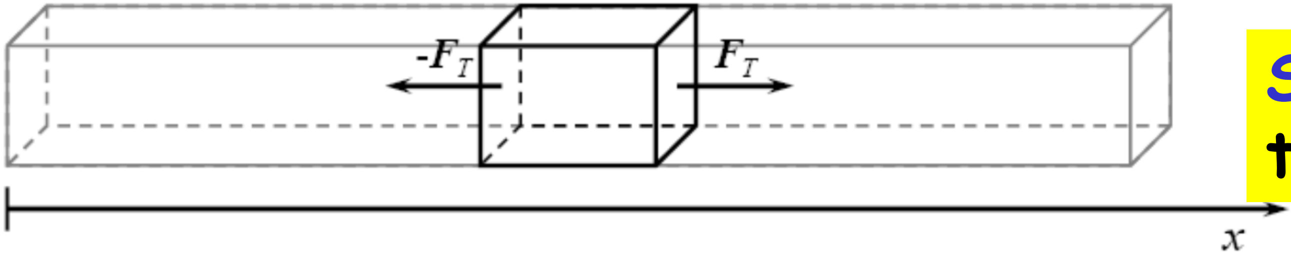
Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

5.1 Oscilaciones longitudinales de una barra gruesa (1D)



S=superficie transversal

$$F_T = TSn,\qquad u = u(x,t),$$

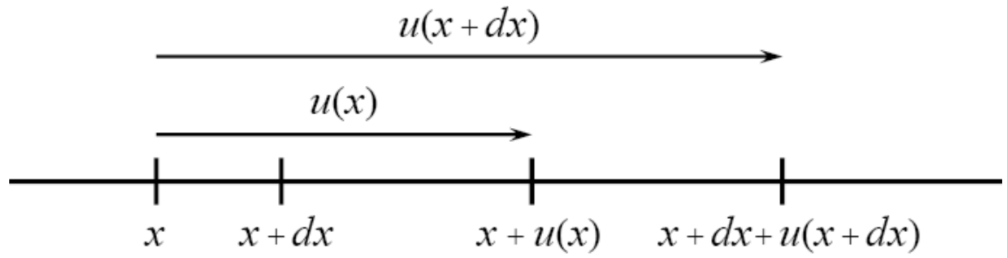
T=Tensión

Ley Hooke se aplica a elongación de TODA barra bajo efectos de fuerza externa

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

Modulo Young

Considerando Trozo infinitesimal x → x+dx



$$\begin{aligned} x &\longrightarrow x + u(x) = x', \\ x + dx &\longrightarrow x + dx + u(x+dx) \simeq x' + dx' \end{aligned}$$

Desplazamientos resultados de estiramientos

Elongación relativa

$$\boxed{\frac{dx' - dx}{dx} = \frac{du(x)}{dx}}$$

Expresión local para Ley Hooke

$$T = E(x)\frac{du(x)}{dx}.$$

Aceleración local para barra en movimiento

$$a = \frac{d^2}{dt^2}\left[x + u(x,t)\right] = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

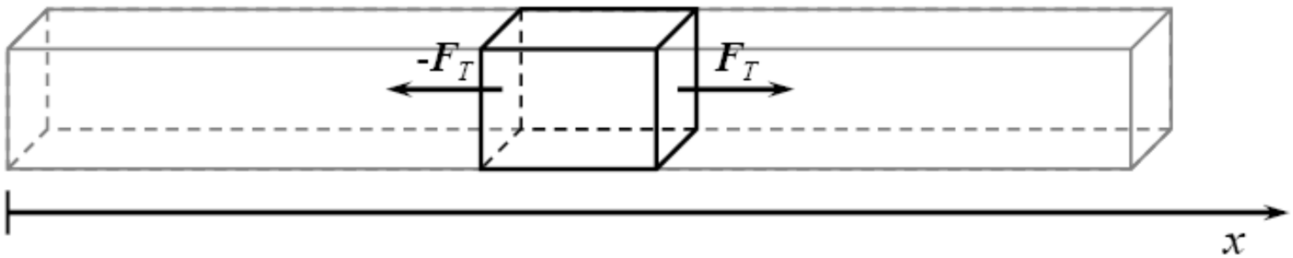
Por ser infinitesimal, todos trozos de dx tienen la misma aceleración

Fuerzas externas

$$F_{\text{ext}} = f(x,t)S\,dx$$

II Ley Newton para elemento infinitesimal

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx = \left[E(x+dx)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+dx} - E(x)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x}\right] + f(x,t)dx$$

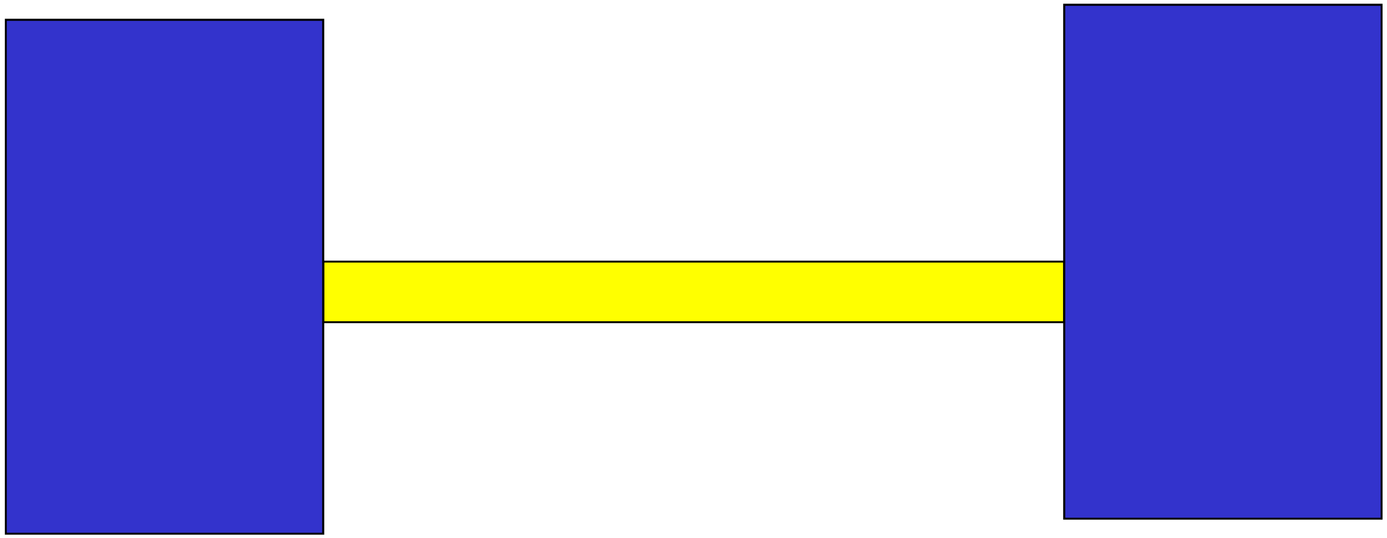


Expresión análoga

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{1}{\rho(x)} f(x,t).$$

CC-1 barra extremos fijos

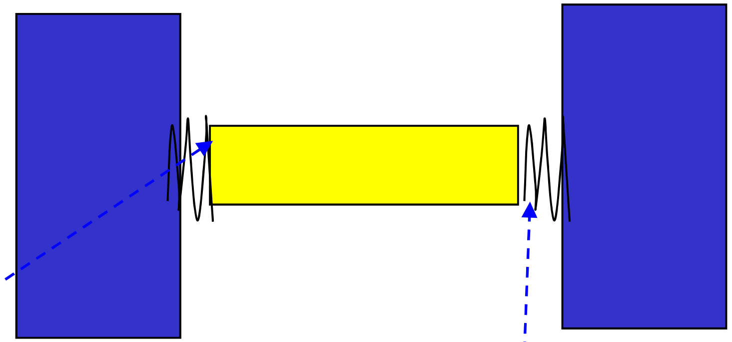
$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0.$$



CC-2: barra con extremos libres

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

CC barra con extremos fijos con un "muelle" (CC3)

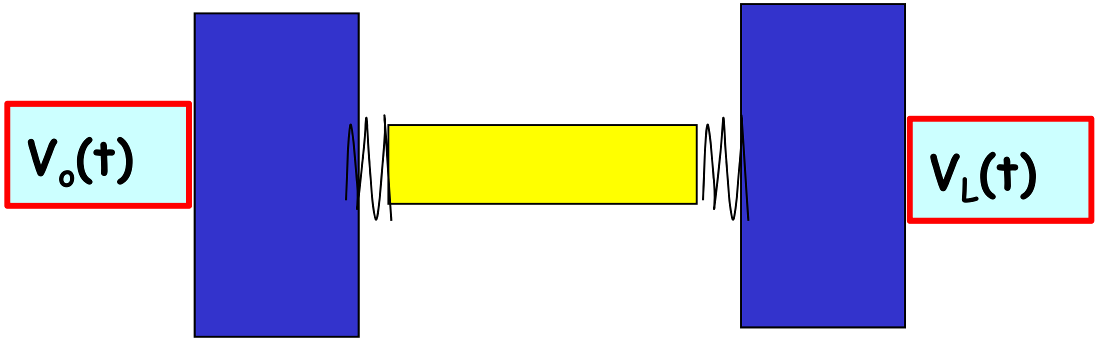


$$u(0,t) = \frac{E(0)}{\beta} \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$u(L,t) = -\frac{E(L)}{\beta} \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L}$$

NOTA: cambio de signo CC Izq.-Der.

CC3 NO homogéneas barra con extremos movibles con un "muelle"

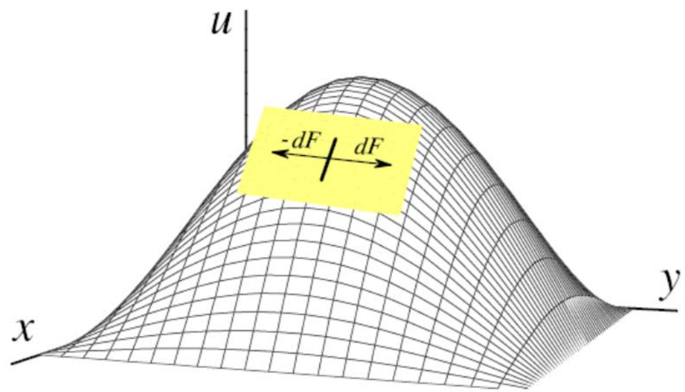


$$E(0)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta\left[u(0,t) - v_0(t)\right],$$

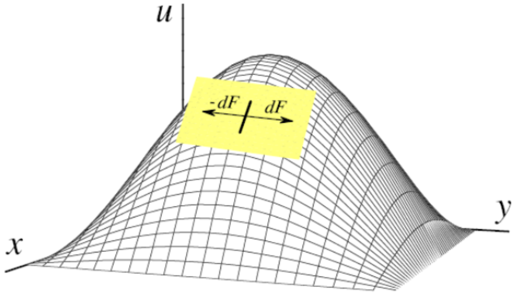
$$E(L)\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = -\beta\left[u(L,t) - v_L(t)\right].$$

Oscilaciones Membrana HOMOGENEA
(detalles en APL 5.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\triangle u = \frac{1}{\rho} f$$



Oscilaciones Membrana HOMOGENEA
Cond. Contorno FIJO



$$u\big|_{\Sigma} = 0.$$

MATEMATICAMENTE:
Contorno RECTANGULAR FIJO

$$u(0, y, t) = 0, \qquad u(L, y, t) = 0.$$
$$u(x, 0, t) = 0, \qquad u(x, L, t) = 0$$

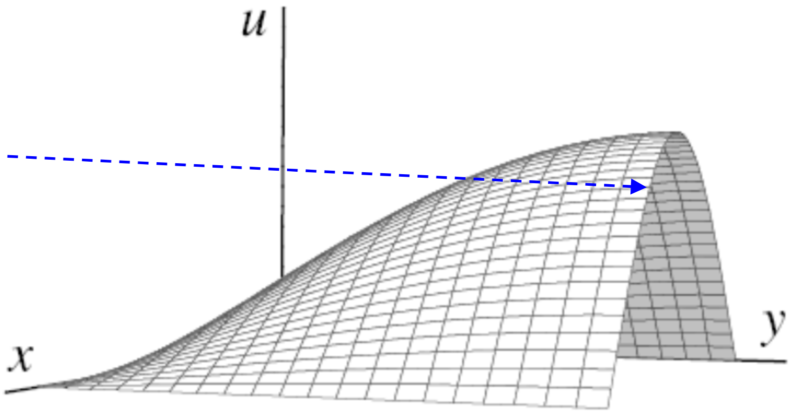
Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

Oscilaciones Membrana HOMOGENEA
Cond. Contorno LIBRE

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma'} = 0$$

Contorno RECTANGULAR
LIBRE (Caso indicado en Fig.)

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=L} = 0}$$



Oscilaciones Membrana HOMOGENEA
Cond. Contorno medio-fijo (con "muelle")

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right|_{\Sigma'} = -\beta \left. u \right|_{\Sigma'}$$

Ecuaciones de de Hidrodinámica (liquidos)

(ver. detalles en libro APL 5.3.1)

1. "Ec. de continuidad"
(ley de conservación de masa local)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0.}$$

$$\text{grad } \psi = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

2. Ec. De Euler (Ley Newton local)

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v}\right]=-\boldsymbol{\nabla}P+\boldsymbol{f}$$

f =densidad de fuerzas que actúan sobre el fluido

V= vector local de velocidades

Ec. de Acústica (APL 5.3.2)

En el caso de oscilaciones suficientemente pequeñas

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \simeq \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \qquad\qquad \rho \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}) \simeq 0.$$

Se desprecia términos NO lineales en Ec. Euler

$$\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \cancel{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{v}} \right] = -\boldsymbol{\nabla} P + \boldsymbol{f}.$$

En Ec. continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

Consideramos

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \simeq \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}}$$

Desarrollamos Presión cerca de punto de equilibrio (procesos adiabaticos)

$$P \simeq P_0 + \left.\frac{dP_{\mathrm{ad}}}{d\rho}\right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0)$$

Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

Sistema de Ec.(oscillaciones pequeños Gases)

Ley "Newton" local simplificado

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla P = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{f}, \qquad \text{a)}$$

Ec. Continuidad simplificada

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0, \qquad \text{b)}$$

Ec. de estado de Liquido / Gas "local"

$$P - P_0 = a^2 \rho_0 s, \qquad \text{c)}$$

Parámetros del problema:

Velocidad de onda (limite adiabático)

$$a^2 \equiv (dP_{\mathrm{ad}}/d\rho)_{\rho_0}$$

"condensación"

$$s \equiv (\rho - \rho_0)/\rho_0$$

Como s, P, ρ están relacionadas a partir de Ec. de Estado de Gas

Eliminaremos Presión de Ec. (a)

Eliminaremos densidad de Ec (b)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \nabla s = \frac{1}{\rho_0} f. \quad \mathbf{1}$$

Forma de Ec. Euler

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot v = 0. \quad \mathbf{2}$$

Tomando div de (1)

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) + a^2 \triangle s = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}. \quad \mathbf{1}$$

Usando Relación (2),

llegamos a Ec. Diferencial (3) para "condensación"

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - a^2 \triangle s = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f} \quad \mathbf{3}$$

Como s ←→ ρ están relacionadas linealmente

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a^2 \triangle \rho = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}$$

4

Ec. onda para la densidad de Gas

Como P ←→ ρ están relacionadas linealmente (Ec. Gas)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - a^2 \triangle P = -a^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f} \qquad \mathbf{5}$$

Ec. onda para Presión

En ausencia de fuerzas externas

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\triangle\phi = 0 \qquad 6$$

Ec. onda para potencial de velocidades

Se obtiene
Integrando Ec. Euler
con f=0

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + a^2 \boldsymbol{\nabla} s = 0$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 - a^2 \int_0^t \boldsymbol{\nabla} s dt'$$

Se entroduce relación entre v, ϕ

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$$

$$\phi \equiv \phi_0 + a^2 \int_0^t s dt' + \varphi$$

φ - Es una función de tiempo arbitraria

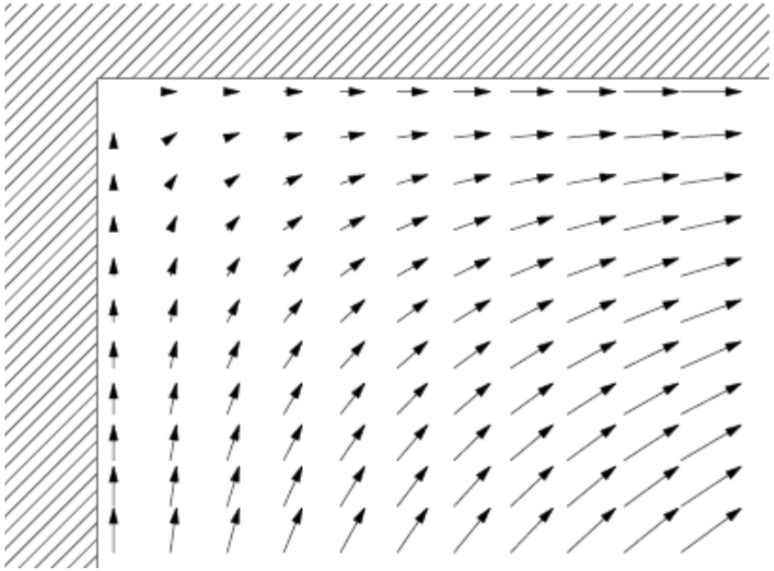
Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL

CONCIONES de CONTRONO- GASES

Superficie cerrada

Componente normal de velocidad a la superficie es nula

$$(v \cdot n)|_{\Sigma} = 0.$$



CONDCIONES de CONTRONO- GASES

COMO $$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})|_{\Sigma} = 0. \Rightarrow \left.\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Derivada de potencial normal a la superficie cerrada , cerca de Σ es nula

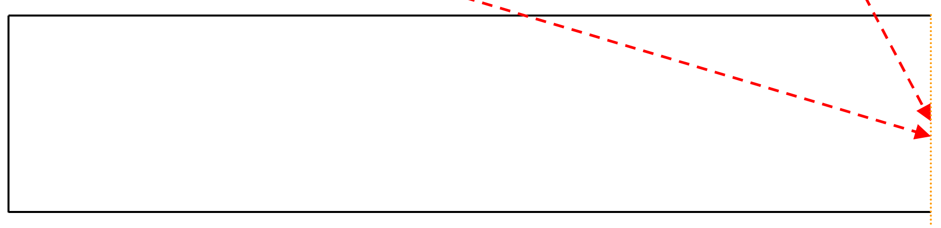
CONDCIONES de CONTRONO- GASES

Analógicamente se obtienen CC para otros parametros (contorno cerrado)

$$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \rho}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0, \qquad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$$

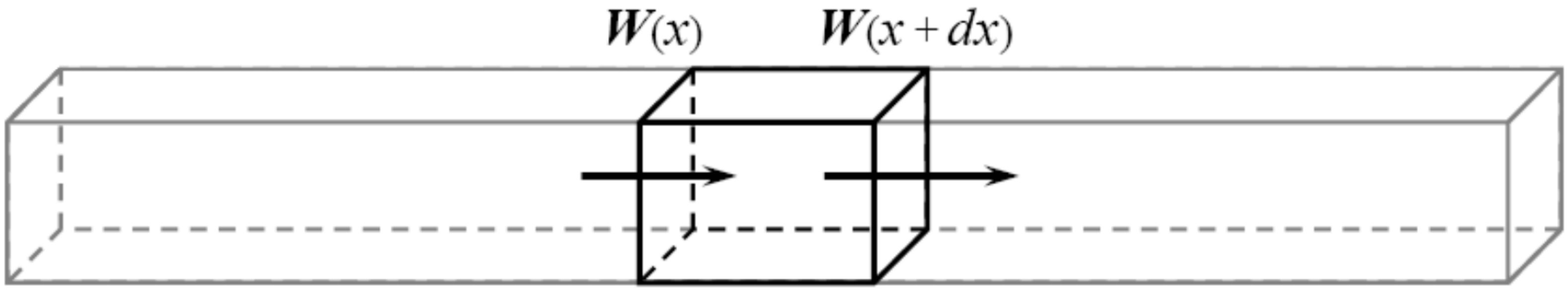
CONDCIONES de CONTRONO que describen APERTURAS en GASES (?)

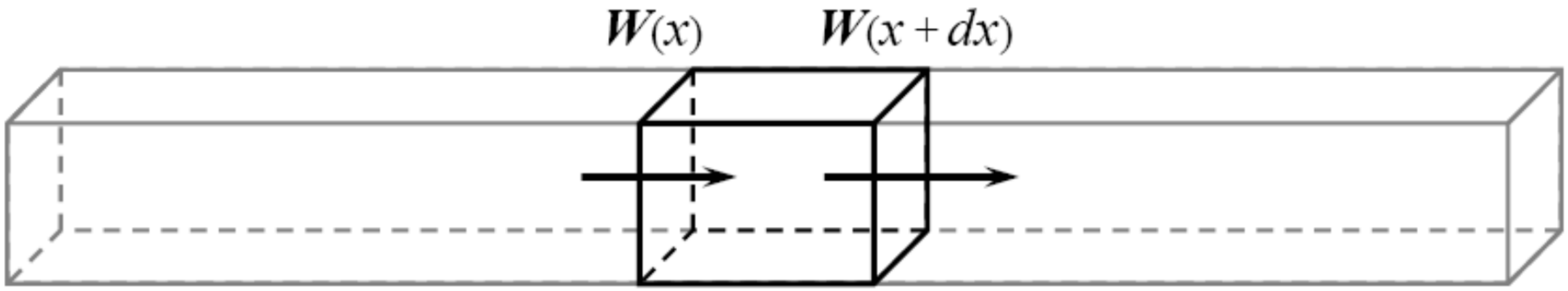
$$P\big|_{\Sigma'} = P_0, \qquad \rho\big|_{\Sigma'} = \rho_0;$$



5.4 transporte de calor unidimensional

$$T = T(x,t) \qquad\qquad W(x,t) = -\kappa(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$

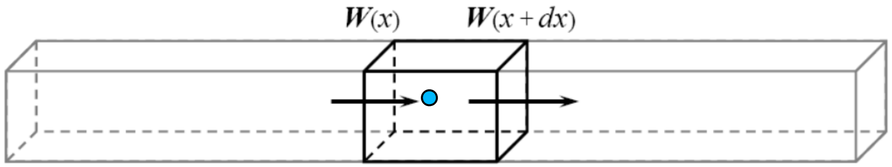




Hallamos Ec. Diferencial para transporte de Calor (Fourier)

1. Aumento de Temperatura en trozo dx debido a flujos de calor desde FUERA

$$dQ = C(x)\rho(x)S dx \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} dt.$$

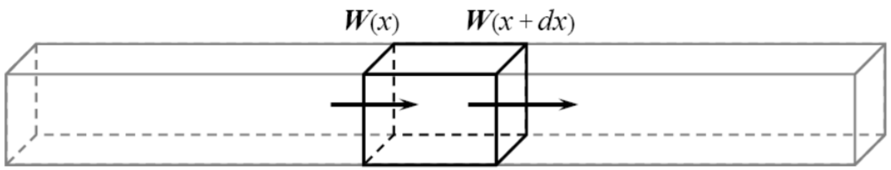


$$dQ_{\text{ext}} = f(x,t) S dx dt$$

2. Aumento de la Temperatura en trozo dx debido a transport de calor de DENTRO

f(x,t) es la densidad de fuentes de calor

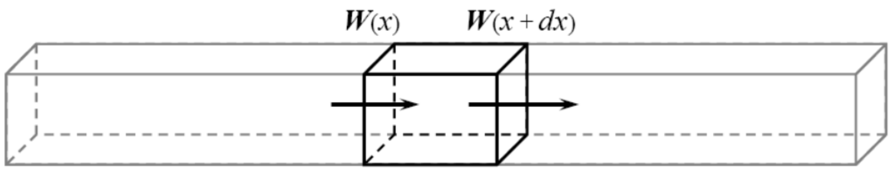
Incremento de Calor debido a flujos por las ambas caras



$$dQ_{\text{flu}} = [W(x,t) - W(x+dx,t)]\, Sdt$$

$$= \left[\kappa(x+dx)\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x+dx} - \kappa(x)\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x} \right] Sdt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] Sdxdt.$$

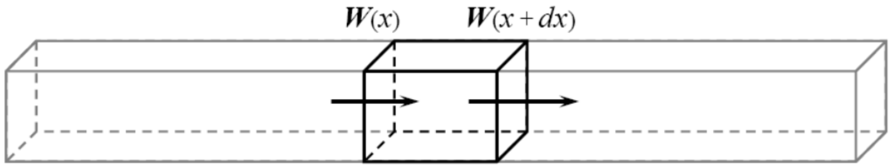
Métodos Matemáticos en Física
L.5A. Cond_Cont_Conduccion de Calor Cap.5APL



De balance de energía →

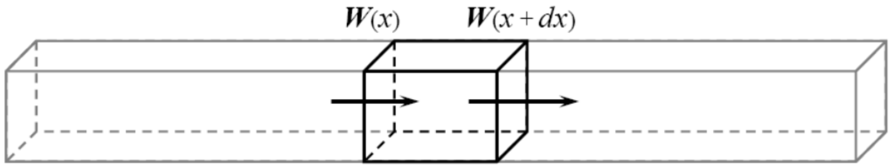
$$C(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] = f(x,t)$$

Ec. De propagación de Calor en 1D



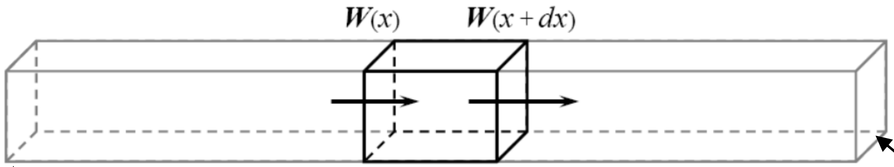
Condiciones de Contorno: 1er tipo

$$T(0,t) = \Theta_0, \qquad\qquad T(L,t) = \Theta_L$$



Condiciones de Contorno: 2-do tipo

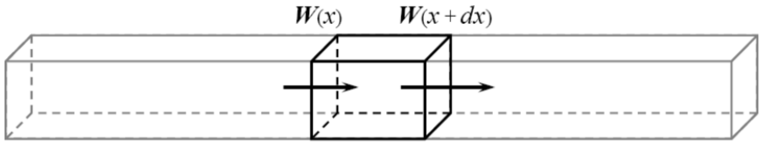
$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$



Condiciones de Contorno:
2-do tipo no-homogeneo

$$\left. -\kappa(0)\,\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = j_0(t)$$

$$\left. \kappa(L)\,\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = j_L(t)$$

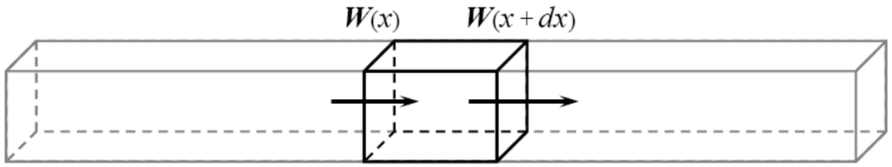


CC anterior puede pasar ser de 3er tipo cuando intercambio es según Ley Newton

Formas de intercambios de calor con medio exterior:

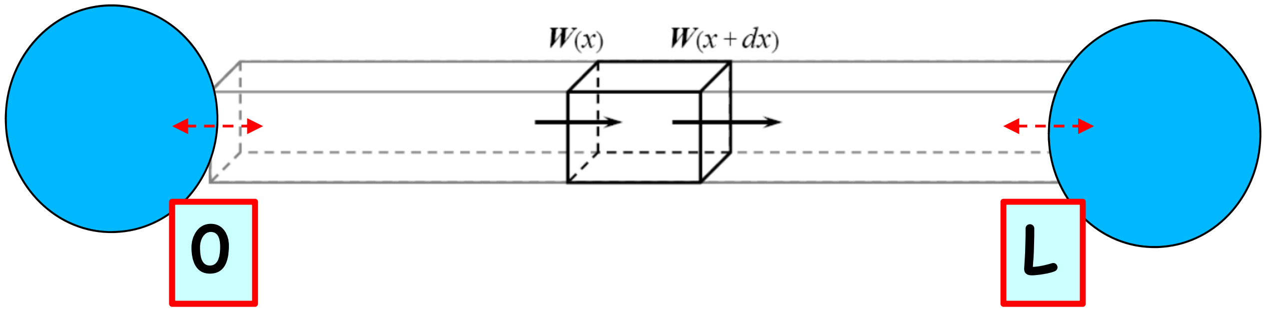
1. Ley Newton

$$j_{x_0}(t) = h\left[T(x_0, t) - \Theta_{x_0}(t)\right]$$



Formas de intercambios con medio
2. Ley Stefan-Bolzmann

$$j_{x_0}(t) = \sigma\left[T^4(x_0,t) - \Theta^4_{x_0}(t)\right]$$



Formas de intercambios con medio

3. Masa conectada a extremo izquierdo/derecho

5.4.2 Transporte tridimensional

$$\mathbf{W} = -\kappa \boldsymbol{\nabla} T,$$

$$\boxed{C(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right] = f(x,t)}$$

3D

$$\nabla\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}e_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z}e_z$$

C. cilindricas

Condiciones de Contorno en 3D

1 tipo $$T\Big|_{\Sigma} = 0$$

CC de tipo II, III

1D

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$

$\Rightarrow$

2D-3D

$$\boldsymbol{n} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T) \equiv \kappa \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}$$

Flujo en la dirección perpendicular a la superficie Σ

Difusión

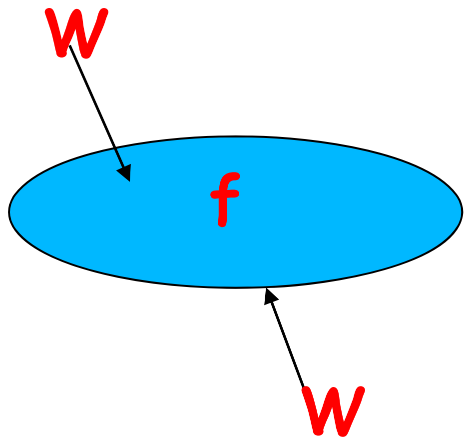
1. Densidad de flujo de partículas : Ley Fick

$$\mathbf{W} = -D\nabla n$$

D- coeficiente de difusión

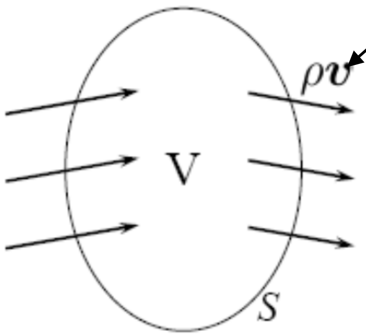
Difusión

Ecuación de balance



$$\frac{d}{dt}\int_V n dV = -\int_S \mathbf{W}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_V f dV.$$

Usando Teorema Gauss (F=v)



$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_U \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,dV$$

O Teorema de Divergencia

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Llegamos a Ec. de Difusión

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{W} = f$$

$$\mathbf{W} = -D \boldsymbol{\nabla} n$$

Ec. de Difusión

$$\frac{dn(r,t)}{dt} = \nabla[D(r,t)\nabla(n(r,t))]$$

En medios homogeneos

$$\frac{dn(r,t)}{dt} = D\Delta n(r,t)$$

Cond. Contorno analogías a Gases:

Concentracion ←→ Densidad

Cond. Contorno análogas a caso de sonido en gases:

Concentración ←→ densidad

$$x \in \Sigma \quad \text{(Superficie)}$$

1-er tipo (Dirichlet)

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

2-do tipo (Neuman)

$$-\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

3-er tipo (Robin)

$$-\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \gamma u(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$$