



POLITÉCNICA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial  
Universidad Politécnica de Madrid

## INTRODUCCIÓN A LA TÉCNICA DE BOND-GRAPH

**Prof. Dr. José A. Lozano Ruiz**

Universidad Politécnica de Madrid

E.T.S. de Ingeniería y Diseño Industrial

Departamento de Ingeniería Mecánica, Química y Diseño Industrial

E-mail: [joseantonio.lozano@upm.es](mailto:joseantonio.lozano@upm.es)

*Palabras clave:*

Bond-Graph, simulación, mecánica, dinámica, vehículos, automóviles.

*Objetivos:*

El objetivo de este curso o seminario es dar una visión general del uso de la técnica de simulación de sistemas dinámicos Bond-Graph, aplicada al caso particular de la simulación de mecanismos y vehículos automóviles.

Este objetivo general, por razones docentes se particulariza en los siguientes objetivos concretos:

- a) Introducción teórica a los conceptos básicos utilizados en la técnica de simulación de sistemas dinámicos Bond-Graph. Se centrará la atención en los conceptos utilizados para la simulación de la dinámica vehicular.
- b) Aprendizaje aplicado a la programación de modelos de sistemas dinámicos desarrollados mediante la técnica de Bond-Graph.
- c) Obtención de las ecuaciones de comportamiento de los sistemas, a partir del diagrama de Bond-Graph.
- d) Realización de casos prácticos de aplicación de los conocimientos adquiridos, consistentes en la simulación por ordenador de algunos casos de dinámica vehicular.

### *Contenidos*

- 1) Introducción a la técnica de Bond-Graph.
- 2) Modelado de sistemas mecánicos aplicando la técnica de Bond-Graph. Ejercicios.
- 3) Programación y simulación de dinámica vehicular utilizando Bond-Graph.
- 4) Ejercicios. Conclusiones.

### *Metodología:*

Se realizarán exposiciones orales teóricas de los conceptos básicos y técnicas utilizadas. Después de cada exposición teórica se realizan ejercicios prácticos utilizando programas informáticos de apoyo.

Será necesaria la utilización de equipos informáticos, tanto por parte del profesor como por parte de los alumnos. Estos equipos informáticos son necesarios para la presentación de las exposiciones orales, para el manejo de los programas informáticos utilizados de apoyo a las clases, así como para la realización de los ejercicios prácticos.

### *A quien va dirigido:*

Estudiantes, técnicos e ingenieros del sector del diseño industrial e ingeniería mecánica.

### *Duración y programación*

El curso se programa en clases de 1,5 horas aproximadamente, con una duración total de 6 horas, estructuradas de la siguiente manera:

Clase 1: (1,5 horas). Presentación. Introducción a la técnica de Bond-Graph.

Clase 2: (1,5 horas) Aplicación de la técnica de Bond-Graph a la simulación de sistemas mecánicos.

Clase 3: (1,5 horas) Ejercicio 1, modelado de un sistema de 2 grados de libertad.

Clase 4: (1,5 horas) Ejercicio 2, dinámica vertical de un vehículo automóvil.

~~Clase 4: (1,5 horas) Ejercicio 2, dinámica longitudinal de un vehículo. Simulación de una maniobra de frenada.~~

~~Clase 5: (1,5 horas) Ejercicio 3, simulación de un sistema ABS.~~

*Bibliografía:*

- [1] Félez, J. (1989). “Un método para el análisis unificado de la cinemática y dinámica de sistemas vehiculares basado en la técnica de los grafos de unión”. Tesis doctoral de la E.T. Superior de Ingenieros Industriales de Zaragoza.
- [2] Félez, J., Vera, C., San José, I., Cacho, R., (1990). “BONDYN: A Bond Graph Based Simulation Program for Multibody Systems”. Transactions of de ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 112, 717-727.
- [3] Karnopp, D., Margolis, D., Y Rosenberg, R., (1990). “System Dynamics: A Unified Approach”. Wiley-Interscience, New York, NY, 2ª edición.
- [4] Lozano, J.A. (1996). “Modelo Teórico para la reconstrucción de accidentes de tráfico por ordenador”. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- [5] Margolis, D., (1986). “Introduction into Bond Graphs”. Third Seminar on Advanced Vehicle Dynamics, Amalfi, mayo 1986.
- [6] Mathews, J. H., (1992). “Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering”. Prentice-Hall International Editions, 2ª edición.
- [7] Pacejka, H.B., (1986). “Bond Graphs in Vehicle Dynamics”. Third Seminar on Advanced Vehicle Dynamics, Amalfi, mayo 1986.
- [8] Petzold, L., (1982). “A Description of DASSL: A Differential/Algebraic System Solver”. Proc. 10th IMACS Congress, Montreal, vol 1, 430-432.
- [9] Rosenberg, R. C., Wang, Y. Y., (1992). “Some structuring issues in modeling”. DSC-Vol. 41, Automated Modeling, ASME.
- [10] Van Dixhoorn, J. J., (1977). “Simulation of Bond Graphs on Minicomputers”. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, marzo 1977.
- [11] Vera, C., Aparicio, F., Félez, J., (1993). “Simulación de Sistemas Dinámicos mediante la técnica del Bond Graph”. E.T. Superior de Ingenieros Industriales de Madrid.
- [12] Vera, C., Aparicio, F., Félez, J., San José, I., (1992). “Bond Graph simulation with the BONDYN program. Safety of Transportation”. Delft University of Technology.
- [13] Vera, C., Aparicio, F., Félez, J., San José, I., (1993). “Bond Graph simulation with the BONDYN program. Safety of Transportation”. Western Simulation Multiconference, La Jolla (California).
- [14] Vera, C., Aparicio, F., Peso, S., (1992). Theoretic model for the computer analysis of vehicle collisions. Safety of Transportation. Delft University of Technology.
- [15] Vera, C., Lozano, J.A., Aparicio, F., Félez, J., (1994). “SINRAT IV. A Program for Traffic Accident Reconstruction”. International Conference on Bond-Graph Modeling ICBGM'94. Las Vegas, U.S.A.
- [16] Vera, C., Lozano, J.A., Félez, J., (1996). “Sistema informático de reconstrucción de accidentes de tráfico”. II Symposium sobre Ingeniería de los Transportes. Madrid, 1996.
- [17] Vera, C.; Félez, J.; San José, I.; Cacho, R., (1987). “Introducción del método de los grafos de unión a la dinámica vehicular”. Anales de Ingeniería Mecánica, año 5, nº. 1.

# INTRODUCCIÓN A LA TÉCNICA DE BOND-GRAPH

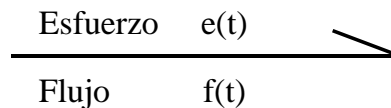
## *Indice*

1.- INTRODUCCIÓN A LA TÉCNICA DE BOND-GRAPH.....	5
1.1.- Introducción .....	5
1.2.- Elementos básicos del Bond-Graph .....	6
1.2.1.- Elementos FUENTE.....	7
1.2.2.- Elementos que almacenan energía. ....	8
1.2.3.- Elementos de disipan energía. ....	10
1.2.4.- Nodos de UNIÓN.....	11
1.2.5.- Elementos TRANSFORMER.....	13
1.2.6.- Elementos GYRATOR.....	15
1.3.- La causalidad.....	16
1.4.- Planteamiento de las ecuaciones del sistema.....	17
1.4.1.- Introducción .....	17
1.4.2.- Desarrollo de las ecuaciones de estado del sistema en el diagrama de Bond-Graph.....	19
1.4.3.- Ecuaciones de comportamiento del sistema a partir del diagrama de Bond-Graph. ....	28

## 1.- INTRODUCCIÓN A LA TÉCNICA DE BOND-GRAPH

### 1.1.- Introducción

Bond-Graph es una técnica de simulación de sistemas dinámicos en cualquier dominio de la física y de la energía. Esta técnica está basada en la representación del flujo de energía que se produce en el seno de los sistemas e incluso entre ellos, mediante líneas o flechas, también llamadas BOND, (figura 1.1.). La punta de la flecha del BOND, indica el sentido de transmisión de la energía.



**Figura 1.1. Bond.**

Cada BOND lleva asociados dos valores instantáneos de esfuerzo  $e(t)$  y flujo  $f(t)$ , cuyo producto es la energía instantánea o potencia  $W(t)$ :

$$W(t) = e(t) f(t) \quad \text{ec.1.1.}$$

En el BOND-GRAPH a las variables  $e(t)$  y  $f(t)$ , se les denomina variables del sistema y sus valores definen el BOND. El significado físico de estas variables dependerá del dominio físico en que se encuadre el sistema en estudio. Por ejemplo, en el caso de la mecánica,  $e(t)$  es la fuerza y  $f(t)$  es la velocidad. En la tabla 1.1, se muestra el significado de estas variables para diferentes dominios de la Física.

Además de las ya mencionadas, se utilizan dos variables más que se les denomina variables energéticas o dinámicas. Estas dos variables son en momento  $P(t)$ , y el desplazamiento  $q(t)$ , que se definen como la integral en el tiempo de la variable esfuerzo y la variable flujo, respectivamente:

$$P(t) = \int_0^t e(t) dt \quad \text{ec. 1.2.}$$

$$q(t) = \int_0^t f(t) dt \quad \text{ec. 1.3.}$$

En el dominio de la mecánica,  $P(t)$  es la cantidad de movimiento y  $q(t)$  el desplazamiento del sistema. En la tabla 1.1 también se muestra el significado de las variables  $P(t)$  y  $q(t)$  para diferentes dominios de la Física.

Por otra parte, la energía transmitida  $E(t)$  por el BOND, en un periodo de tiempo  $t$ , es la integral en el tiempo de la potencia  $W(t)$ , por lo que:

$$E(t) = \int_0^t W(t) dt = \int_0^t e(t) f(t) dt \quad \text{ec. 1.4.}$$

**Tabla 1.1. Significado de las variables del Bond-Graph para diferentes dominios de la Física.**

<b>Sistema Físico</b>	<b>Esfuerzo e(t)</b>	<b>Flujo f(t)</b>	<b>Momento P(t)</b>	<b>Desplazamiento q(t)</b>
<b>Mecánica Traslación</b>	Fuerza F (N)	Velocidad V (m/s)	Momento lineal P (N.s)	Desplazamiento x (m)
<b>Mecánica Rotación</b>	Par M (N.m)	Velocidad angular w (rad/s)	Momento angular H (N.m.s)	Ángulo girado $\theta$ (rad)
<b>Hidráulica</b>	Presión p (N/m <sup>2</sup> )	Caudal Q (m <sup>3</sup> /s)	Momento P (N.s/m <sup>2</sup> )	Volumen V (m <sup>3</sup> )
<b>Electricidad</b>	Voltaje e (V)	Intensidad I (A)	Flujo F (V.s)	Carga q (C)
<b>Sistemas Térmicos</b>	Temperatura T (K)	Flujo de calor q (w)		Calor Q (cal.)
<b>Acústica</b>	Presión p (N/m <sup>2</sup> )	Velocidad v (m <sup>3</sup> /s)	Momento P (N.s/m <sup>2</sup> )	Volumen V (m <sup>3</sup> )

## 1.2.- Elementos básicos del Bond-Graph

A continuación se presentan un conjunto de elementos básicos que podrán ser usados para modelizar los sistemas físicos mediante la técnica de Bond-Graph. Estos elementos aparecerán como componentes elementales del sistema físico, representando su idealización matemática.

La técnica de Bond-Graph permite que, con la clasificación de variables presentada en el apartado anterior sólo se necesite una pequeña cantidad de elementos para poder representar modelos de cualquier dominio físico.

Además, como se verá posteriormente, la notación de Bond-Graph permite visualizar el comportamiento del sistema más fácilmente que con el conjunto de las ecuaciones de estado.

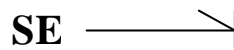
### 1.2.1.- Elementos FUENTE

Los elementos fuente son aquellos que suministran potencia al sistema. Esta potencia puede ser suministrada a partir de un flujo conocido o mediante un esfuerzo conocido. Así pues, respectivamente, habrá dos tipos de fuentes:

- a) *Fuentes de Flujo*, con flujo conocido.
- b) *Fuentes de Esfuerzo*, con esfuerzo conocido.

#### **FUENTES DE ESFUERZO.**

Son aquellas que provocan una entrada de esfuerzo al sistema. Se representan tal como se muestra en la figura 1.2.

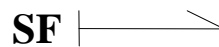


**Figura 1.2. Fuente de esfuerzo.**

Ejemplos físicos de fuentes de esfuerzo son las fuerzas de excitación, pesos, etc., en sistemas mecánicos, o las pilas, generadores de tensión, fuentes de tensión, etc., en circuitos eléctricos.

#### **FUENTES DE FLUJO.**

Son aquellas que provocan una entrada de flujo al sistema. Se representan tal como se muestra en la figura 1.3.



**Figura 1.3. Fuente de flujo.**

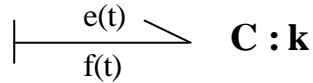
Ejemplos físicos de fuentes de flujo son las fuentes de intensidad en circuitos eléctricos, las bombas hidráulicas que, realmente, son fuentes de caudal, o la velocidad de excitación de un sistema mecánico.

### 1.2.2.- Elementos que almacenan energía.

En este caso consideraremos aquellos elementos que son susceptibles de almacenar energía, y de devolverla íntegramente al sistema sin ninguna pérdida.

En Bond-Graph, se consideran dos tipos básicos de elementos que almacenan energía: las Puertas Resorte y las Puertas Inercia. Sus características se describen a continuación.

#### **PUERTA RIGIDEZ**



**Figura 1.4. Puerta Rigidez.**

Estas puertas se dibujan en Bond-Graph tal como muestra la figura 1.4., y representan elementos donde el esfuerzo que aparece se puede expresar como la integral a lo largo del tiempo del producto del flujo que se produce por un parámetro  $k(t)$ :

$$e(t) = \int_0^t k(t)f(t)dt \quad \text{ec. 1.5.}$$

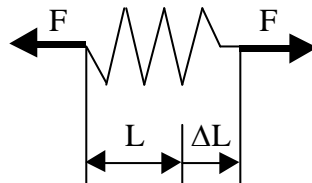
En sistemas dinámicos lineales, el parámetro  $k$  suele ser un parámetro constante no dependiente del tiempo, escribiéndose:

$$e(t) = k \int_0^t f(t)dt \quad \text{ec. 1.6.}$$

Dado que la integral del flujo, es el desplazamiento  $q(t)$ , se puede escribir:

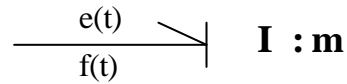
$$e(t) = k \cdot q(t) \quad \text{ec. 1.7.}$$

El nombre de este tipo de puertas, se debe a que el comportamiento expresado por la ecuación 1.7., es el que presenta, en el dominio de la Mecánica, la rigidez de un resorte lineal. En este caso, el esfuerzo es la fuerza “F” aplicada al resorte y el desplazamiento es la deformación total “ $\Delta L$ ” experimentada por el resorte entre sus extremos, (Figura 1.5.). Pero se pueden encontrar otros tipos de elementos con este tipo de comportamiento en otros dominios de la Física. Por ejemplo, un condensador en el dominio de la Electricidad, o un acumulador hidráulico.



**Figura 1.5. Puerta Rigidez.**



**PUERTA INERCIA****Figura 1.6. Puerta de Inercia.**

Estas puertas se dibujan en Bond-Graph tal como muestra la figura 1.6., y representan elementos donde el esfuerzo que aparece se puede expresar como la derivada temporal del producto del flujo que se produce por un parámetro  $m(t)$ :

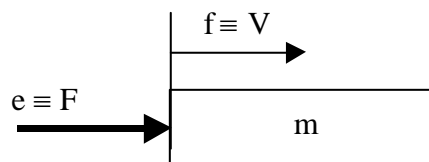
$$e(t) = \frac{d[m(t)f(t)]}{dt} \quad \text{ec. 1.8.}$$

En sistemas dinámicos lineales, el parámetro  $m$  suele ser un parámetro constante no dependiente del tiempo, escribiéndose:

$$e(t) = m \frac{d[f(t)]}{dt} \quad \text{ec. 1.9.}$$

El nombre de este tipo de puertas, se debe a que el comportamiento expresado por la ecuación 1.9., es el que presenta, en el dominio de la Mecánica Newtoniana, una masa inercial, (figura 1.7). En este caso, el esfuerzo es la fuerza “F” aplicada sobre una masa “m” y la derivada del flujo es la aceleración que la masa experimenta en la dirección y sentido de aplicación de la fuerza.

Se pueden encontrar otros tipos de elementos con este tipo de comportamiento en otros dominios de la Física. Por ejemplo, una bobina en el dominio de la Electricidad.

**Figura 1.7. Puerta Inercia.**

### 1.2.3.- Elementos de disipan energía.

#### **PUERTA RESISTENCIA.**

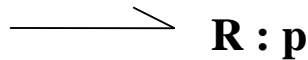
Este elemento va a representar a aquellos dispositivos o situaciones donde se produce una disipación de energía.

Un ejemplo claro es el de la resistencia eléctrica, que al paso de una intensidad de corriente produce una caída de tensión. Otro ejemplo claro lo constituye el amortiguador hidráulico, que opone una resistencia, o fuerza opuesta a su movimiento, proporcional a la velocidad a la que se quiere desplazar. Otros ejemplos son la pérdida de energía por rozamiento mecánico de un sólido que se desplaza apoyado en otro sólido, o la pérdida de carga que se produce en una tubería debido al paso de un fluido.

Este elemento se representa en Bond-Graph mediante el grafo mostrado en la figura 1.4., y en el que el esfuerzo y el flujo están relacionados por la expresión:

$$e(t) = R f(t) \quad \text{ec.1.10.}$$

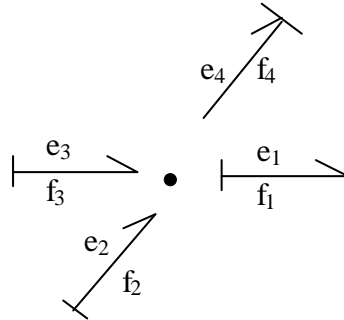
Donde R podría ser un parámetro “p” lineal o no lineal.



**Figura 1.8. Puerta resistencia**

### 1.2.4.- Nodos de UNIÓN

En aquellos puntos del sistema donde existen una o varias entradas de energía y una o varias salidas de ésta, se forma un nodo cuya característica principal es que en él se cumple el principio de conservación de la energía.



**Figura 1.9.- Nodos de Unión.**

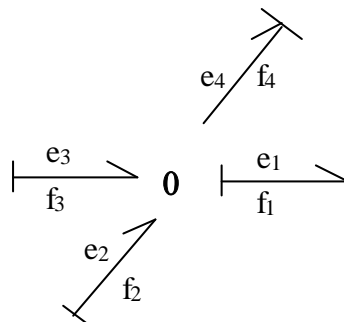
Como ya es sabido que la energía instantánea o potencia es el producto del esfuerzo “e(t)”, por el flujo “f(t)” asociado a cada grafo. Debido al principio de conservación de la energía se cumplirá que

$$\sum_{i=1}^n e_i f_i = \sum_{j=1}^m e_j f_j \quad \text{ec. 1.11.}$$

Donde “n” es el número de grafos entrantes al nodo y “m” es el número de grafos salientes del nodo.

Existen dos tipos de uniones que se denominan tipo 0, y tipo 1. En las primeras todos los grafos que entran y salen del nodo llevan asociado el mismo valor de esfuerzo. Por el contrario, en las segundas todos los grafos conectados al nodo llevan asociado el mismo valor del flujo.

### NODO DE UNIÓN 0



**Figura 1.10.- Nodos de Unión 0.**

Tal como se ha mencionado, en los nodos de unión tipo 0 se cumple:

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 \tag{ec.1.12.}$$

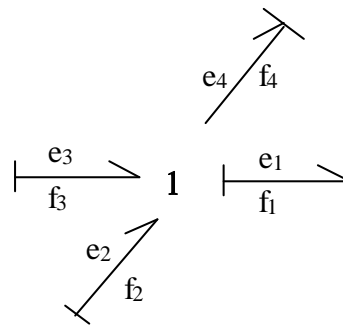
Todos estos esfuerzos son iguales en valor y signo, independientemente del sentido que presenten los grafos correspondientes respecto de la unión.

Y debido al principio de conservación de la energía expresado en la ecuación 1.6.:

$$e_i \sum_{i=1}^n f_i = e_j \sum_{j=1}^m f_j$$

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{j=1}^m f_j \tag{ec. 1.13.}$$

**NODO DE UNIÓN 1**



**Figura 1.11.- Nodo de Unión 1.**

Tal como se ha mencionado, en los nodos de unión tipo 0 se cumple:

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \tag{ec.1.14.}$$

Todos estos flujos son iguales en valor y signo, independientemente del sentido que presenten los grafos correspondientes respecto de la unión.

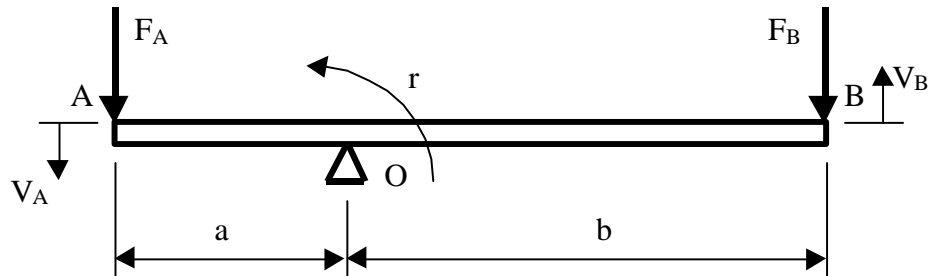
Y debido al principio de conservación de la energía expresado en la ecuación 1.6.:

$$f_i \sum_{i=1}^n e_i = f_j \sum_{j=1}^m e_j$$

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{j=1}^m e_j \tag{ec. 1.15.}$$

### 1.2.5.- Elementos TRANSFORMER

Dada la palanca de la figura 1.12, vamos a estudiar la relación existente entre las velocidades y esfuerzos de sus extremos.



**Figura 1.12.- Palanca.**

Supongamos que la palanca gira alrededor de su punto de apoyo “O”, con una velocidad angular “r”. Se tendrá:

$$V_A = r \cdot a \quad \text{ec. 1.16.}$$

$$V_B = r \cdot b \quad \text{ec. 1.17.}$$

Por otra parte, si la palanca gira a velocidad angular constante, hay equilibrio de esfuerzos y entonces:

$$F_A \cdot a = F_B \cdot b \quad \text{ec. 1.18.}$$

De todas estas ecuaciones se pueden deducir las relaciones existentes entre las velocidades y esfuerzos de los extremos de la palanca:

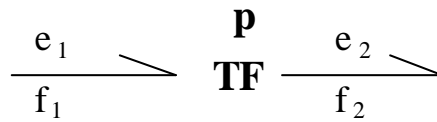
$$V_A / a = r = V_B / b \quad \text{de donde} \quad V_B = V_A \cdot (b/a) \quad \text{ec. 1.19.}$$

$$F_A \cdot a = F_B \cdot b \quad \text{de donde} \quad F_B = F_A \cdot (a/b) \quad \text{ec. 1.20.}$$

Como se deduce de estas ecuaciones, al pasar del punto A al B de la palanca, se han transformado tanto velocidades como esfuerzos, pero no ha habido pérdida de potencia y en consecuencia:

$$F_B V_B = F_A \cdot (a/b) V_A \cdot (b/a) = F_A V_A$$

Estas transformaciones de esfuerzos y flujos sin pérdida de potencia se representan en Bond-Graph mediante el elemento TRANSFORMER, de la forma indicada en la figura 1.13.



**Figura 1.13.- Elemento TRANSFORMER.**

El elemento transformer viene definido por un grafo de entrada y otro de salida, así como por un valor o razón del transformer “p”. En estos elementos se cumple que el flujo de salida es igual al flujo de entrada multiplicado por la razón del transformer y, a la inversa, el esfuerzo de salida es el esfuerzo de entrada dividido por la razón:

Sean:

$e_1, f_1$  = esfuerzo y flujo de entrada.

$e_2, f_2$  = esfuerzo y flujo de salida.

$p = b/a$  = razón del transformer

$$f_2 = p f_1 = (b/a) f_1 \quad \text{ec. 1.21.}$$

$$e_2 = (1/p) e_1 = (a/b) e_1 \quad \text{ec. 1.22.}$$

Como no hay pérdidas, siempre se cumple que:

$$e_2 \cdot f_2 = (1/p) \cdot e_1 \cdot p \cdot f_1 = e_1 \cdot f_1$$

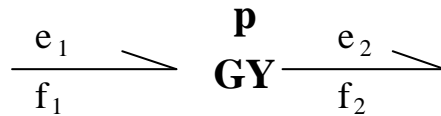
Partiendo de las expresiones ec. 1.21 y ec. 1.22, conociendo el esfuerzo y flujo de salida, también se pueden calcular el esfuerzo y flujo de entrada. Con lo cual podríamos invertir el sentido de actuación del elemento transformer.

En el ejemplo tratado, la razón del transformer “p” se considera constante. Si no es así, aunque dicha razón “p” varíe con el tiempo, el elemento Transformer “TF” sigue funcionando igual. Sin embargo, en tal caso se le denomina METATransformer “MTF”.

Otros ejemplos de aplicación del elemento TRANSFORMER son, en la Mecánica Rotacional los engranajes rueda-piñón; en la Hidráulica, los actuadores hidráulicos donde una fuerza F aplicada a una velocidad V se transforma en una presión P y un caudal Q, etc.

### 1.2.6.- Elementos GYRATOR

Estos elementos transforman flujos en esfuerzos y esfuerzos en flujos. Están formados por un grafo de entrada, otro de salida y la razón del gyrator “p”. Como en el caso de los transformer, no hay pérdida de potencia.



**Figura 1.14.- Elemento GYRATOR.**

Por definición, en los elementos gyrator se cumplirá que:

$$e_2 = p f_1 \quad \text{ec. 1.23.}$$

$$e_1 = p f_2 \quad \text{ec. 1.24.}$$

Siempre se cumple que:

$$e_2 \cdot f_2 = p \cdot f_1 \cdot (1/p) \cdot e_1 = e_1 \cdot f_1$$

Y, por tanto, no hay pérdida de potencia

Al igual que en el caso del elemento transformer, si la razón “p” del elemento Gyrator “GY” no es constante en el tiempo, el funcionamiento sigue siendo el mismo. Pero, en tal caso, se le denomina elemento METAGYRATOR “MGY”.

Ejemplos de aplicación son, la transformación de las velocidades en fuerzas de inercia en el dominio de la Mecánica General cuando se utilizan sistemas de referencia no inerciales. Otro ejemplo muy claro del elemento gyrator, en el dominio de la Electromecánica, es el motor eléctrico, ya que el paso de una intensidad produce un par motriz, y se cumple que el par es igual a un parámetro del motor por la intensidad.

### 1.3.- La causalidad

Se entiende por hallar la causalidad de los grafos del diagrama de Bond-Graph, el determinar, de las dos variables que llevan asociadas todos los grafos, cual de ellas es función de la otra. Nunca ambas serán independientes y siempre una dependerá de la otra.

Por ejemplo, en Mecánica cuando la CAUSA es esfuerzo el EFECTO es una velocidad, a la inversa, cuando la CAUSA es velocidad, el EFECTO es un esfuerzo. En el primer caso, el esfuerzo sería la variable independiente y la velocidad la variable dependiente, diciendo que el grafo asociado al fenómeno tiene CAUSALIDAD ESFUERZO. En el segundo caso, la variable independiente es la velocidad y el esfuerzo será la variable dependiente, diciendo que el grafo asociado al fenómeno tiene CAUSALIDAD FLUJO.

En la tabla 1.2. se indican algunas reglas generales, que aplicadas adecuadamente permiten obtener la CAUSALIDAD DE UN DIAGRAMA BOND-GRAPH de forma sencilla y sistemática.

La representación de la causalidad en Bond-Graph se realiza mediante un trazo transversal en el extremo del grafo en el sentido de la causalidad ESFUERZO. Este criterio se entenderá mejor durante el desarrollo de los ejemplos que aparecen en los siguientes apartados.

**Tabla 1.2. Reglas de aplicación de la causalidad en Bond-Graph.**

Elemento de Bond-Graph	CAUSALIDAD
Fuente de flujo	FLUJO
Fuente de esfuerzo	ESFUERZO
Puerta de Inercia	AMBAS Causalidad flujo en general
Puerta rigidez	AMBAS Causalidad esfuerzo en general
Puerta resistencia	AMBAS
Transformer	AMBAS
Gyrator	AMBAS
Unión 0	En cuanto exista un grafo con causalidad esfuerzo entrante al nudo, el resto de grafos tendrá causalidad esfuerzo en sentido saliente del nudo.
Unión 1	En cuanto exista un grafo con causalidad flujo entrante al nudo, el resto de grafos tendrá causalidad flujo en sentido saliente del nudo.



## 1.4.- Planteamiento de las ecuaciones del sistema

### 1.4.1.- Introducción

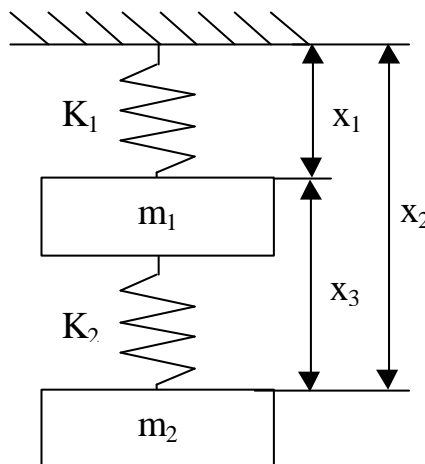
Dado un sistema físico cualquiera, el planteamiento de sus ecuaciones de estado puede hacerse de diferentes formas.

Un sistema de N grados de libertad puede ser representado por:

- Una ecuación de orden 2N en términos de una variable desconocida.
- Varias combinaciones de ecuaciones y variables desconocidas con su orden correspondiente, (no necesariamente el mismo).
- 2N ecuaciones acopladas de primer orden en términos de N variables desconocidas.

Estas ecuaciones suelen ser tipo diferencial.

Por ejemplo, para el sistema de 2 grados de libertad de la figura 1.15., en el que  $K_1$ ,  $K_2$  son las rigideces de los resortes,  $m_1$ ,  $m_2$  las masas y  $x_1$ ,  $x_2$  son los desplazamientos verticales de las citadas masas, respectivamente.



**Figura 1.15. Sistema de 2 grados de libertad.**

Tomando como variable  $x_1$ , para expresar el sistema en términos de este desplazamiento, la ecuación de estado tiene la forma:

$$-\frac{d^4 x_1}{dt^4} + \left[ \frac{K_1}{m_1} + K_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right] \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left( \frac{K_1 \cdot K_2}{m_1 \cdot m_2} \right) \cdot x_1 - K_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot g = 0$$

Siendo  $g$  la aceleración de la gravedad.

Como se observa, en este caso se obtiene una sola ecuación de cuarto orden.

Una segunda forma de plantear las ecuaciones, consiste en elegir como variables desconocidas  $x_1$  y  $x_3$  como también se muestra en la figura 1.15.. En tal caso, el modelo viene representado por dos ecuaciones de segundo grado acopladas:

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + K_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) x_3 - \frac{K_1}{m_1} x_1 = 0$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{K_2}{m_1} x_3 + \frac{K_1}{m_1} x_1 = 0$$

Finalmente, si se asocia la energía del sistema a la cantidad de movimiento de las masas y al desplazamiento producido entre los extremos de los resortes, entonces se tiene un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden acopladas.

Denominando  $P_1$  y  $P_2$ , las cantidades de movimiento asociadas a las masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, el sistema de ecuaciones que se obtiene es el siguiente:

$$\frac{dP_1}{dt} = K_2 \cdot x_3 - K_1 \cdot x_1 + m_1 \cdot g$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -K_2 \cdot x_3 + m_2 \cdot g$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{P_1}{m_1}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{P_2}{m_2} - \frac{P_1}{m_1}$$

En todo caso, es posible transformar una cualquiera de las formas en otra, tanto si el sistema es lineal, como si no lo es. Sin embargo, para sistemas no lineales la transformación es más difícil.

La técnica de Bond-Graph, permite aplicar esta última formulación de una forma muy sencilla y sistemática, si se seleccionan adecuadamente las variables del sistema. Este será el caso de formulación que se tratará a continuación en los siguientes apartados. Como se verá, se tomarán como variables las cantidades de movimiento de las puertas de inercia y los desplazamientos en las puertas rigidez.

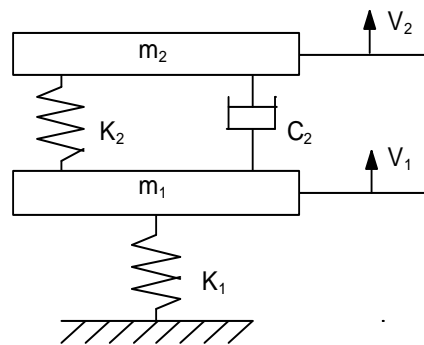
**1.4.2.- Desarrollo de las ecuaciones de estado del sistema en el diagrama de Bond-Graph.**

Para tratar el tema de obtención de las ecuaciones de estado de un sistema modelizado en Bond-Graph vamos a utilizar el ejemplo que aparece en la figura 1.16.. En esta figura se muestran dos masas suspendidas, en el caso de la superior mediante un muelle-amortiguador en paralelo, y en la inferior solamente con un muelle.

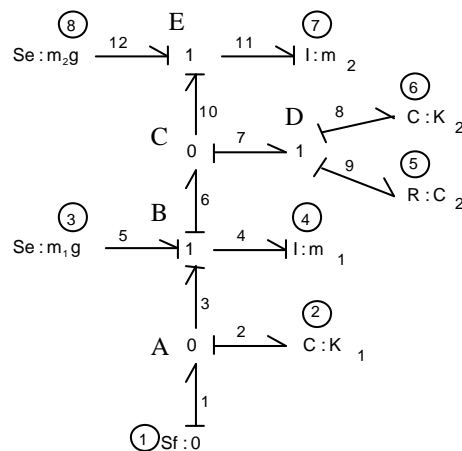
Se expondrá la obtención del diagrama de Bond-Graph del sistema, que se muestra en la figura 1.17, considerando incluso la causalidad.

A partir del diagrama del Bond-Graph obtenido, se irán obteniendo las **ecuaciones de estado del sistema**, que son las expresiones de los flujos (velocidades) y de los esfuerzos (fuerzas) que se desarrollan en los diferentes puntos o elementos que constituyen el sistema.

En el apartado siguiente se obtendrán las **ecuaciones de comportamiento del sistema**, que son un sistema de ecuaciones diferenciales respecto del tiempo de las variables independientes del sistema, que integradas permiten calcular o simular el comportamiento del sistema partiendo de determinadas condiciones iniciales.



**Figura 1.16. Modelo de dos masas suspendidas.**



**Figura 1.17. Bond Graph del modelo de dos masas suspendidas, con causalidad.**

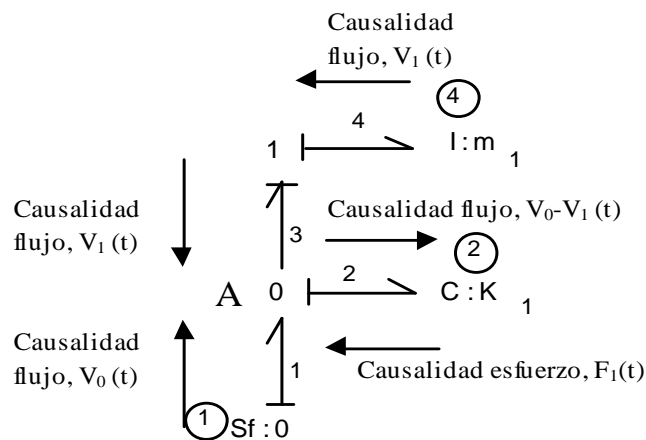
Como se observa en la figura 1.16., y según ya se ha citado, el sistema está constituido por dos masas suspendidas, en el caso de la superior mediante un muelle-amortiguador en paralelo, y en la inferior solamente con un muelle, que está apoyado en un suelo. Se quiere estudiar el movimiento de las masas en sentido vertical solamente.

El desarrollo que se expone a continuación para explicar la obtención del diagrama de Bond-Graph, así como las ecuaciones de estado del sistema, se refiere continuamente a las figuras 1.16. y 1.17, aunque no se haga referencia explícita a ellas. Como se observa en estas figuras, todos los elementos están numerados o nombrados, para su mejor seguimiento.

La velocidad del extremo inferior del resorte inferior “K<sub>1</sub>” vendrá definida por la velocidad del suelo. Este aspecto se modeliza mediante una fuente de flujo, SF : 0 , (1). Las fuentes de flujo siempre tienen causalidad *flujo* hacia el sistema. En este caso el flujo f<sub>1</sub> es la variable independiente, causa conocida:

$$f_1 = V_0 = \text{velocidad vertical del suelo} \tag{ec. 1.25.}$$

Los resortes K<sub>1</sub> y K<sub>2</sub> se representan mediante puertas Compliance o Rigidez, (2) y (6), respectivamente. Estos resortes están trabajando sometidos en sus extremos a la diferencia de velocidad que imponen el suelo y la masa m<sub>1</sub>, en el caso de K<sub>1</sub>; y la diferencia de velocidad entre las masas m<sub>1</sub> y m<sub>2</sub>, en el caso de K<sub>2</sub>. Por tanto, la causalidad desde el sistema a estas puertas es *flujo*. Y como estos resortes responden al sistema con un esfuerzo, su causalidad hacia el sistema es de tipo *esfuerzo*. Efectivamente, en la figura 1.18, puede observarse como el sistema informa a la puerta 2 de la diferencia de velocidades a la que trabaja el resorte, y como éste devuelve al sistema el esfuerzo que se genera en él debido al desplazamiento entre sus extremos.



**Figura 1.18. Causalidad hacia la puerta 2 y de ella hacia el sistema.**

Tomando como variable independiente la deformación relativa en los extremos de los resortes, (que será la integral temporal de la velocidad relativa entre los extremos), las ecuaciones de comportamiento de éstos son:

$$\mathbf{e}_2 = \text{esfuerzo de la puerta 2} = \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 \quad \text{ec. 1.26.}$$

$$\mathbf{e}_8 = \text{esfuerzo de la puerta 6} = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}_2 \quad \text{ec. 1.27.}$$

Siendo  $x_1$  y  $x_2$ , las deformaciones de los resortes 1 y 2, respectivamente.

Es de destacar el hecho de que sobre estas puertas entran flujos y esta devuelve esfuerzo. Todas las puertas de Bond Graph reciben un tipo de causalidad, (flujo o esfuerzo), y devuelven la otra al sistema.

El amortiguador  $C_2$  se representa mediante una puerta Resistencia, (5). Este amortiguador está trabajando sometido en sus extremos a la diferencia de velocidad que existe entre las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Por tanto, la causalidad desde el sistema a esta puerta es *flujo*. Y en contra, este amortiguador responde al sistema con causalidad de tipo *esfuerzo*, definiendo el esfuerzo:

$$\mathbf{e}_9 = \text{esfuerzo de la puerta 5} = \mathbf{C}_2 \mathbf{f}_9 \quad \text{ec. 1.28.}$$

Las masas  $m_1$  y  $m_2$  se representan mediante puertas Inercia, (4) y (6), respectivamente. Ambas masas están sometidas a los esfuerzos de los resortes, amortiguador y los pesos correspondientes. Por tanto, la causalidad del sistema sobre las puertas de Inercia es de tipo *esfuerzo*. Por otra parte, las masas responderán al sistema con las velocidades correspondientes, presentando causalidad *flujo* hacia el sistema. (Ver la figura 1.19).

Tomando como variable independiente el momento  $P_i = m_i v_i$ , o Cantidad de Movimiento en las masas, el flujo que definen estas hacia el sistema es:

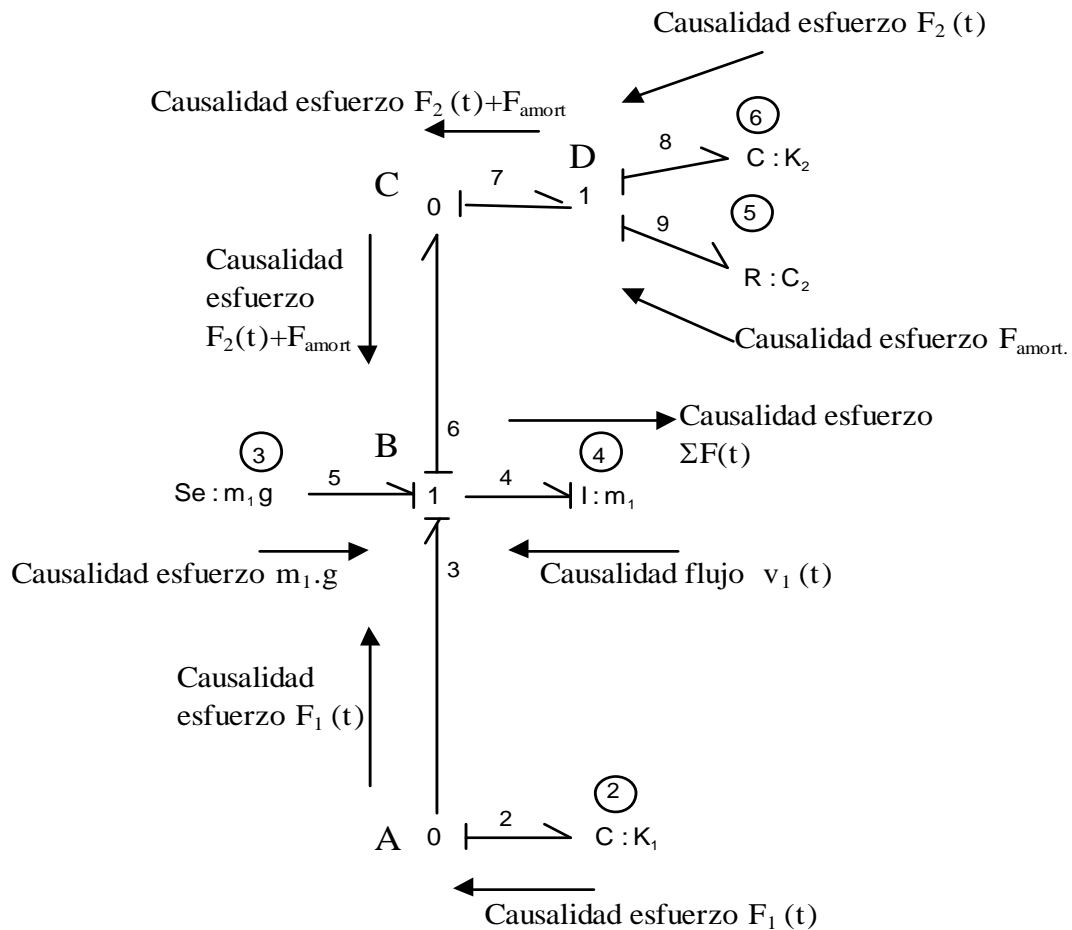
$$\mathbf{f}_4 = \text{flujo en la puerta de inercia 4} = \mathbf{P}_1 / \mathbf{m}_1 \quad \text{ec. 1.29.}$$

$$\mathbf{f}_{11} = \text{flujo en la puerta de inercia 7} = \mathbf{P}_2 / \mathbf{m}_2 \quad \text{ec. 1.30.}$$

Las masas están sometidas a su peso propio, lo cual constituye una entrada de esfuerzo externo al sistema. Este hecho se representa mediante sendas Fuentes de Esfuerzo. Las fuentes de esfuerzo poseen causalidad ESFUERZO hacia el sistema, siendo los esfuerzos  $e_5$  y  $e_8$  los valores del peso de las masas, causas conocidas:

$$\mathbf{e}_5 = \text{peso de la masa 1} = \mathbf{m}_1 \mathbf{g} \quad \text{ec. 1.31.}$$

$$\mathbf{e}_{12} = \text{peso de la masa 2} = \mathbf{m}_2 \mathbf{g} \quad \text{ec. 1.32.}$$



**Figura 1.19. Causalidad hacia la puerta 4 y de ella al sistema.**

Una vez descritas las diferentes puertas que forman parte del diagrama de Bond-Graph, seguidamente vamos a analizar las conexiones entre ellas.

La conexión del resorte \$K\_1\$ con el resto del sistema se hace mediante la Unión 0, (A), pues esta unión se produce a esfuerzo constante definido por el resorte (2). (Ver figura 1.20):

$$e_1 = e_3 = e_2 \tag{ec. 1.33.}$$

Sobre esta unión entra el grafo de la fuente de flujo y sale, además del de la Compliance, el que se dirige hacia la unión 1 de la Inercia (4). Al ser de tipo 0 se plantea que la suma de flujos de entrada es igual a la suma de flujos de salida:

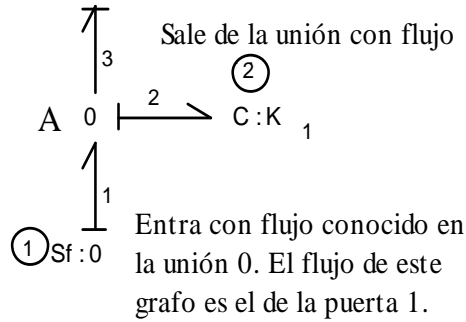
$$f_1 = f_2 + f_3 \tag{ec. 1.34.}$$

El flujo del grafo inferior viene definido por la fuente de flujo 1, y en cuanto se refiere al superior proviene de una unión tipo 1 que como es conocido significa igualdad de flujos. El flujo de todos los grafos que salen de esta unión vendrá definido por el del grafo que entra en la unión con flujo conocido. (Ver figura 1.19). En este caso entra en la unión con flujo conocido el procedente de la puerta 4. El flujo que se dirige hacia la puerta 2 será el del grafo inferior, menos el del superior que es igual al flujo del grafo 4 asociado a la puerta de Inercia (4):

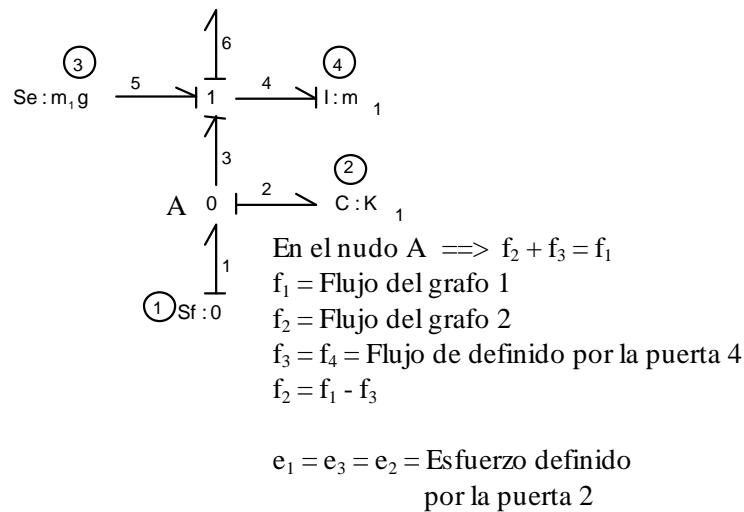
$$f_2 = f_1 - f_3 \implies f_2 = f_1 - f_4 = \text{Puerta 1 - Puerta 4}$$

En la figura 1.21, se muestra en esquema un resumen de la relación entre los esfuerzos y los flujos en la Unión A de tipo 0.

Entra con flujo conocido en la unión 0. El flujo de este grafo es el de la puerta 4.



**Figura 1.20. Planteamiento de causalidad sobre la unión A.**



Nota :  $f_i$  hace referencia al flujo del grafo “i”, no de la puerta “i”.

**Figura 1.21. Esquema de flujos y esfuerzos en la unión A.**

Continuando en sentido hacia arriba sobre el sistema, (figuras 1.16 y 1.17), el siguiente elemento que nos encontramos es la masa  $m_1$ . La conexión de la masa  $m_1$  con el resto del sistema se hace mediante la Unión 1, (B), pues esta unión se produce a flujo constante definido por masa:

$$f_3 = f_5 = f_6 = f_4 = \text{Flujo definido por la masa } m_1 \tag{ec. 1.35.}$$

Sobre esta unión entra el grafo de la fuente de esfuerzo de la acción del peso y el grafo de la acción del resorte  $K_1$ , y salen el grafo de la Inercia y el que se dirige hacia el resorte y amortiguador

superiores. La Unión 1 (B), al ser de tipo 1 se plantea que la suma de esfuerzos de entrada es igual a la suma de esfuerzos de salida de salida:

$$e_4 + e_6 = e_3 + e_5 \tag{ec. 1.36}$$

En cuanto se refiere a la puerta 4, la causalidad de entrada en esta puerta es “*esfuerzo conocido*” y proviene de una unión tipo 1, en donde se plantea que la suma de esfuerzos de entrada es igual a la suma de esfuerzos de salida. Como puede observarse en la figura 1.20, los grafos 3, 5 y 6, entran en la unión con esfuerzo conocido, mientras que el grafo 4, sale de ella con esfuerzo conocido. Por tanto:

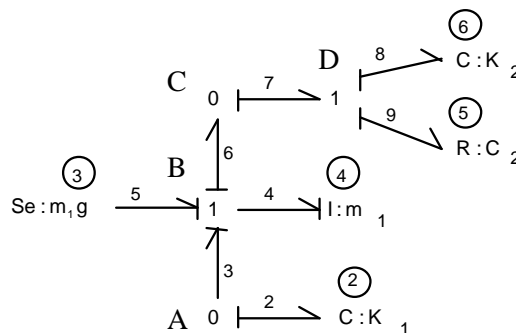
$$e_4 = e_3 + e_5 - e_6 \tag{ec. 1.37}$$

El grafo 3, sale de la unión A tipo 0 analizada anteriormente. En las uniones 0, todos los grafos menos uno salen de la unión con esfuerzo conocido, y el que queda es el que entra con causalidad esfuerzo y por lo tanto define el esfuerzo de la unión 0.

En la unión A, el grafo que define el esfuerzo de esta unión es el que entra de la puerta 2, y por lo tanto el esfuerzo del grafo 3 viene definido por la puerta 2.

El esfuerzo del grafo 5, viene de la puerta 3, fuente de esfuerzo, el cual se define directamente como el peso de la masa  $m_1$ . Y, por último el del grafo 6 viene de la unión C superior que, al tratarse de una unión 0, el planteamiento es idéntico al realizado anteriormente con la unión A. Se comienza averiguando el grafo que entra en la unión con causalidad esfuerzo, que en este caso es el grafo 7 y proviene de una unión C tipo 1 cuyo esfuerzo se define por la suma de los de las puertas 5 y 6.

En la figura 1.22, se resume la relación de esfuerzos y los flujos en la Unión B de tipo 1.



$$f_3 = f_5 = f_6 = f_4 = \text{Flujo definido por la puerta 4}$$

En el nudo B se cumple:  $e_4 + e_6 = e_3 + e_5$  (1)

En el nudo A:  $e_3 = e_2$

En el nudo C:  $e_6 = e_7$

En el nudo D:  $e_7 = e_8 + e_9$

Luego, de (1) :  $e_4 = e_3 + e_5 - e_6 = e_2 + e_5 - e_8 - e_9$

Además:

$e_2 = \text{Esfuerzo puerta 2}$

$e_5 = \text{Esfuerzo puerta 3}$

$e_8 = \text{Esfuerzo puerta 6}$

$e_9 = \text{Esfuerzo puerta 5}$

**Figura 1.22. Esquema de flujos y esfuerzos en la unión B tipo 1 de la puerta de Inercia 4.**

A continuación estudiamos las uniones C y D.

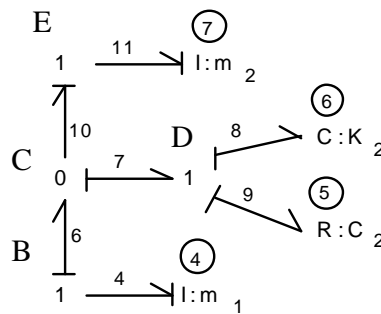


La unión D es de tipo 1, (flujo constante), pues estamos conectando dos elementos mecánicos, la puerta Resistencia nº 5 y la puerta Rigidez nº 6, que trabajan en paralelo sometidos a la misma velocidad relativa entre sus extremos, que es la velocidad relativa entre las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Y, por tanto, con causalidad de entrada a ellas “*Flujo conocido*”. Este flujo es el que proviene de la unión D de tipo 1, y el grafo que entra en esta unión con flujo conocido proviene de la unión C de tipo 0, pues es necesario plantear la ecuación de suma de flujos definidos por las puertas de Inercia nº 4 y nº 7. En la figura 1.23, se van indicando los pasos a seguir para determinar los flujos de los grafos que entran en la puerta 5 y en la puerta 6.

En dicha figura 1.23 también se muestra el cálculo de esfuerzos en los grafos que confluyen en la unión D. Como se observa, puesto que el sistema actúa sobre las puertas 5 y 6 con *causalidad flujo*, estas puertas reaccionan contra el sistema con *causalidad esfuerzo*. Estos esfuerzos definidos por ambas puertas llegan, a través de los grafos 8 y 9, a la unión D de tipo 1. En esta unión se plantea la suma de esfuerzos, quedando definido el esfuerzo del grafo 7:

$$e_7 = e_8 + e_9 = \text{Puerta 5} + \text{Puerta 6} \quad \text{ec.1.38.}$$

Dicho grafo 7 entra en la unión C de tipo 0, con esfuerzo conocido y, por tanto, queda definido el esfuerzo de esta unión C. Este esfuerzo de la unión C, definido por el grafo 7, como acabamos de ver, es la suma de los esfuerzos en las puertas Resistencia nº 5 y Rigidez nº 6, que es la fuerza que se transmite a las masas  $m_1$  y  $m_2$  como reacción del resorte y amortiguador a la acción del movimiento relativo entre ambas masas.



En el nudo D, por ser de tipo 1, se cumple:  $f_8 = f_9 = f_7$   
 $e_7 = e_8 + e_9$

$e_8$  = Esfuerzo definido por la puerta 6  
 $e_9$  = Esfuerzo definido por la puerta 5

En el nudo C, de tipo 0, se tiene:  $e_6 = e_7 = e_{10}$   
 $f_7 + f_{10} = f_6$

Por el nudo B, de tipo 1:  $f_6 = f_4$

Por el nudo E, tipo 1:  $f_{10} = f_{11}$

Además, en las puertas:

$f_4$  = flujo de la puerta 4

$f_{11}$  = flujo de la puerta 7

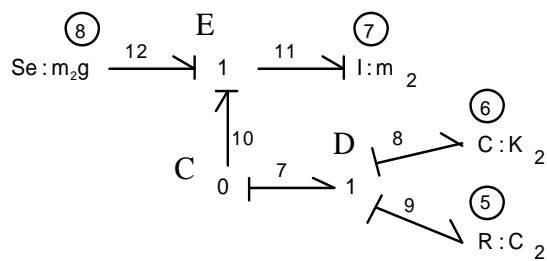
Luego el flujo entrante a las puertas 5 y 6, queda:

$$f_8 = f_9 = f_6 - f_{10} = \text{Puerta 4} - \text{Puerta 7}$$

**Figura 1.23. Esquema de flujos y esfuerzos en las uniones C y D, y flujos que se dirigen a las puertas 5 y 6.**

Por último, queda la unión con sistema de la masa  $m_2$ , (puerta de Inercia 7), a través de la unión E de tipo 1, pues se hace con *flujo definido* por la masa hacia el sistema. Por tanto, la causalidad de entrada hacia ella es “*esfuerzo conocido*”. Este esfuerzo proviene de la unión E de tipo 1, en donde será necesario plantear la suma de esfuerzos. Sobre esta unión entran dos grafos con causalidad esfuerzo, el que viene de la puerta 8, fuente de esfuerzo definido por el peso de la masa  $m_2$ , y el que procede de la unión C inferior de tipo 0, que como ya hemos estudiado, es el esfuerzo del grafo 7, que también es la suma de los esfuerzos de las puertas resistencia nº 5 y Rigidez nº 6.

En la figura 1.24, se plantean los flujos y esfuerzos en los grafos asociados a la unión E, hasta llegar a la puerta nº 7.



En el nudo E, se cumple:  $f_{10} = f_{12} = f_{11}$   
 $e_{11} = e_{10} + e_{12}$

Por el nudo C:  $e_{10} = e_7$

Y, por el nudo D:  $e_7 = e_8 + e_9$

Además, se tiene:

$e_{12} = \text{Esfuerzo puerta 8}$

$e_8 = \text{Esfuerzo puerta 6}$

$e_9 = \text{Esfuerzo puerta 5}$

Por tanto, el esfuerzo entrante a la puerta 7, es:

$e_{11} = \text{Puerta 8} + \text{Puerta 5} + \text{Puerta 6}$

**Figura 1.24. Esfuerzos y flujos en la unión E, y esfuerzos que se dirigen a la puerta 7.**

Como conclusión de este apartado, se muestra el listado con las ecuaciones de estado del sistema ya obtenidas anteriormente:

***Valores de los flujos***

$f_1 = V_0$	Por ser fuente de flujo conocida.
$f_2 = f_1 - f_3$	Por ser grafos de la unión A tipo 0
$f_3 = f_5 = f_6 = f_4$	Por ser grafos de la unión B tipo 1.
$f_4 = P_1 / m_1$	Por ser puerta de inercia, tomando $P_1$ como variable independiente.
$f_7 = f_6 - f_{10}$	Por ser grafos de la unión C tipo 0.
$f_8 = f_9 = f_7$	Por ser grafos de la unión D tipo 1.
$f_{10} = f_{12} = f_{11}$	Por ser grafos de la unión E tipo 1.
$f_{11} = P_2 / m_2$	Por ser puerta de inercia, tomando $P_2$ como variable independiente.

***Valores de los esfuerzos***

$e_1 = e_3 = e_2$	Por ser grafos de la unión A tipo 0.
$e_2 = K_1 x_1$	Por ser puerta Rigidez, con variable independiente la deformación $x_1$ .
$e_4 = e_3 + e_5 - e_6$	Por ser grafos de la unión B tipo 1.
$e_5 = -m_1 g$	Por ser fuente de esfuerzo.
$e_6 = e_7 = e_{10}$	Por ser grafos de la unión C tipo 0.
$e_7 = e_8 + e_9$	Por ser grafos de la unión D tipo 1.
$e_8 = K_2 x_2$	Por ser puerta Rigidez, con variable independiente la deformación $x_2$ .
$e_9 = C_2 f_9$	Por ser puerta resistencia, con flujo $f_9$ conocido.
$e_{11} = e_{10} + e_{12}$	Por ser grafos de la unión E tipo 1.
$e_{12} = -m_2 g$	Por ser fuente de esfuerzo.

### 1.4.3.- Ecuaciones de comportamiento del sistema a partir del diagrama de Bond-Graph.

Partiendo de las ecuaciones de estado obtenidas en el apartado anterior, en este apartado vamos a tratar la manera de obtener las ecuaciones de comportamiento del sistema. Ya se ha mencionado en el apartado anterior que las **ecuaciones de comportamiento del sistema** son un sistema de ecuaciones diferenciales respecto del tiempo de las variables independientes del sistema, que integradas permiten calcular o simular el comportamiento del sistema partiendo de determinadas condiciones iniciales.

En Bond-Graph, se toman como variables independientes del sistema:

- A) Los *momentos* ( $P = m f$ ), en las puertas de *Inercia*, (que significa la Cantidad de Movimiento de las masas en el dominio de la Mecánica).
- B) La *deformación*  $x$  en las puertas *Rigidez*, (que es la deformación de los resortes en el dominio de la Mecánica).

Por tanto, ahora tomaremos las ecuaciones de estado obtenidas en el apartado anterior, en las cuales aparecen las variables independientes mencionadas:

$$\begin{aligned} f_4 &= P_1 / m_1 \\ f_{11} &= P_2 / m_2 \\ e_2 &= K_1 x_1 \\ e_8 &= K_2 x_2 \end{aligned} \quad \text{ecs. 1.39.}$$

El significado físico de los flujos y esfuerzos que aparecen en estas ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned} f_4 &= \text{es la velocidad vertical } V_1 \text{ de la masa } m_1 \\ f_{11} &= \text{es la velocidad vertical } V_2 \text{ de la masa } m_2 \\ e_2 &= \text{es la fuerza } F_1 \text{ desarrollada por el resorte de rigidez } K_1 \\ e_8 &= \text{es la fuerza } F_2 \text{ desarrollada por el resorte de rigidez } K_2 \end{aligned}$$

Tomamos las expresiones ecs. 1.39, y despejamos las variables independientes consideradas:

$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 f_4 = m_1 V_1 \\ P_2 &= m_2 f_{11} = m_2 V_2 \\ x_1 &= e_2 / K_1 = F_1 / K_1 \\ x_2 &= e_8 / K_2 = F_2 / K_2 \end{aligned} \quad \text{ecs. 1.40.}$$

Y, ahora, aplicamos derivadas respecto del tiempo, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= m_1 \frac{dV_1}{dt} = m_1 \cdot a_1 \\ \frac{dP_2}{dt} &= m_2 \frac{dV_2}{dt} = m_2 \cdot a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{K_1} \frac{dF_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{K_2} \frac{dF_2}{dt}\end{aligned}\quad \text{ecs. 1.41.}$$

Analicemos el sentido físico de los términos de las ecuaciones ecs. 1.41. que acabamos de obtener:

- a) La primera derivada del momento o cantidad de movimiento de las masas del sistema,  $dP_i/dt$ , es igual al producto de la masa por la aceleración correspondiente,  $a_i$ , que, por la *Segunda Ley de Newton*, ( $F=ma$ ), es la fuerza o suma de fuerzas que llegan a la masa. Mirando en el diagrama de Bond-Graph obtenido en el apartado anterior, (figura 1.17), la fuerza o suma de fuerzas que llegan a cada masa es el esfuerzo del grafo asociado a la puerta de *Inercia* que representa el comportamiento de cada una de las masas, es decir:

$e_4$  en el caso de la masa  $m_1$ .

$e_{11}$  en el caso de la masa  $m_2$ .

- b) La derivada de los desplazamientos o deformaciones de los resortes,  $dx_i/dt$ , es la velocidad relativa entre los extremos de los mismos.

Mirando en el diagrama de Bond-Graph obtenido en el apartado anterior, (figura 1.17), la velocidad relativa entre los extremos de los resortes es el flujo de los grafos asociado a las puertas *Rigidez* que representan el comportamiento de cada una de los resortes, es decir:

$f_2$  en el caso del resorte de rigidez  $K_1$ .

$f_8$  en el caso del resorte de rigidez  $K_2$ .

Por tanto, las ecuaciones 1.41, quedan:

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= e_4 \\ \frac{dP_2}{dt} &= e_{11} \\ \frac{dx_1}{dt} &= f_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_8\end{aligned}\quad \text{ecs. 1.42.}$$

Los flujos y esfuerzos,  $e_4$   $e_{11}$   $f_2$   $f_8$ , los tenemos calculados en la ecuaciones de estado en el apartado anterior:

$$\begin{aligned}e_4 &= e_3 + e_5 - e_6 && \text{Por ser grafos de la unión B tipo 1.} \\ e_3 &= e_2 && \text{Por ser grafos de la unión A tipo 0.} \\ e_2 &= K_1 x_1 && \\ e_5 &= -m_1 g && \text{Por ser fuente de esfuerzo.} \\ e_6 &= e_7 && \text{Por ser grafos de la unión C tipo 0.}\end{aligned}\quad \text{ecs. 1.39.}$$

$$\begin{aligned}
 e_7 &= e_8 + e_9 && \text{Por ser grafos de la unión D tipo 1.} \\
 e_8 &= K_2 x_2 && \text{ecs. 1.39.} \\
 e_9 &= C_2 f_9 && \text{Por ser puerta resistencia, con flujo } f_9 \text{ conocido.} \\
 & && f_9 = f_8, \text{ por ser grafos de la unión D tipo 1.} \\
 & && (f_8 \text{ se calcula más adelante).} \\
 \\
 e_{11} &= e_{10} + e_{12} && \text{Por ser grafos de la unión E tipo 1.} \\
 e_{10} &= e_7 && \text{Por ser grafos de la unión C tipo 0.} \\
 e_7 &= e_8 + e_9 && \text{Por ser grafos de la unión D tipo 1.} \\
 e_8 &= K_2 x_2 && \text{ecs. 1.39.} \\
 e_9 &= C_2 f_9 && \text{Por ser puerta resistencia, con flujo } f_9 \text{ conocido.} \\
 & && f_9 = f_8, \text{ por ser grafos de la unión D tipo 1.} \\
 & && (f_8 \text{ se calcula más adelante).} \\
 e_{12} &= -m_2 g && \text{Por ser fuente de esfuerzo.} \\
 \\
 f_2 &= f_1 - f_3 && \text{Por ser grafos de la unión A tipo 0} \\
 f_1 &= V_0 && \text{Por ser fuente de flujo conocida.} \\
 f_3 &= f_4 && \text{Por ser grafos de la unión B tipo 1.} \\
 f_4 &= P_1 / m_1 && \text{ecs. 1.39.} \\
 \\
 f_8 &= f_9 = f_7 && \text{Por ser grafos de la unión D tipo 1.} \\
 f_7 &= f_6 - f_{10} && \text{Por ser grafos de la unión C tipo 0.} \\
 f_6 &= f_4 && \text{Por ser grafos de la unión B tipo 1.} \\
 f_4 &= P_1 / m_1 && \text{ecs. 1.39.} \\
 f_{10} &= f_{11} && \text{Por ser grafos de la unión E tipo 1.} \\
 f_{11} &= P_2 / m_2 && \text{ecs. 1.39.}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo sucesivamente los valores de las distintas expresiones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 e_4 &= K_1 x_1 - m_1 g - (K_2 x_2 + C_2 f_8) \\
 e_{11} &= (K_2 x_2 + C_2 f_8) - m_2 g \\
 f_2 &= V_0 - P_1 / m_1 \\
 f_8 &= P_1 / m_1 - P_2 / m_2 && \text{ecs. 1.43.}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo, nuevamente, estas últimas ecuaciones en las ecuaciones ecs. 1.42., queda:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_1}{dt} &= K_1 x_1 - m_1 g - \left[ K_2 x_2 + C_2 \left( \frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2} \right) \right] \\
 \frac{dP_2}{dt} &= \left[ K_2 x_2 + C_2 \left( \frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2} \right) \right] - m_2 g \\
 \frac{dx_1}{dt} &= V_0 - \frac{P_1}{m_1} \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \frac{P_1}{m_1} - \frac{P_2}{m_2} && \text{ecs. 1.44.}
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones ecs. 1.44, son las ecuaciones de comportamiento del sistema de dos grados de libertad mostrado en la figura 1.16, que en forma matricial, finalmente quedan:

$$\begin{array}{c} \left| \frac{dP_1}{dt} \right| \\ \left| \frac{dP_2}{dt} \right| \\ \left| \frac{dx_1}{dt} \right| \\ \left| \frac{dx_2}{dt} \right| \end{array} = \begin{array}{cccc} -C_2/m_1 & C_2/m_2 & K_1 & -K_2 \\ C_2/m_1 & -C_2/m_2 & 0 & K_2 \\ -1/m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m_1 & -1/m_2 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \left| P_1 \right| \\ \left| P_2 \right| \\ \left| x_1 \right| \\ \left| x_2 \right| \end{array} + \begin{array}{c} \left| -m_1 g \right| \\ \left| -m_2 g \right| \\ \left| V_0 \right| \\ \left| 0 \right| \end{array} \quad \text{ec. 1.45.}$$

Partiendo de unas condiciones iniciales dadas, aplicando algoritmos numéricos por ordenador, resulta muy sencillo resolver o integrar en el tiempo este sistema de ecuaciones diferenciales. De esta manera se puede simular el comportamiento del sistema y obtener su respuesta temporal en función de unas condiciones iniciales.