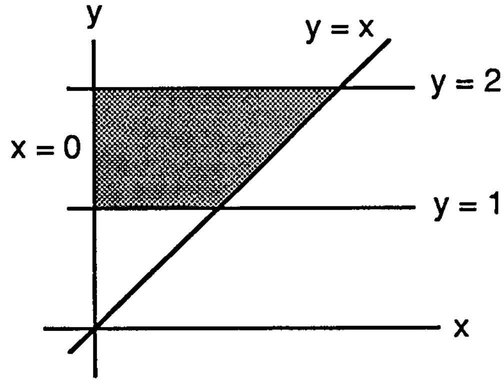


Recinto: $\begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 2 - y \end{array}$

$$\iint_R 2\,xy\, dA = \int_0^1 \int_y^{2-y} 2\,xy\, dx\, dy = \frac{2}{3}$$

(e) $\iint_R x^2 y^2\, dA$ R región limitada por las rectas

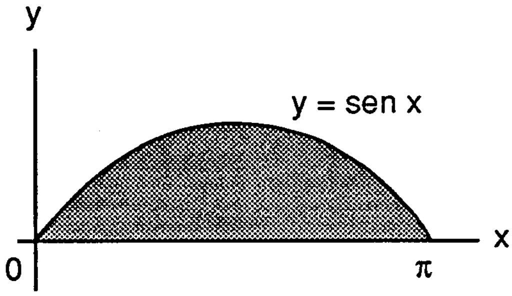
$y = 1,\ y = 2,\ x = 0,\ y = x$



Recinto: $\begin{array}{l} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y \end{array}$

$$\iint_R x^2y^2\,dA = \int_1^2 \int_0^y x^2y^2\,dx\,dy = \frac{63}{18}$$

(f) $\displaystyle\iint_R (x^2 - y^2)\,dA$ R región limitada por la gráfica de $y = \text{sen}\,x$ y el segmento $[0,\pi]$ en $y = 0$



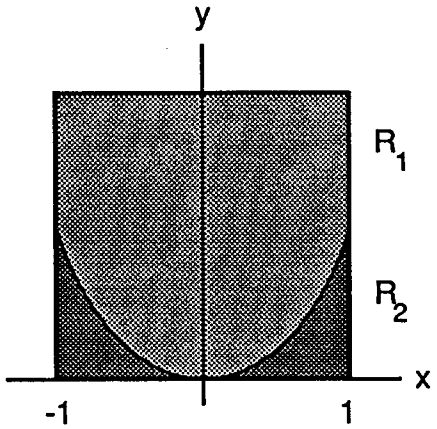
Recinto: $\begin{array}{l} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \text{sen}\,x \end{array}$

$$\iint_R (x^2 - y^2)\,dA = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\,x} (x^2 - y^2)\,dy\,dx = \int_0^\pi \left(x^2\,\text{sen}\,x - \frac{1}{3}\,\text{sen}^3 x\right) dx =$$

$$= \pi^2 - \frac{40}{9}$$

1.3 Calcular la integral doble

$\displaystyle\iint_R |\,y - x^2\,|\,dA$ $R = [-1,1] \times [0,2]$



Recinto R_1 $\quad -1 \leq x \leq 1$, $\quad x^2 \leq y \leq 2$

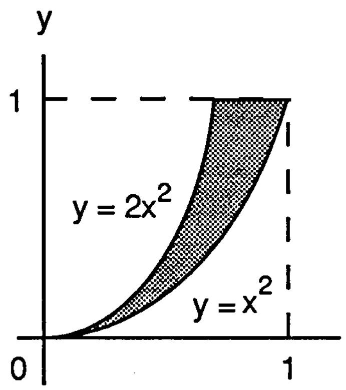
Recinto R_2 $\quad -1 \leq x \leq 1$, $\quad 0 \leq y \leq x^2$

$$\iint_R |y - x^2|\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2} (y - x^2)\, dy\, dx + \int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2} (-y + x^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 2)\, dx = \frac{46}{15}$$

1.4 Calcular las integrales dobles $\iint_R f(x, y)\, dA$ para las funciones f y los rectángulos R que se indican.

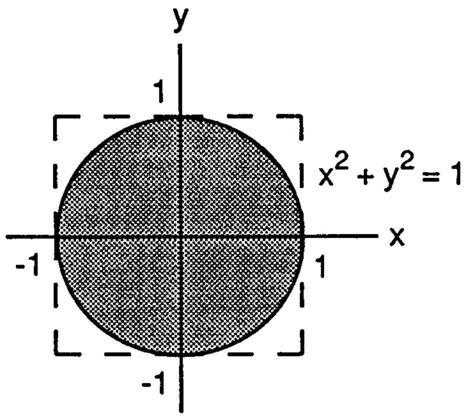
(a) $f(x, y) = \begin{cases} x + y & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ $\qquad R = [0,1] \times [0,1]$



Recinto: $\quad 0 \leq y \leq 1$, $\quad +\sqrt{y/2} \leq x \leq +\sqrt{y}$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{+\sqrt{y/2}}^{+\sqrt{y}} (x+y)\,dx\,dy = \frac{21-8\sqrt{2}}{40}$$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ $\qquad R = [-1,1] \times [-1,1]$



Recinto: $\begin{array}{c} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le +\sqrt{1-x^2} \end{array}$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}x^2\right)\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

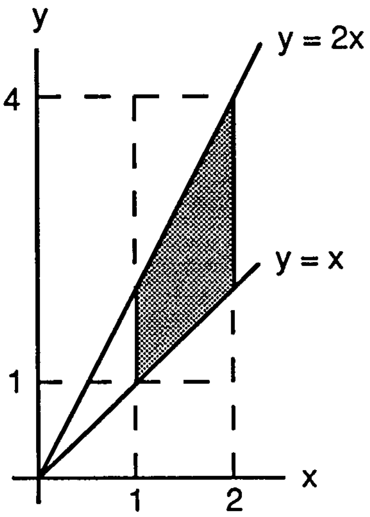
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\,\text{sen}^2 t\right)\sqrt{1-\text{sen}^2 t}\;\cos t\,dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\text{sen}^2 t - \frac{2}{3}\,\text{sen}^4 t\right) dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\right)\right] dt = \frac{\pi}{2}$$

Nota: Esta integral puede efectuarse de forma muy simple mediante un cambio a coordenadas polares.

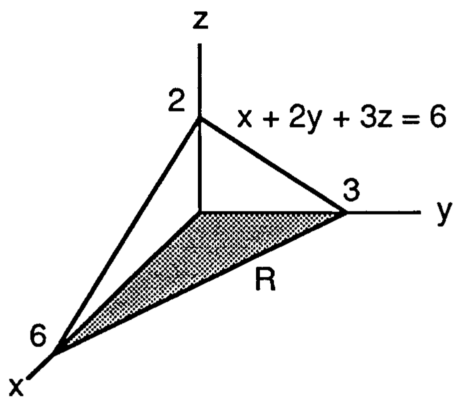
(c) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-2} & x \le y \le 2x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$ $\quad R = [1,2] \times [1,4]$

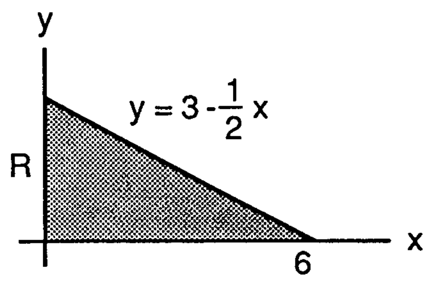


Recinto: $\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2x \end{matrix}$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx = \frac{1}{6}\ln 2$$

1.5 Una pirámide está delimitada por los tres planos de coordenadas y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular su volumen.





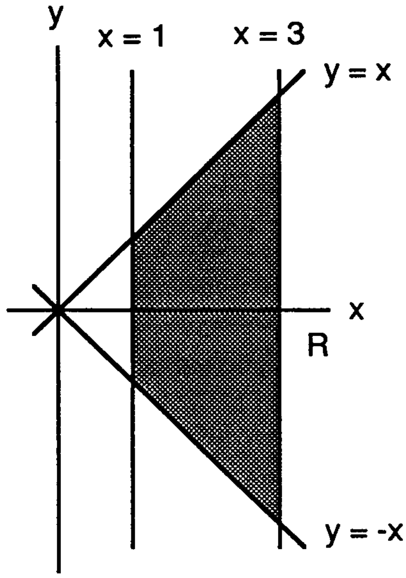
Recinto: $\begin{matrix} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 3 - \frac{1}{2}x \end{matrix}$

$$\text{Vol} = \iint_R z(x,y)\,dx\,dy = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{1}{2}x} \left(2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x\right) dy\,dx = 6$$

1.6 Calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

La superficie $z = x^2 - y^2$ es un paraboloide hiperbólico (reglado); z toma valores positivos y negativos. La intersección de esta superficie con el plano $z = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{son las rectas :} \quad y = \pm x$$

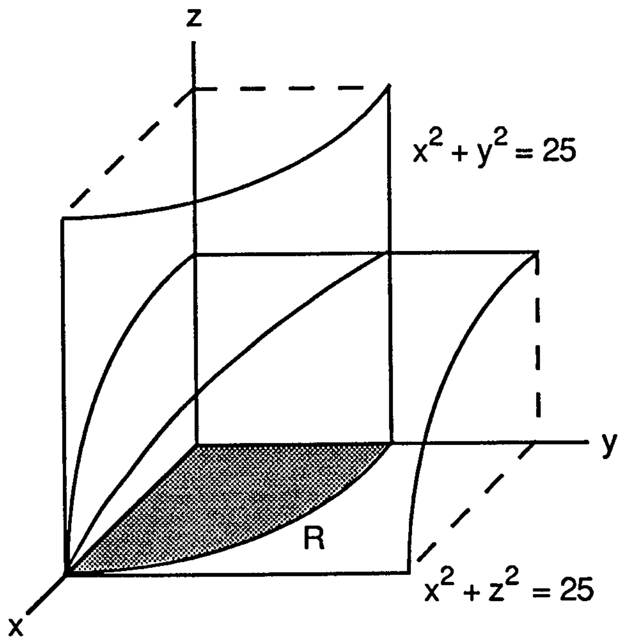


Recinto: $\begin{array}{l} 1 \le x \le 3 \\ -x \le y \le x \end{array}$

En el recinto de integración R la función $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ es positiva. Su integral doble será el volumen bajo la superficie.

$$\text{Vol} = \iint_R (x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_1^3 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx = \frac{80}{3}$$

1.7 Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$.



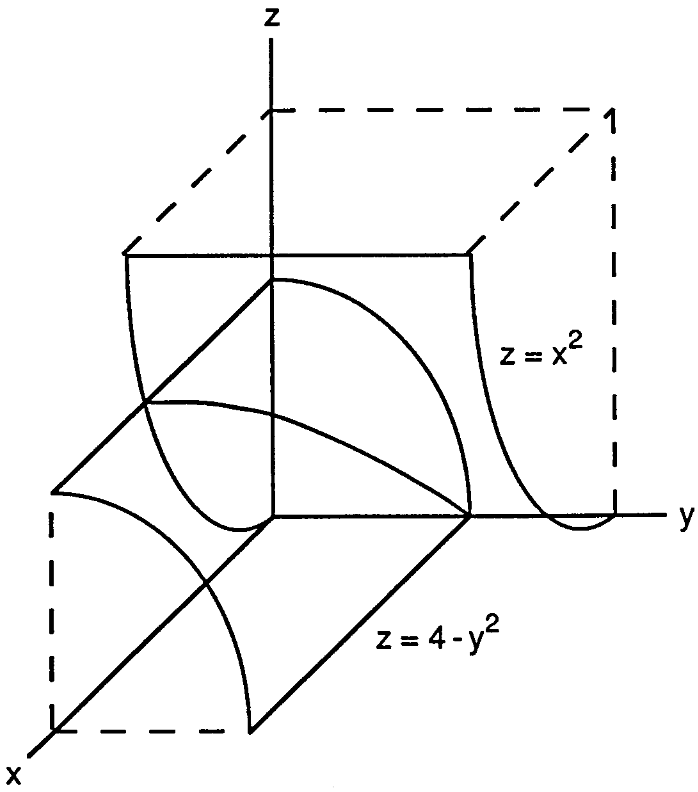
Recinto de integración para el primer octante: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq +\sqrt{25 - x^2}$

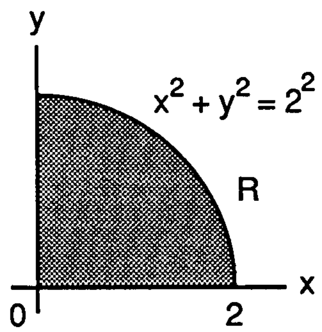
$$Vol = 8\iint_R +\sqrt{25 - x^2}\,dx\,dy = 8\int_0^5 \int_0^{+\sqrt{25-x^2}} +\sqrt{25 - x^2}\,dy\,dx = \frac{2000}{3}$$

1.8 Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros parabólicos $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

Proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambos cilindros parábolicos:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 \\ z = 4 - y^2 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 4$$





Para el primer octante; recinto de integración: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

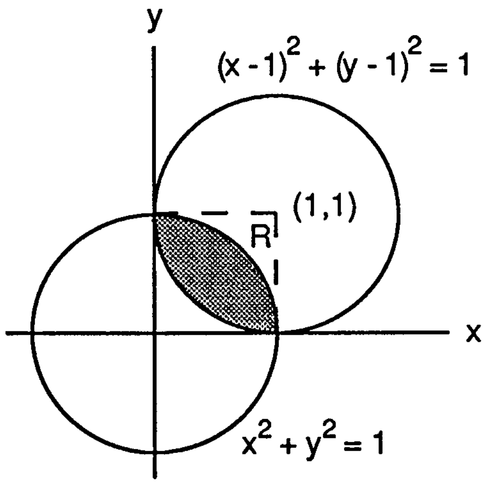
$$\text{Vol} = 4 \iint_R (z_{sup} - z_{inf})\, dx\, dy = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} [(4 - y^2) - x^2]\, dy\, dx =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^2 (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}\, dx = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4\,\text{sen}^2 t)\; 4\cos^2 t\; dt =$$

$$= \frac{128}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\; dt = \frac{128}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\right) dt = 8\pi$$

1.9 Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $z = 0$.

La intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ con el plano $z = 0$ son sendas circunferencias de igual ecuación.



Recinto: $\begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 1 - \sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le +\sqrt{1-x^2} \end{array}$

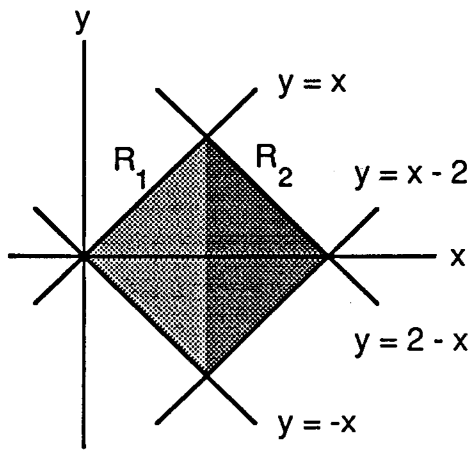
Sobre R la función $z = xy$ es positiva, así pues:

$$\text{Vol} = \iint_R xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-x^2 + x\sqrt{1-(x-1)^2}\, \right] dx =$$

$$= \frac{-1}{3} + \int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \text{sen}\, t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right\} = \frac{-1}{3} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \text{sen}\, t)\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{-1}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

1.10 Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $y = -x$, $x - y = 2$, $x + y = 2$ y $z = 0$.



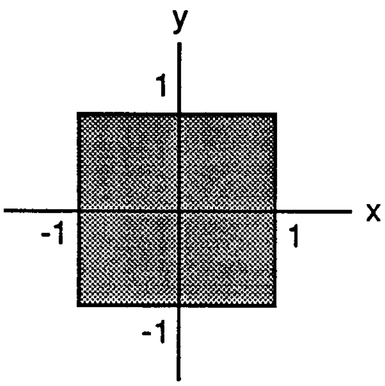
Recinto R_1 $\quad \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ -x \le y \le x \end{array}$

Recinto R_2 $\quad \begin{array}{c} 1 \le x \le 2 \\ x - 2 \le y \le 2 - x \end{array}$

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-x}^{x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_{x-2}^{2-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{8}{3}$$

1.11 Calcular el volumen del sólido de paredes laterales rectas limitado arriba por la gráfica de $z = f(x, y)$ y abajo por la región R en el plano $z = 0$, en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad R = \{ (x, y) / |x| \leq 1, |y| \leq 1 \}$

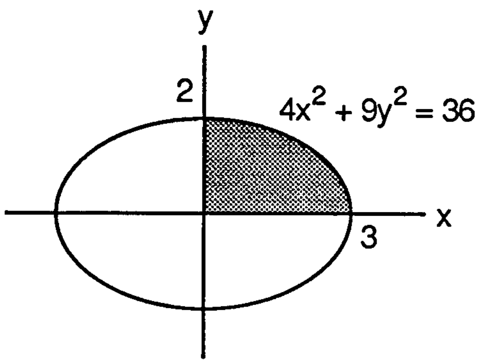


Recinto: $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$|y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{8}{3}$$

(b) $f(x, y) = 3x + y$ $\quad R = \{ (x, y) / 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x > 0, y > 0 \}$

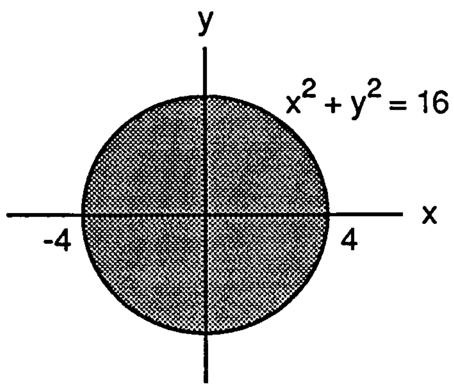


Recinto: $0 \leq x \leq 3$

$0 \leq y \leq \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}$

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}} (3x + y)\, dy\, dx = 22$$

(c) $f(x, y) = y + 2x + 20$ $\quad R = \{ (x, y) / x^2 + y^2 \leq 16 \}$

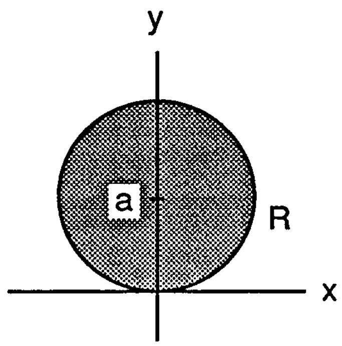


Recinto: $\begin{array}{c} -4 \le x \le 4 \\ -\sqrt{16-x^2} \le y \le +\sqrt{16-x^2} \end{array}$

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{+\sqrt{16-x^2}} (y + 2x + 20)\, dy\, dx = 320\, \pi$$

1.12 Calcular por integración doble el área de los recintos limitados por:

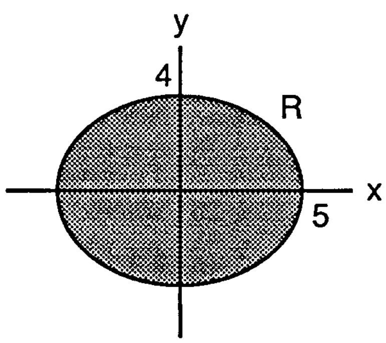
(a) circunferencia de centro (0,a) y radio a.



Recinto: $x^2 + (y - a)^2 \le a^2$

$$\text{Area} = \iint_R 1\, dx\, dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y - a = r \operatorname{sen} \theta \\ J(r, \theta) = r \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r\, dr\, d\theta = \pi\, a^2$$

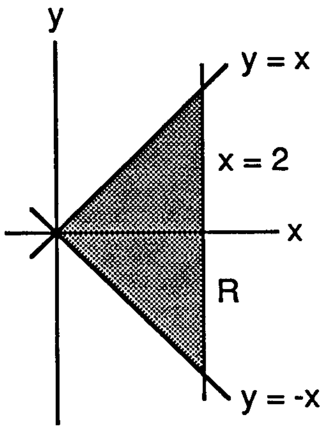
(b) elipse de semiejes 5 y 4.



Recinto: $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} \le 1$

$$\text{Area} = \iint_R 1\, dx\, dy = \left\{ \begin{array}{l} x = 5\, r \cos\theta \\ y = 4\, r \operatorname{sen}\theta \\ J(r,\theta) = 20\, r \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 20\, r\, dr\, d\theta = 20\,\pi$$

(c) triángulo de lados $y = x$, $y = -x$, $x = 2$

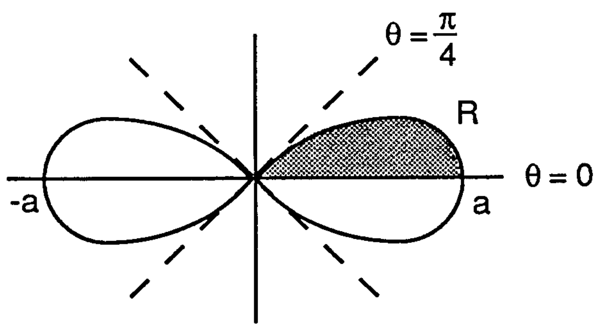


Recinto: $0 \le x \le 2$, $-x \le y \le x$

$$\text{Area} = \iint_R 1\, dx\, dy = \int_0^2\int_{-x}^{x} dy\, dx = 4$$

1.13 Calcular el área de la región del plano xy encerrada por la lemniscata cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

En $[0, 2\pi]$ la lemniscata está definida en los intervalos $[0, \pi/4]$, $[3\pi/4, 5\pi/4]$ y $[7\pi/4, 2\pi]$, es decir, allí donde $\cos 2\theta \ge 0$



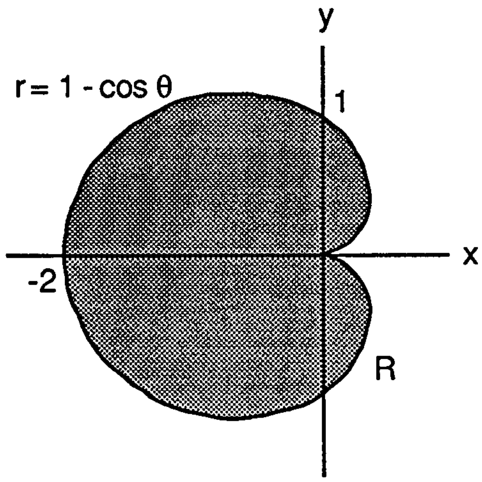
Descripción de R:

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\theta}$

$$\text{Area} = 4\iint_R 1\, dx\, dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ J(r,\theta) = r \end{array} \right\} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = a^2$$

1.14 Calcular la integral doble $\iint\limits_R x^2\,dx\,dy$ donde R es la región del plano xy interior a la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.



Descripción de R:

$0 \le \theta \le 2\pi$
$0 \le r \le 1 - \cos\theta$

$$\iint\limits_R x^2\,dx\,dy = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ J(r,\theta) = r \end{array}\right\} = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^2\cos^2\theta \;\; r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,(1-\cos\theta)^4\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (-4\cos^3\theta - 4\cos^5\theta)\,d\theta +$$

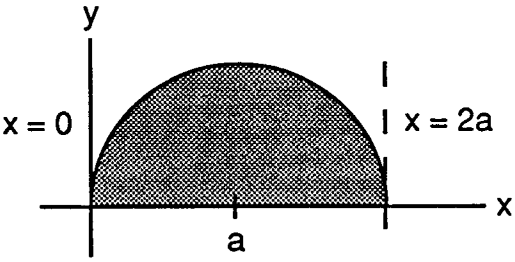
$$+ \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + 6\cos^4\theta + \cos^6\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\,0 + \frac{1}{4}\,2\pi\,\frac{49}{16} = \frac{49\,\pi}{32}$$

1.15 En cada uno de los siguientes casos describir la región de integración en coordenadas cartesianas, describirla luego en coordenadas polares y calcular cada integral mediante ese cambio:

(a) $\displaystyle\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

Recinto en cartesianas
$$0 \le x \le 2a$$
$$0 \le y \le \sqrt{2ax - x^2}$$

Frontera: $y = \sqrt{2ax - x^2}$ $\qquad (x - a)^2 + y^2 = a^2$



Coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

$$J(r, \theta) = r$$

Transformación de las fronteras:

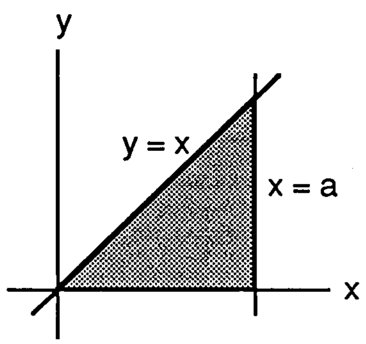
$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \;\rightarrow\; r = 2a\cos\theta$$
$$y = 0 \;\rightarrow\; \theta = 0 \qquad \text{(1er. cuadrante)}$$
$$x = 0 \;\rightarrow\; \theta = \pi/2 \qquad \text{(1er. cuadrante)}$$

Recinto en polares: $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le r \le 2a\cos\theta$

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{3}{4}\pi a^4$$

(b) $\displaystyle\int_0^a\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\;dy\,dx$

Recinto en cartesianas: $\quad 0 \le x \le a$, $\quad 0 \le y \le x$



Coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

$$J(r, \theta) = r$$

Transformación de las fronteras:

$y = x \quad \rightarrow \quad r \operatorname{sen} \theta = r \cos \theta \,; \quad \theta = \frac{\pi}{4}$ (1er. cuadrante)

$y = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 0$ (1er. cuadrante)

$x = a \quad \rightarrow \quad r \cos \theta = a \,; \quad r = \frac{a}{\cos \theta}$

Recinto en polares: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le \frac{a}{\cos \theta}$

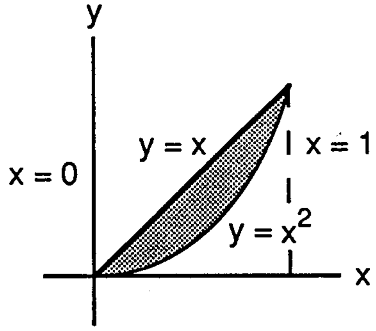
$$\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r \quad r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{3} \frac{1}{\cos^3\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)^2}\, d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{(1 - t^2)^2} =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1/4}{(1+t)^2} + \frac{1/4}{1+t} + \frac{1/4}{(1-t)^2} + \frac{1/4}{1-t}\right] dt = \frac{a^3}{3} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-1/2}\, dy\, dx$

Recinto en cartesianas: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$



Coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{array}\right\}$$

$J(r, \theta) = r$

Transformación de las fronteras:

$y = x \quad \rightarrow \quad r \,\text{sen}\, \theta = r \cos \theta \,; \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \quad$ (1er. cuadrante)

$y = x^2 \quad \rightarrow \quad r \,\text{sen}\, \theta = r^2 \cos^2\theta \,; \qquad r = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

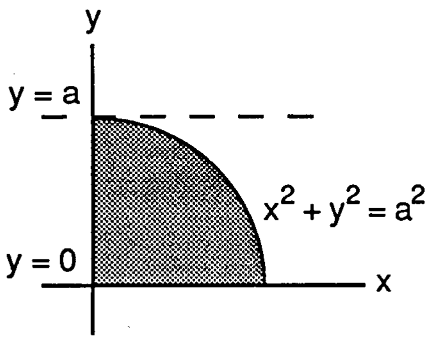
Recinto en polares: $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $\quad 0 \le r \le \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}} \frac{1}{r}\, r\, dr\, d\theta = \sqrt{2} - 1$$

(d) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dx\, dy$

Recinto en cartesianas : $\quad 0 \le y \le a$, $\quad 0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$

Frontera: $\quad x = \sqrt{a^2 - y^2} \qquad x^2 + y^2 = a^2$



Coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

$J(r, \theta) = r$

Transformación de las fronteras:

$x^2 + y^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad r = a$

$y = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 0 \quad$ (1er. cuadrante)

$x = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad$ (1er. cuadrante)

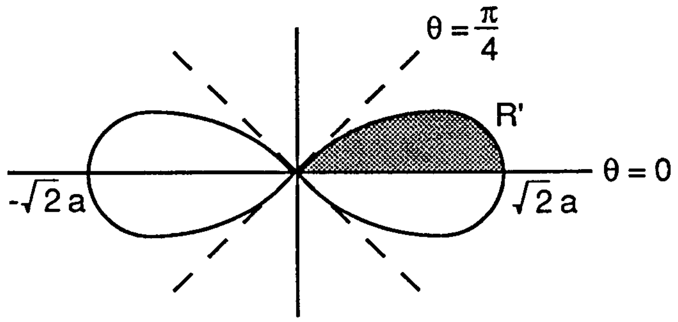
Recinto en polares: $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le r \le a$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{8}\, a^4$$

1.16 Calcular las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ R región acotada de frontera $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

En $[0, 2\pi]$, la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ está definida en los intervalos $[0, \pi/4]$, $[3\pi/4, 5\pi/4]$, $[7\pi/4, 2\pi]$, es decir, allí donde $\cos 2\theta \geq 0$.



Descripción de R':

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

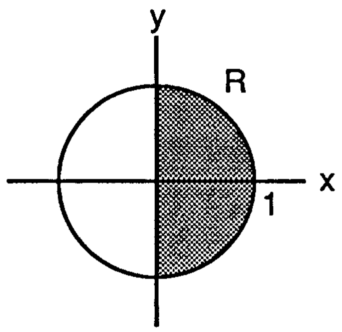
$0 \leq r \leq \sqrt{2}\, a \sqrt{\cos 2\theta}$

Dada la simetría de la función sobre el dominio y por la simetria del dominio consideraremos sólo la integral sobre R':

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = 4\iint_{R'} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ J(r,\theta) = r \end{array}\right\} =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}\, a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi\, a^4}{2}$$

(b) $\iint_R (x^3 y + y - x)\,dx\,dy$ R semicírculo derecho de centro (0,0) y radio 1



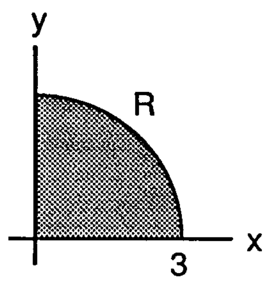
Recinto en polares:

$$0 \le r \le 1$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_R (x^3 y + y - x)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^3 \cos\theta \;\; r \operatorname{sen}\theta + r \operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\; r\, d\theta\, dr = \frac{-2}{3}$$

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{(x^2 - y^2)\,x - 2\,y^2\,x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$ R primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \le 9$



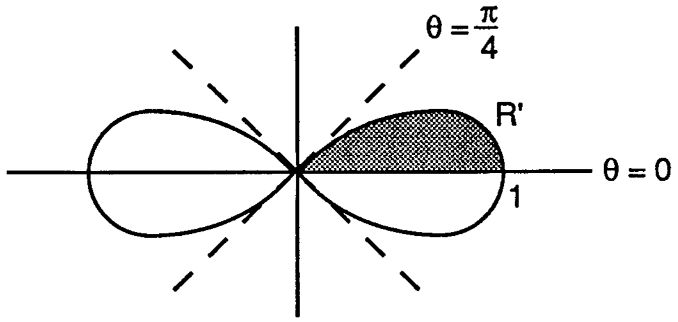
Recinto en polares:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$
$$0 \le r \le 3$$

$$\iint_R \frac{(x^2 - y^2)\,x - 2y^2 x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \frac{r^3(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta - 2r^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta}{r^2}\; r\, dr\, d\theta = -3$$

(d) $\displaystyle\iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2}\; dx\, dy$ R región acotada de frontera $r^2 = \cos 2\theta$



Descripción de R':

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$0 \le r \le \sqrt{\cos 2\theta}$

$$\iint_R \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \sqrt{1+r^2}\; r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\,(1+\cos 2\theta)^{3/2}-1\,]\,d\theta = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\,(2\cos^2\theta)^{3/2}-1\,]\,d\theta = \frac{20}{9}-\frac{\pi}{3}$$

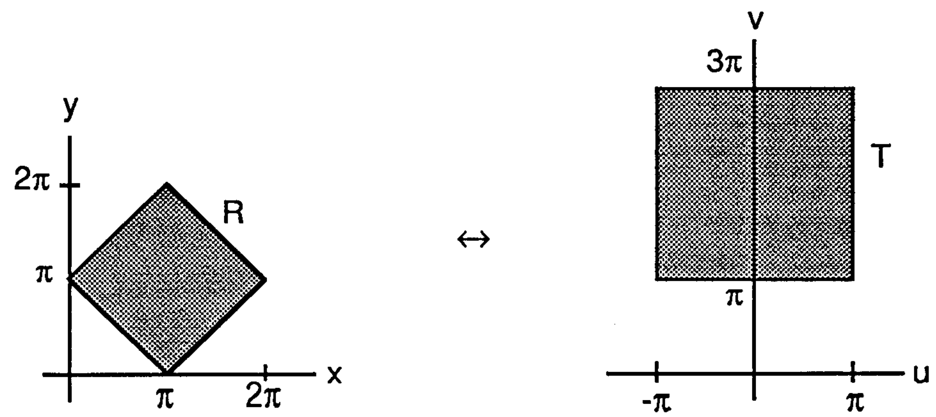
1.17 Utilizar una transformación lineal conveniente para calcular las siguientes integrales:

(a) $\iint_R (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\,dx\,dy$

R paralelogramo de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$

Consideremos la transformación $\left.\begin{array}{l} u = x - y \\ v = x + y \end{array}\right\}$ de donde:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{-1}{2}u + \frac{1}{2}v \end{array}\right\} \qquad J(u,v) = \frac{1}{2}$$



Transformación de las fronteras:

$$\begin{array}{lcl} y = x - \pi & \leftrightarrow & u = \pi \\ y = -x + 3\pi & \leftrightarrow & v = 3\pi \\ y = x + \pi & \leftrightarrow & u = -\pi \\ y = -x + \pi & \leftrightarrow & v = \pi \end{array}$$

Descripción del dominio T en el plano uv: $\begin{array}{l} -\pi \leq u \leq \pi \\ \pi \leq v \leq 3\pi \end{array}$

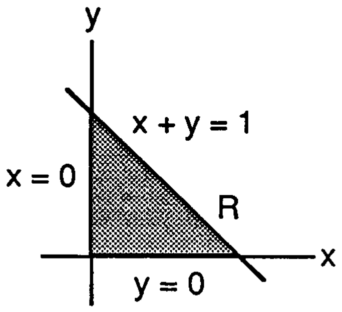
$$\iint_R (x - y)^2 \operatorname{sen}^2(x + y)\, dx\, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} u^2 \operatorname{sen}^2 v \, \frac{1}{2}\, dv\, du = \frac{\pi^4}{3}$$

(b) $\displaystyle\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, dy$

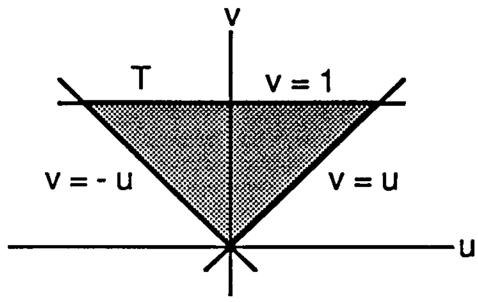
R triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$

Consideremos la transformación $\left.\begin{array}{l} u = y - x \\ v = y + x \end{array}\right\}$ de donde:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{2} u + \dfrac{1}{2} v \\ y = \dfrac{1}{2} u + \dfrac{1}{2} v \end{array}\right\} \qquad J(u, v) = \frac{-1}{2}$$



$\leftrightarrow$



Transformación de las fronteras:

$$\begin{array}{rcl} x = 0 & \leftrightarrow & v = u \\ y = 0 & \leftrightarrow & v = -u \\ x + y = 1 & \leftrightarrow & v = 1 \end{array}$$

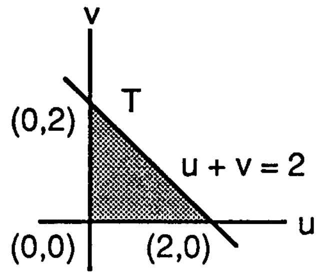
Descripción del dominio T en el plano uv: $\begin{array}{l} 0 \leq v \leq 1 \\ -v \leq u \leq v \end{array}$

$$\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy = \iint_T e^{\frac{u}{v}}\,\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\,e^{\frac{u}{v}}\,\right]_v^v dv = \frac{1}{4}\,(e - \frac{1}{e})$$

1.18 Dada la transformación: $\left.\begin{array}{l} x = u + v \\ y = v - u^2 \end{array}\right\}$ calcular el área de la región R del plano xy cuya imagen en el plano uv es el triángulo de vértices (0,0), (2,0), (0,2). ¿Cómo viene descrita la región R en el plano xy ?

Es un ejemplo de transformación no lineal; J (u, v) = 1 + 2u



Recinto en el plano uv:

$0 \le u \le 2$

$0 \le v \le 2 - u$

$$\text{Area (R)} = \iint_R 1\,dx\,dy = \iint_T 1\,(1 + 2u)\,du\,dv = \int_0^2\int_0^{2-u} (1 + 2u)\,dv\,du = \frac{14}{3}$$

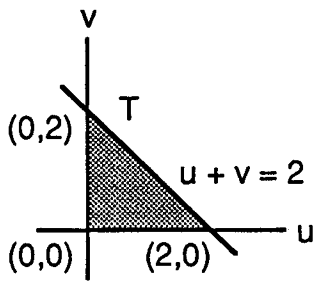
Descripción de la región R en el plano xy; transformación de las fronteras:

$$v = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x = u \\ y = -u^2 \end{array}\right\} \quad y = -x^2$$

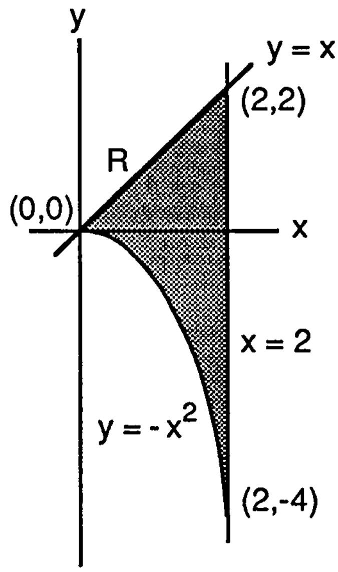
$$u = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x = v \\ y = v \end{array}\right\} \quad y = x$$

$$u + v = 2 \quad \leftrightarrow \quad x = 2$$

es decir:



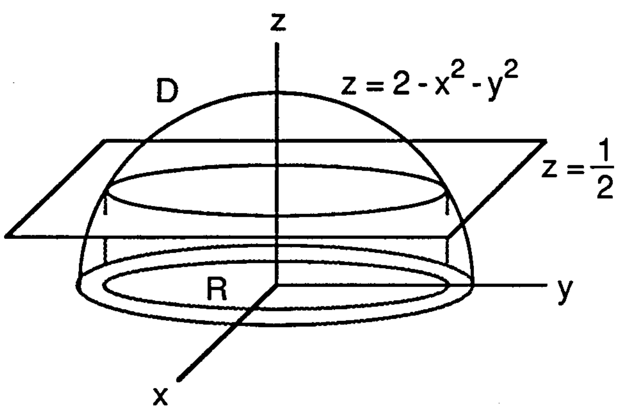
$\leftrightarrow$

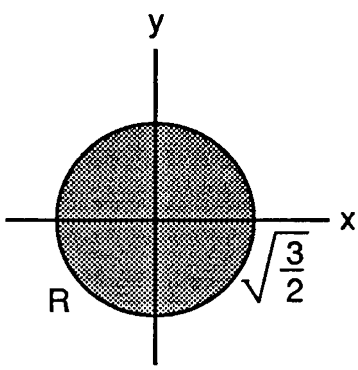


El cálculo directo del área de R en el plano xy sería:

$$\text{Area (R)} = \int_0^2 \int_{-x^2}^{x} 1\, dy\, dx = \frac{14}{3}$$

1.19 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y el plano $2z = 1$





Proyección de la curva intersección:

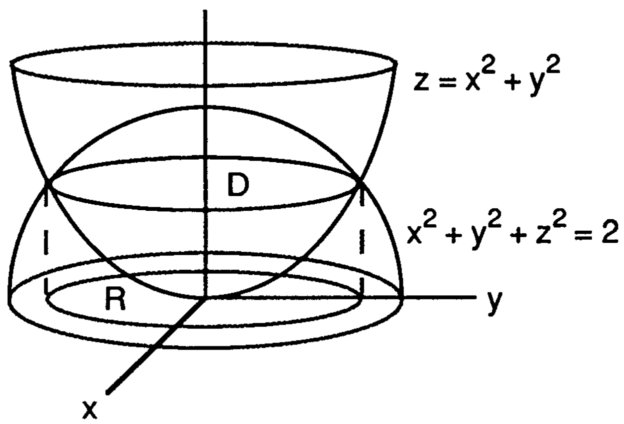
$$\left.\begin{array}{l} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

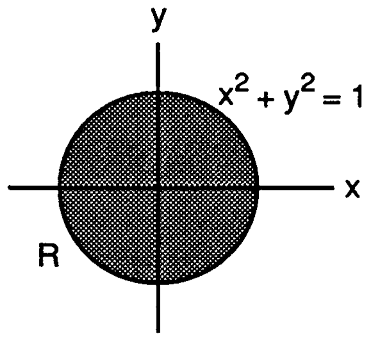
Descripción de R en polares: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{3/2} \end{array}$

$$\text{Vol (D)} = \iint_R (2 - x^2 - y^2 - \frac{1}{2})\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3/2}} (2 - r^2 - \frac{1}{2})\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{4} r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3/2}} = \frac{9}{8}\pi$$

1.20 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.





Proyección de la curva intersección:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \quad z + z^2 = 2 \qquad z^2 + z - 2 = 0$$

Solución válida: $z = 1$

La curva intersección está contenida en el plano $z = 1$; su proyección en el plano xy es:

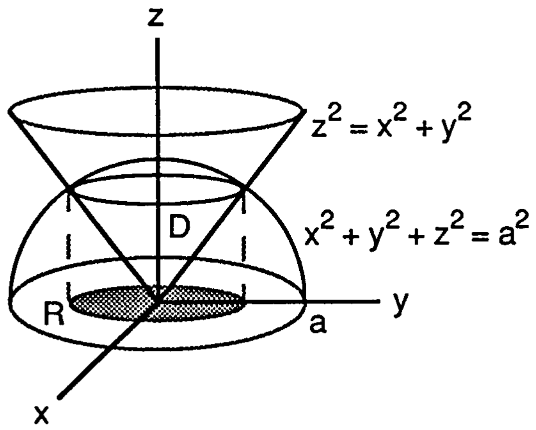
$$x^2 + y^2 = 1$$

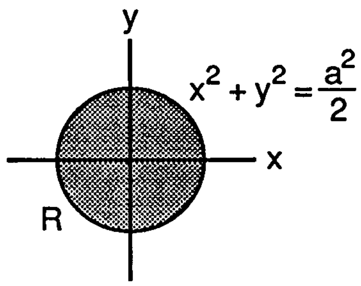
Descripción de R en polares: $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array}$

$$\text{Vol (D)} = \iint_R [\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)]\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\sqrt{2 - r^2} - r^2]\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{(2 - r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\, \pi$$

1.21 Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.





Proyección de la curva intersección:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = a^2 \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$$

Descripción de R en polares: $\quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2} a \end{array}$

$$\text{Vol (D)} = \iint_R \left[\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dx\, dy =$$

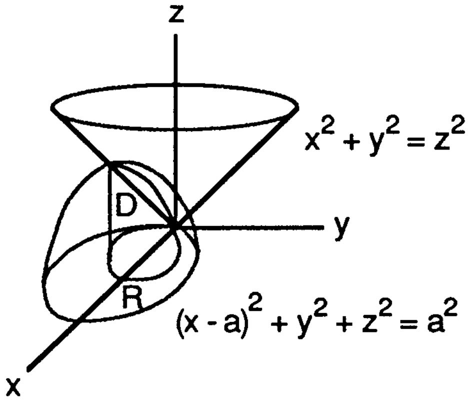
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}\, a/2} \left[\sqrt{a^2 - r^2} - r \right] r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[-\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}\, a/2} =$$

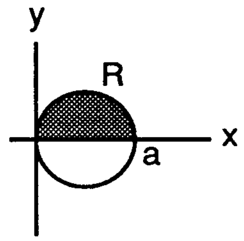
$$= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \pi a^3$$

1.22 Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

Proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambas superficies:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=z^2 \\ (x-a)^2+y^2+z^2=a^2 \end{array}\right\} \quad (x-a)^2+y^2+x^2+y^2=a^2 \qquad (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$$





Por la simetría de la figura consideraremos R como el semicírculo superior de centro (a/2, 0) y radio a/2. Su descripción en cartesianas es:

$$0 \leq x \leq a$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{(\frac{a}{2})^2-(x-\frac{a}{2})^2}$$

entonces:

$$\text{Vol (D)} = 2\iint_R \left(\sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

Separando en dos integrales:

$$I_1 = \iint_R \sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}\ dx\,dy$$

Tomando polares descentradas: $\left.\begin{array}{l} x-a = r\cos\theta \\ y \quad\ = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $\quad J(r,\theta)=r$

$$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 \quad \rightarrow \quad r=-a\cos\theta$$

luego R se describe como : $\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq -a\cos\theta \end{array}$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{-a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\,dr\,d\theta = \frac{-1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{-a\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{-1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\,(a^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2} - a^3\,]\,d\theta = \frac{-a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\operatorname{sen}^3\theta - 1)\,d\theta =$$

$$= \frac{-a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\,(1 - \cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta - 1]\,d\theta = \frac{-a^3}{3}\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} + \theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{-2}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_2 = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

Con el cambio a polares: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$ $J(r,\theta) = r$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad r = a\cos\theta$$

luego R se describe como : $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le a\cos\theta \end{array}$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{a^3}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2a^3}{9}$$

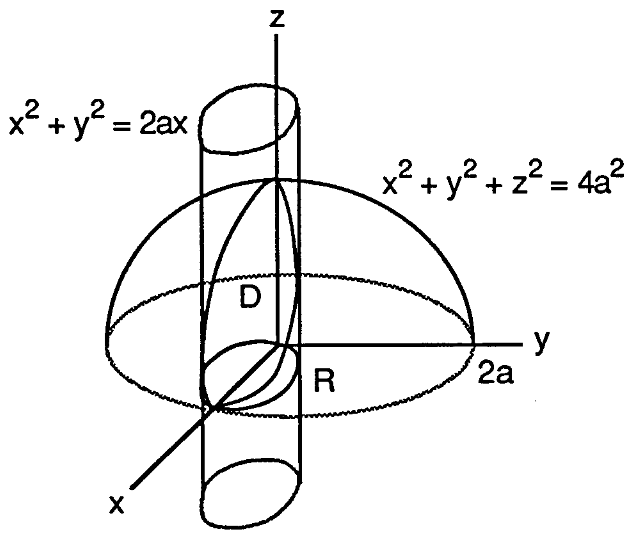
Por lo tanto:

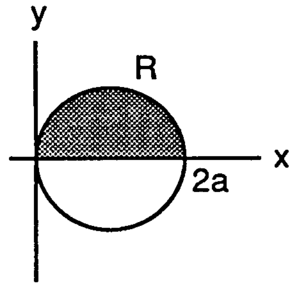
$$\text{Vol}(D) = 2(I_1 - I_2) = 2\left[\frac{a^3}{3}\left(\frac{-2}{3} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2a^3}{9}\right] = \frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right)$$

1.23 Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ y a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

Cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$; $(x - a)^2 + y^2 = a^2$

La proyección de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ es la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = a^2$





Por la simetria del dominio de integración y del integrando y dado que en el dibujo se considera sólo $z \geq 0$ quedará:

$$\mathrm{Vol}(D) = 4 \iint_R \sqrt{(2a)^2 - x^2 - y^2}\; dx\, dy$$

En coordenadas polares $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad r = 2a\cos\theta$$

luego R se describe como : $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta \end{array}$

$$\mathrm{Vol}(D) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\; r\, dr\, d\theta =$$

$$= -2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(4a^2 - r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{2a\cos\theta} d\theta = \frac{-32\, a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}^3\theta - 1)\, d\theta =$$

$$= \frac{-32\, a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,(1 - \cos^2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - 1\,]\; d\theta = \frac{32}{3} a^3 \left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} + \theta \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{32}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

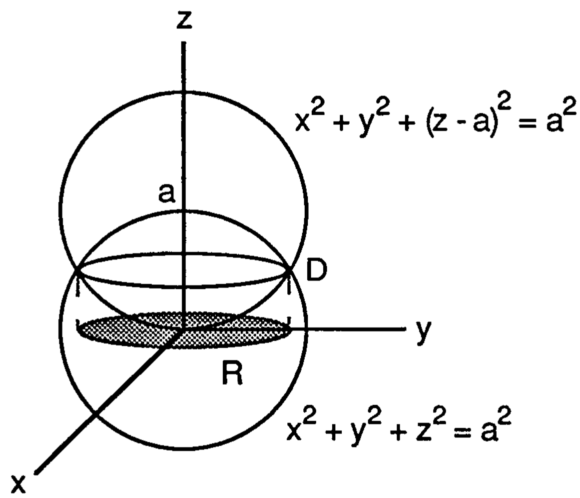
1.24 Calcular el volumen del sólido interior a las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$.

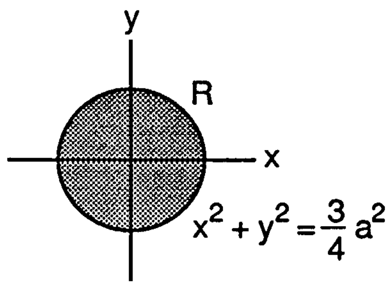
Proyección sobre el plano xy de la curva intersección de ambas esferas:

$$\left. \begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \end{array} \right\} \qquad z = + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$x^2 + y^2 + \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - a \right)^2 = a^2 \quad ; \quad a^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = 0$$

$$a^2 - x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4} \quad ; \quad x^2 + y^2 = \frac{3}{4} a^2$$





Casquete superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $\qquad z = + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

Casquete inferior de $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$: $\qquad z = a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$\text{Vol (D)} = \iint_R \left[\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \left(a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \right] dx\,dy$$

En coordenadas polares $\qquad \left. \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} \quad J(r, \theta) = r$

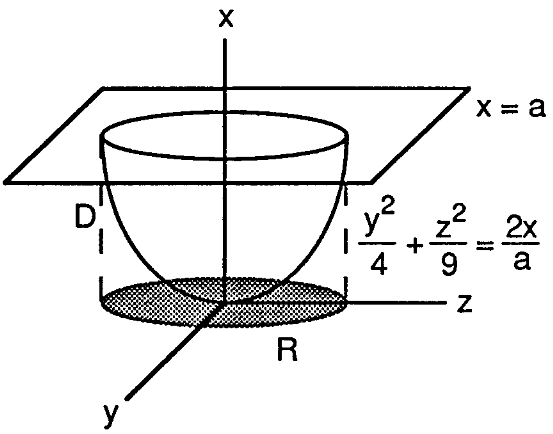
R se describe como : $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2}\,a \end{array}$

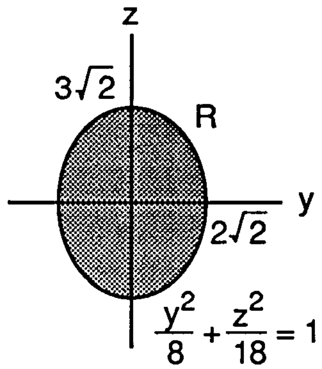
$$\mathrm{Vol}\,(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(2\sqrt{a^2 - r^2} - a \right) r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{a}{2}\,r^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{5}{12}\,\pi\,a^3$$

1.25 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{2x}{a}$ y el plano $x = a$.

Efectuaremos la integración sobre el plano yz considerando las funciones en la forma $x = f\,(y, z)$.





Proyección sobre el plano yz de la curva intersección de ambas superficies:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{2\,x}{a} \\ x = a \end{array}\right\} \qquad \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 2 \qquad \frac{y^2}{(\sqrt{8}\,)^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{18}\,)^2} = 1$$

es una elipse de semiejes $\sqrt{8}$ y $\sqrt{18}$

Consideramos coordenadas elípticas: $\left.\begin{array}{l} y = 2\sqrt{2}\ \ r\cos\theta \\ z = 3\sqrt{2}\ \ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $\quad J\,(r, \theta) = 12\,r$

El recinto de integración R se describirá en la forma $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

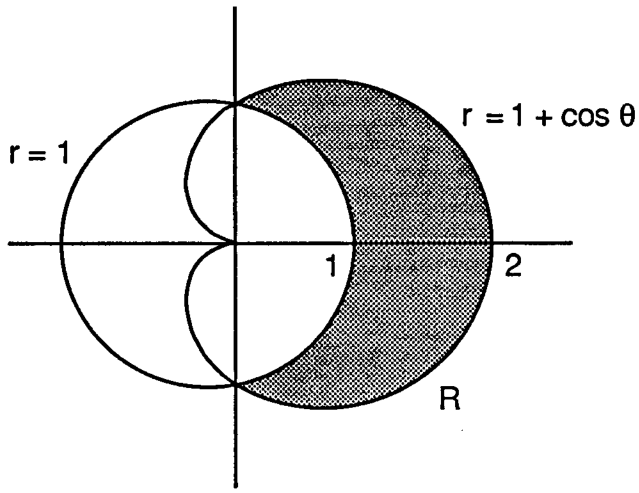
entonces:

$$\text{Vol (D)} = \iint_R \left[a - \frac{a}{2} \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \right) \right] dy\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (a - a\,r^2)\, 12\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 12\, a\, (r - r^3)\, dr =$$

$$= 24\, a\, \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 6\, a\, \pi$$

1.26 (a) Calcular el valor del área de la superficie plana exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ e interior a la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.



Descripción de las fronteras en polares: $r = 1$; $r = 1 + \cos\theta$

Intersección: $\cos\theta = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}$

Recinto en polares: $\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \le r \le 1 + \cos\theta \end{array}$

$$\text{Area (R)} = \iint_R 1\, dx\, dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos\theta} r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,(1+\cos\theta)^2 - 1\,]\, d\theta = \frac{8+\pi}{4}$$

(b) Encontrar la masa de esta superficie si su densidad superficial es proporcional a la distancia al origen.

$$M(R) = \text{Masa de } R = \iint_R \mu(x,y)\,dx\,dy$$

$\mu(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad k \in IR$; en polares: $\mu(r,\theta) = k\,r$ $\quad k \in IR$

$$M(R) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos\theta} k\,r\;r\,dr\,d\theta = \frac{2k}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,(1+\cos\theta)^3 - 1\,]\,d\theta =$$

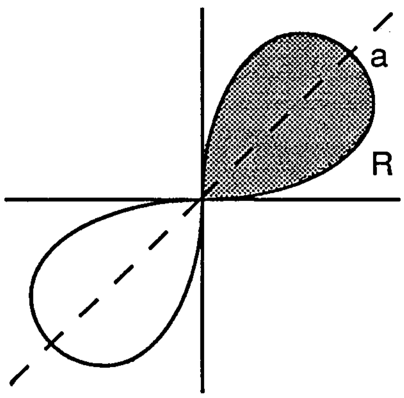
$$= \frac{2k}{3}\left(\frac{11}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

1.27 Calcular las coordenadas del centro de masas de un pétalo de la rosa $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ si su densidad superficial es constante.

$r = a \operatorname{sen} 2\theta$ está definida para $\operatorname{sen} 2\theta \geq 0$ si $a > 0$, es decir:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{en } [0, 2\pi]$$

Consideraremos el pétalo del primer cuadrante; R será en polares:



$0 \leq \theta \leq \pi/2$
$0 \leq r \leq a \operatorname{sen} 2\theta$

$$\text{Masa de R} = M(R) = \iint_R \mu(x,y)\,dx\,dy = \iint_R k\,dx\,dy$$

$$M(R) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{a\,\text{sen}\,2\theta} k\,r\,dr\,d\theta = \frac{ka^2}{2}\int_0 \text{sen}^2 2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{ka^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \frac{ka^2\pi}{8}$$

Denotando por $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del centro de masas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M(R)}\iint_R x\,\mu(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_R x\,\mu(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{a\,\text{sen}\,2\theta} (r\cos\theta)\;k\;r\;dr\,d\theta =$$

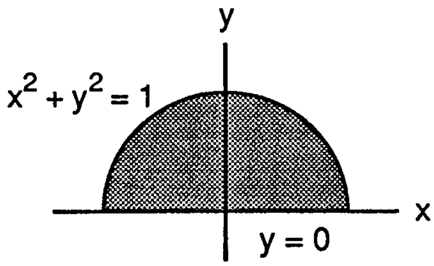
$$= \frac{ka^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\;\text{sen}^3 2\theta\,d\theta = \frac{8\,k\,a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\;\text{sen}^3\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{8\,ka^3}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^6\theta - \cos^4\theta)(-\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta = \frac{8\,ka^3}{3}\left[\frac{-1}{7}+\frac{1}{5}\right] = \frac{16}{105}\,k\,a^3$$

de donde $\quad \bar{x} = \dfrac{1}{\dfrac{ka^2\pi}{8}}\,\dfrac{16}{105}\,ka^3 = \dfrac{128}{105}\,\dfrac{a}{\pi}$

y por simetría $\quad \bar{y} = \bar{x} = \dfrac{128}{105}\,\dfrac{a}{\pi}$

1.28 Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados del cuerpo delgado plano de contorno $x^2 + y^2 = 1$ para $y \geq 0$ e $y = 0$, si su función de densidad superficial es $\mu(x, y) = 1 + y$.



Descripción de R en polares:

$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le r \le 1$$

$$I_y = \iint_R x^2 \mu(x, y)\, dx\, dy = \iint_R x^2 (1 + y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2\theta\, (1 + r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 (r^3 \cos^2\theta + r^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} [\frac{1}{4} \cos^2\theta + \frac{1}{5} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta]\, d\theta =$$

$$= \left[\frac{1}{8}\theta + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{15} \cos^3\theta \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{15}$$

$$I_x = \iint_R y^2 (1 + y)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, (1 + r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 (r^3 \operatorname{sen}^2\theta + r^4 \operatorname{sen}^3\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} [\frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{5} \operatorname{sen}^3\theta]\, d\theta =$$

$$= \left[\frac{1}{8}\theta - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{5} \cos\theta + \frac{1}{15} \cos^3\theta \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8} + \frac{4}{15}$$