# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
## L4C: Series Fourier (SF)

**Según libro:**

**Nikhle H. Asmar, "Partial Differential Ecuations with Fourier Series and Boundary Value Problems" Second Edition, Pearson, (2005)**

**Igual como para series TAYLOR $f(x)=\Sigma A_n x^n$,**

**Series Fourier son expansión de una función $f(x)$ en términos de otros (funciones trigonométricas)**

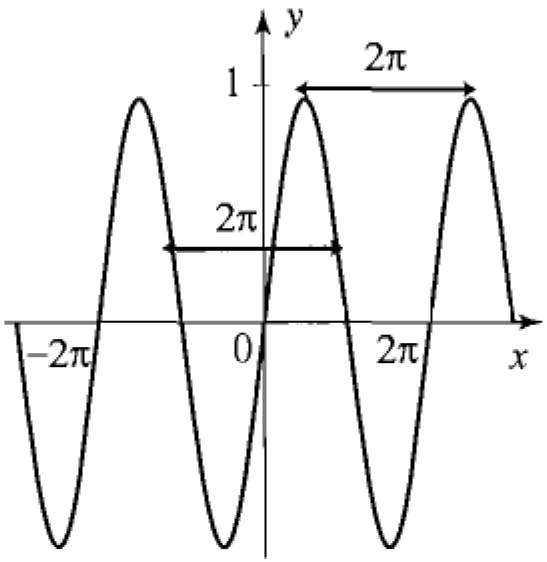
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

**Estas series han aparecido de manera natural en Lecciones anteriores cuando discutimos vibraciones de cuerda**

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

Fourier postulo que "cualquier función definida en un intervalo restringido puede ser presentada en series trigonometricas (series Fourier)



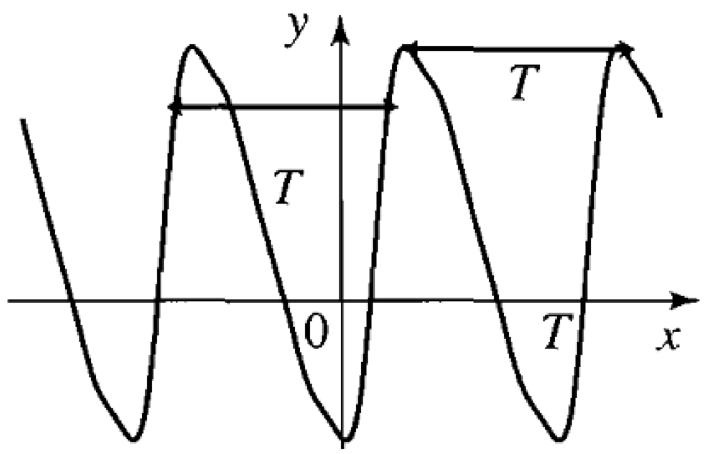

**EJEMPLO:**
Función Sen(x) esta definida completamente en intervalo (0-2π)

f(x) <u>no tiene que ser periódica</u>, pero si no lo es, Necesitaremos EXTENCION PERIODICA de f(x) para poder desarrollar f(x) en Series Fourier

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
## L4C: Series Fourier

**Definición de periodo de función: para todos x se cumple:**

$$f(x) = f(x+T)$$




$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \cdots = f(x+nT)$$

**Valor mínimo (positivo) de T ( que permite describir toda función) se llama PERIODO FUNDAMENTAL**

**Q:**

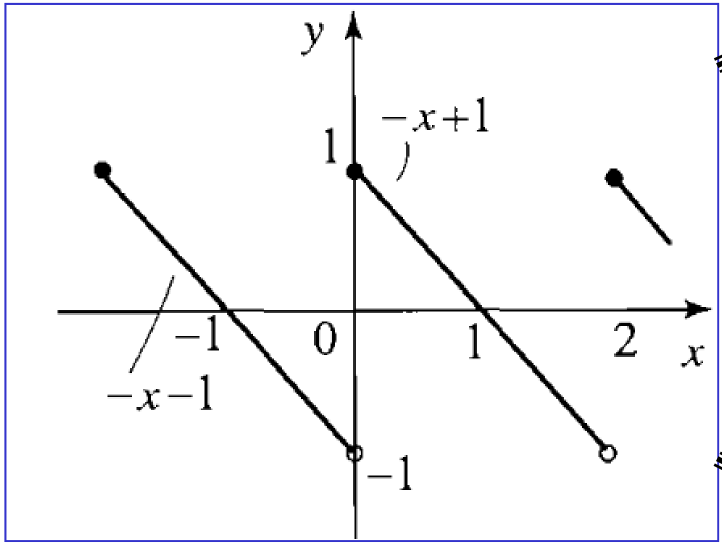
**Cual es periodo fundamental de Sen(2x) ?**

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**DEPENDIENO de INTERVALO de definición:**

**La misma función podría ser definida de distintas maneras:**




$$f(x) = -x + 1 \quad \text{if } 0 \le x < 2.$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{if } -1 \le x < 0 \\ -x+1 & \text{if } 0 \le x < 1\,. \end{cases}$$

**NOTAS:**

**No todas series se convergen**

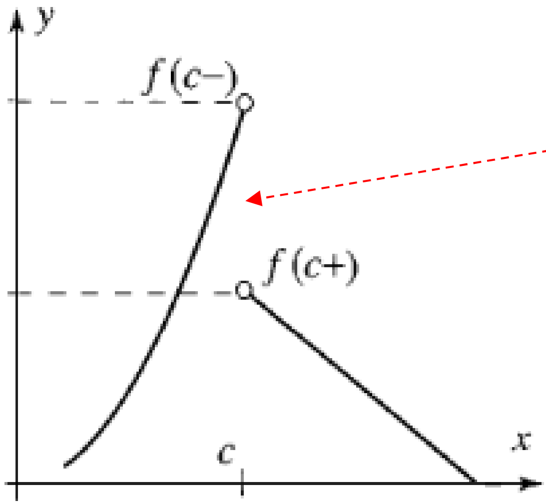
**y algunos que se convergen**

**←→**

**no a la solución esperada**

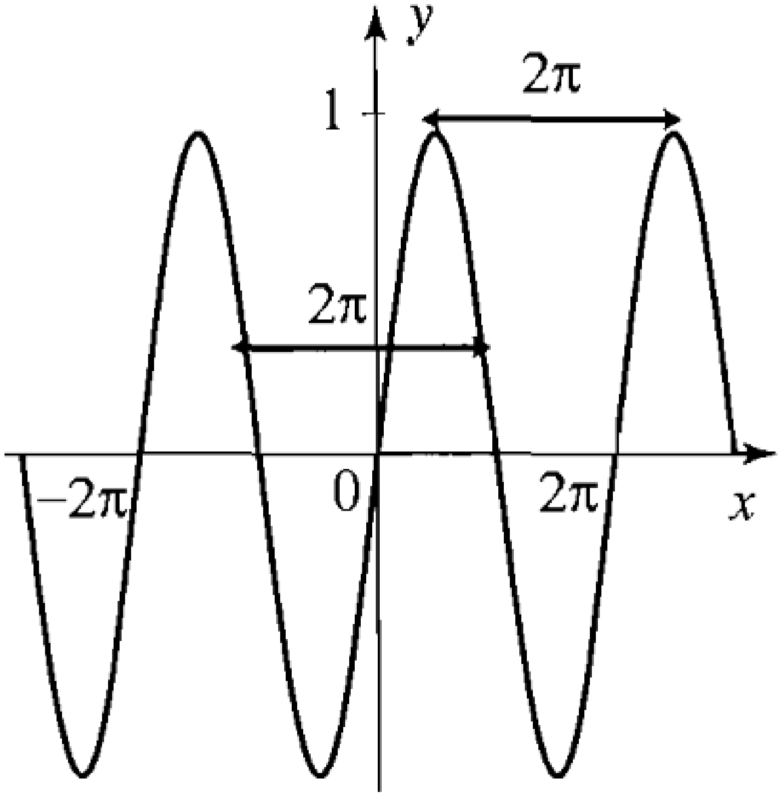
**CONSIDERAMOS:**

**Funciones suaves a trozos y continuas a trozos**




$$f(c-) = f(c+) = f(c)$$

**Función suave**

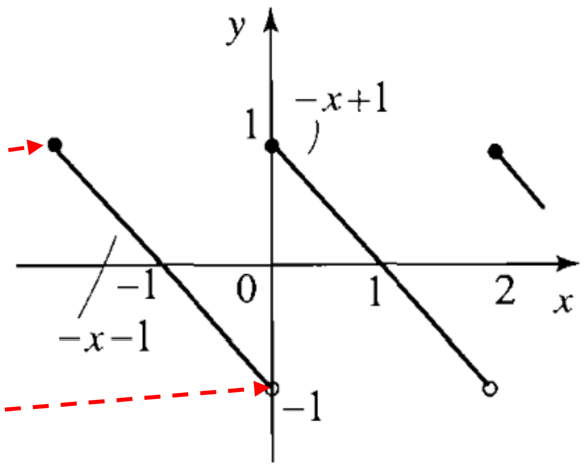


**Función es <u>suave</u> a trozos en [a,b]**

**SI Existen**

$$\lim_{x \to b^-} f'(x)$$

$$\lim_{x \to a^+} f'(x)$$

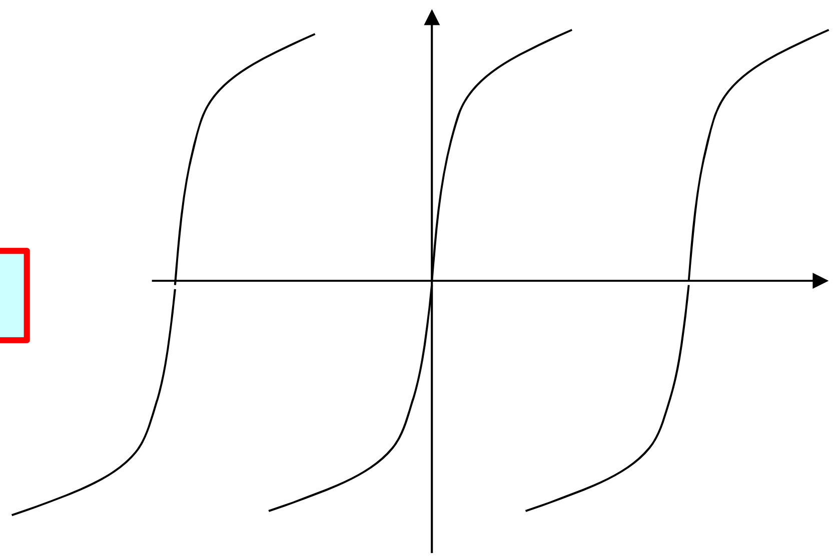



**Es funcion suave pero discontinua a trozos**

Q:

Función $f(x)=x^{1/3}$

Es suave a trozos ???



**No es suave a trozos**
(sus derivadas en proximidades x=0, T, ...nT
NO están definidas )

**TEOREMA : integral sobre periodo T**

**Si f(x) es una función continua a trozos**
**y periódica, para cualquier (a)**

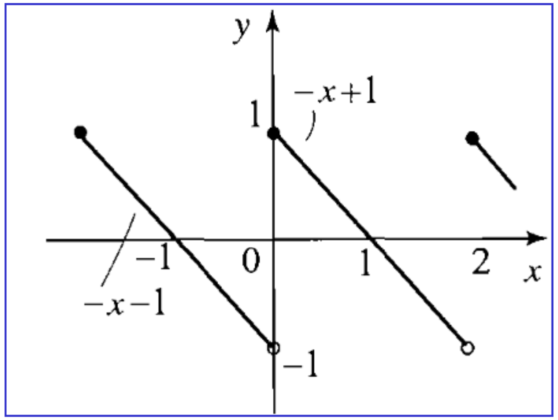
$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

Uso de TEOREMA:

**DEMO**

**Hallar**

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx$$




$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx = \int_{0}^{2} f^2(x)\, dx$$

$$\int_0^2 (-x+1)^2\, dx = -\frac{1}{3}(-x+1)^3\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$$

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**Sistemas trigonometricas y ORTOGANALIDAD**

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \ldots, \cos mx, \ldots,$$

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \ldots, \sin nx, \ldots.$$

**Funciones trigonometricas son periódicas con periodo T= 2π**

**Dos funciones son ORTOGANALES en intervalo (a,b) con peso =1 si:**

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

L4C: Series Fourier

Dos funciones son ORTOGANALES en intervalo (a,b) con peso =1 si:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Este concepto muy importante se desarrollará mas adelante

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**ORTOGANALIDAD de funciones trigonometricas en intervalo (-π➔π) si n,m son enteros:**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{if } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0 \quad \text{for all } m \text{ and } n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad \text{if } m \neq n.$$

## Relaciones Útiles

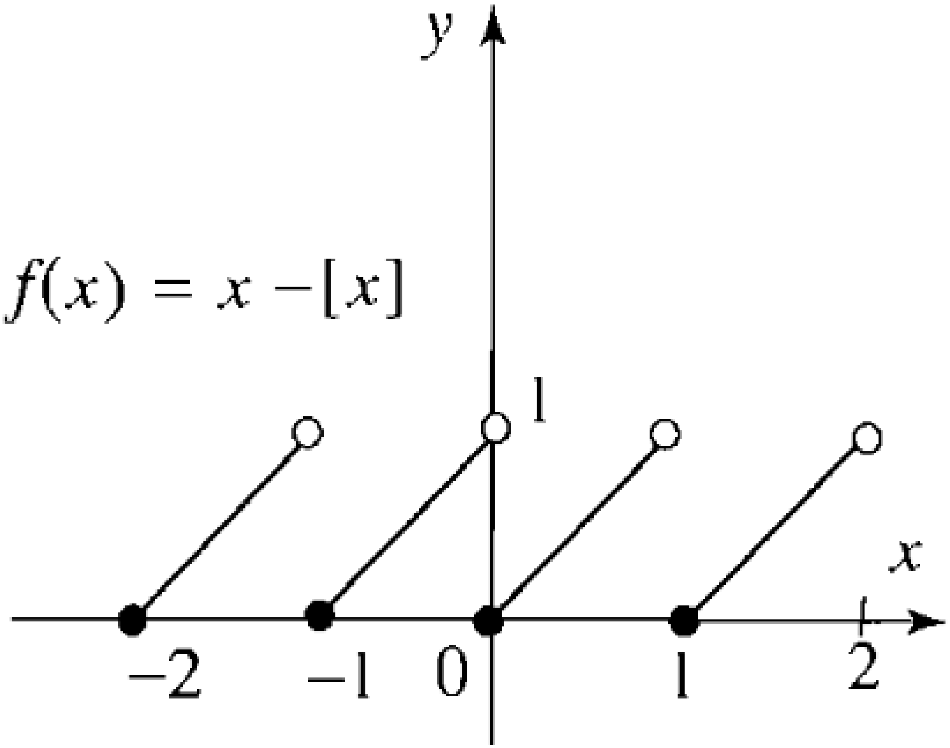
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi$$

**Construcción de una función periódica**

**f(x) es función fraccional de (x)**

**[x] = entero de (x)**

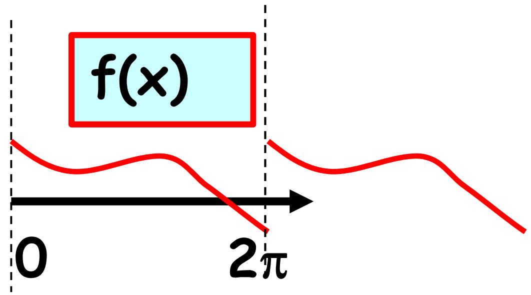
$$f(x) = x - [x]$$



# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**Series Fourier: son desarrollos de función en funciones periódicas ( con periodo $2\pi$) en forma**




$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \boxed{1}$$

**Q1: Que funciones tienen presentacion en Series Fourier?**
**R: esta fuera de presente curso (en Ref. p.1 se discuten algunas condiciones suficientes para tener desarrollo en SF)**

**Q2: Si f(x) tiene presensación como Fourier serie? Como hallar sus coeficientes?**

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**Integramos (1) entre $-\pi \rightarrow +\pi$**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0$$

**n=1,2…**

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**Multiplicamos (1) por cos(mx) ;**
**+ integramos entre - π ➔+ π**

**m=1,2...**

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx\,dx}^{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos mx\,dx}^{=0 \text{ for } m\neq n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos mx\,dx}^{=0}$$

$$= a_m \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx}^{=\pi} = \pi a_m.$$

**ENTONCES**

$$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots)}$$

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier

**Multiplicamos (1) por sen(mx) y Integramos entre -π → + π**

**Llegamos de manera similar a :**

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

**FORMULACION Alternativa**
**( Formulas Euler, solo desarrollados para funciones restringidas**

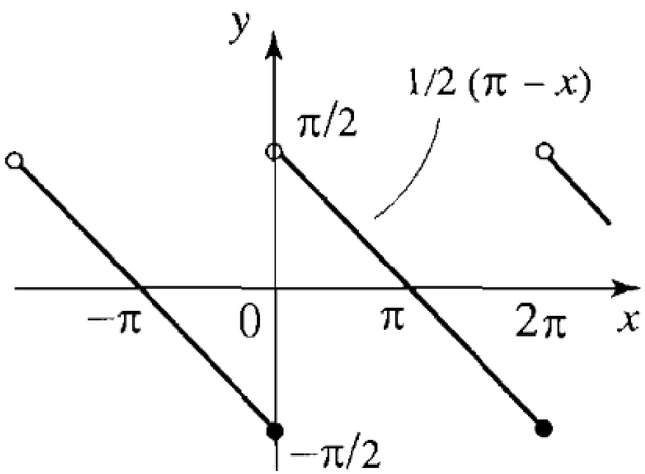
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad \text{and} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, n \geq 1$$

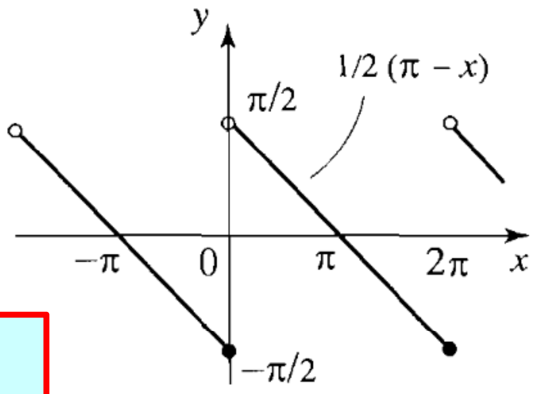
**Fourier generalizo uso de Formulas Euler para funciones periódicas**

**EJEMPLO de APLICACIÓN: función de " dientes de sierra"**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{if } 0 < x < 2\pi, \\ f(x+2\pi) & \text{otherwise.} \end{cases}$$



# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
## L4C: Series Fourier




**SOLUCION**

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\,dx$$ =0

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\pi\cos nx\,dx - \int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx\right\}$$ =0

Usa: http://www.wolframalpha.com/

$$\int x\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \pi \sin nx\, dx - \int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx\right\} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{-1}{n^2}\sin nx + \frac{x}{n}\cos nx\right\}\Big|_0^{2\pi}$$

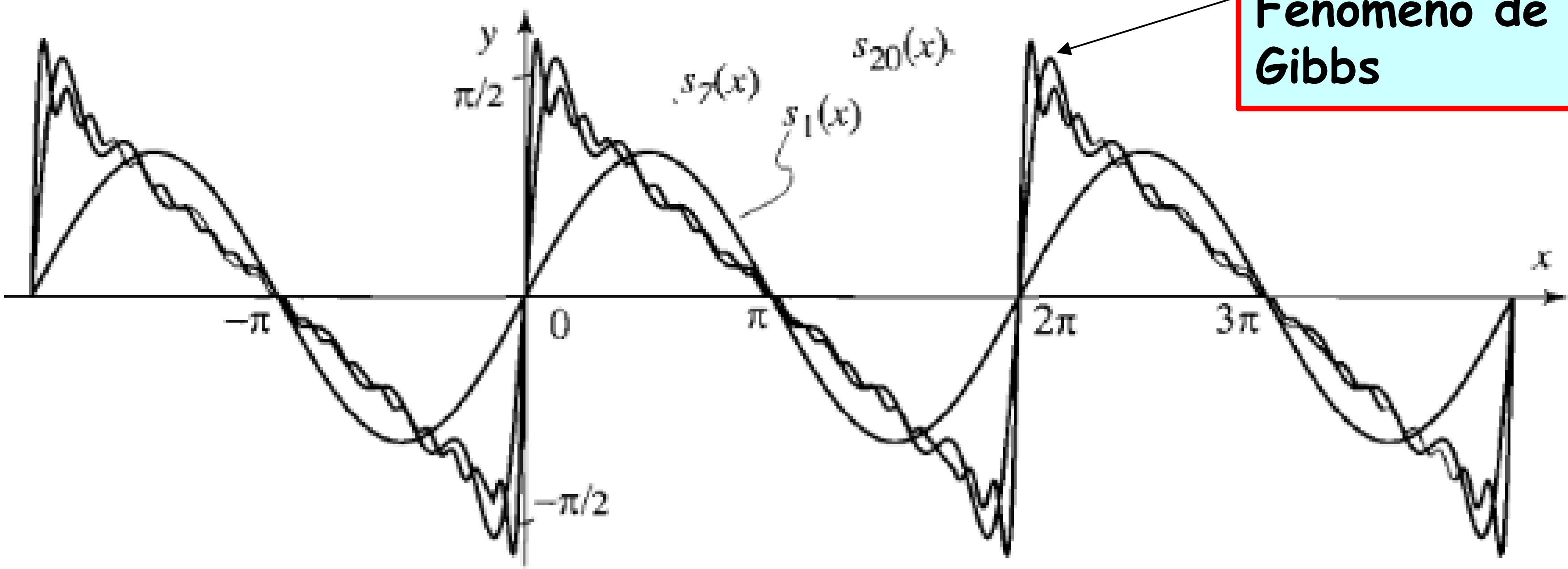
**Integración por partes**

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n}.$$

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
## L4C: Series Fourier

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{if } 0 < x < 2\pi, \\ f(x+2\pi) & \text{otherwise.} \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

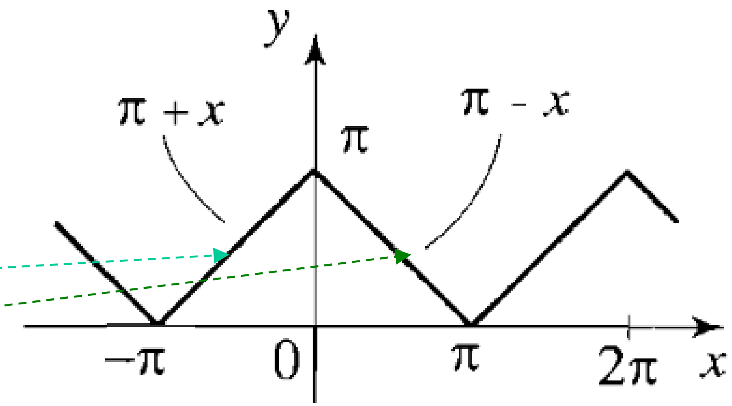
**Fenómeno de Gibbs**




**Se ve que SF se converge para todos puntos de interés**

EJ.2: Onda triangular CLASE- Evaluable (0.5+0.5)p

$$g(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{if } -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x & \text{if } \ 0 \leq x \leq \pi \,. \end{cases}$$



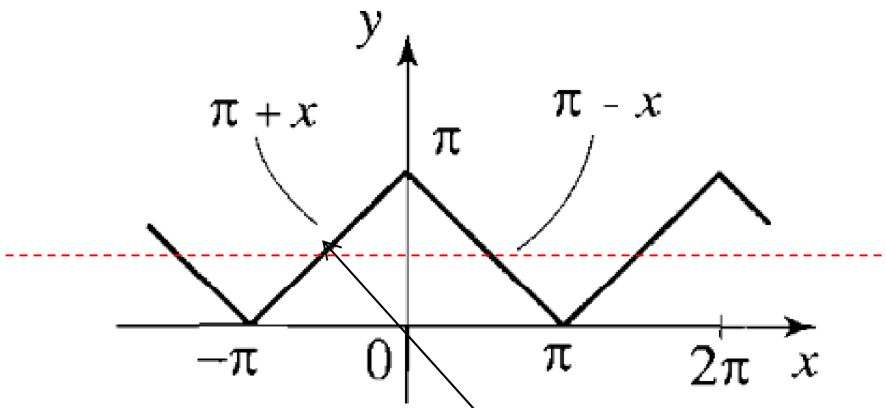

Funcion definida entre ±π

CLASE: buscar coeficiente $a_0$, $b_n$ en SF entre ±π

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

**Ejemplo 2 : Onda triangular**

$$g(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{if } -\pi \le x \le 0, \\ \pi - x & \text{if } 0 \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

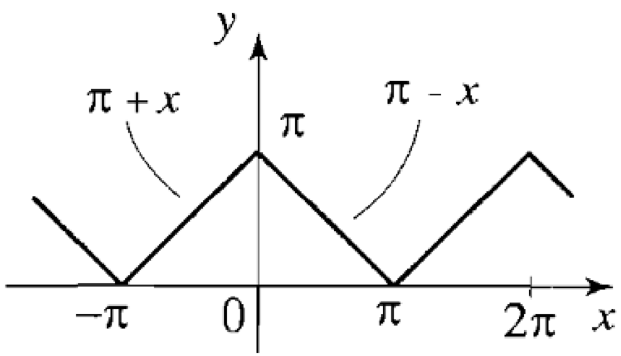



## (1) Buscamos $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\pi^2 = \frac{1}{2}\,\pi.$$

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física

## L4C: Series Fourier



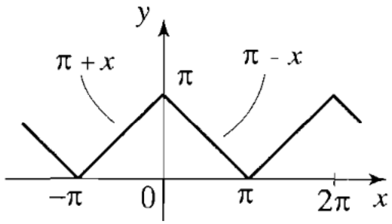

**$b_n$?**

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Función asimétrica

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{g(x)\sin nx}\, dx = 0.$$

Integrada entre limites Simetricos



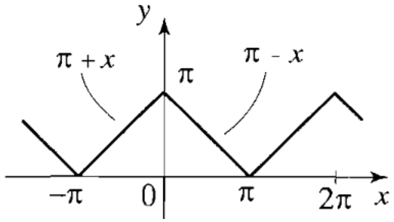

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx$$

**Cambiamos (x) por (-x) en 1er integral**

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n^2}\right\}$$

**Integrando por partes**



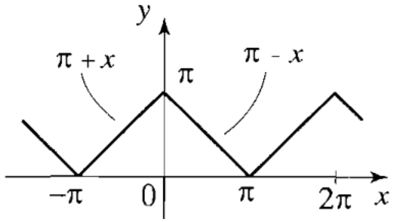

como $\cos n\pi = (-1)^n$

$a_n$=0 para n par

$$a_n = \frac{4}{\pi n^2}$$

para n impar

# TEMA 1 Métodos Matemáticos en Física
## L4C: Series Fourier




**FINALMENTE :**

$$g(x) = \frac{1}{2}\pi + \sum_{n \text{ odd}} \frac{4}{\pi n^2} \cos nx =$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$