Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ \exists x (P(x) \to Q(x,a)) ,\ P(a) ,\ \neg R(b) ,\ \forall x (Q(x,a) \to R(b)) \} \vDash \forall x (P(x) \to R(x))$$

Examen enero 2017

$$\{ \underset{A1}{\exists x (P(x) \to Q(x,a))} ,\quad \underset{A2}{P(a)} ,\quad \underset{A3}{\neg R(b)} ,\quad \underset{A4}{\forall x (Q(x,a) \to R(b))} \} \vDash \underset{B}{\forall x (P(x) \to R(x))}$$

$D = \{0,1\}$ $\quad I(a) = 0$, $I(b) = 1$

Buscamos interpretación I tal que $I(A1) = I(A2) = I(A3) = I(A4) = V$ y $I(B) = F$

*) $I(A2) = I(P(a)) = V \longrightarrow \boxed{P_D(0) = V}$

*) $I(A3) = I(\neg R(b)) = V \longrightarrow I(R(b)) = F \longrightarrow \boxed{R_D(1) = F}$

*) $I(B) = I(\forall x (P(x) \to R(x))) = F \longrightarrow I(\exists x \neg (P(x) \to R(x))) = V \longrightarrow I(\exists x (\neg P(x) \vee \neg R(x))) = V$

para x=b $\quad I(\neg P(b) \vee \neg R(b)) = V$ $\quad$ pues $I(\neg R(b)) = V$

*) $I(A4) = I(\forall x (Q(x,a) \to R(b))) = V$

como $I(R(b)) = F$ $\quad I(\forall x (Q(x,a)) = F$

para x=a $\quad I(Q(a,a)) = F$ $\quad \boxed{Q_D(0,0) = F}$

para x=b $\quad I(Q(b,a)) = F$ $\quad \boxed{Q_D(1,0) = F}$

*) $I(A1) = I(\exists x (P(x) \to Q(x,a))) = V$

para x=a $\quad I(P(a) \to Q(a,a)) = F$ pues $P_D(0) = V$ y $Q_D(0,0) = F$

debe ser $\quad I(P(b) \to Q(b,a)) = V$

como $Q_D(1,0) = F$ $\quad I(P(b)) = F$ $\quad \boxed{P_D(1) = F}$

$\Rightarrow$ cualquier interpretación I que cumpla las condiciones anteriores es el contramodelo buscado, independientemente de cómo sean $R_D(1)$, $Q_D(0,0)$ y $Q_D(0,0)$

Solución de Andrei:

D={0,1}, i(a)=0, i(b)=1.

A1: i(∃x (P(x) → Q(x,a)))=V sii {x/a} i(P(a) → Q(a,a))=V o {x/b} i(P(b) → Q(b,a))=V sii

i(P(a))=F o i(Q(a,a))=V o i(P(b))=F o i(Q(b,a))=V A1a o A1b o A1c o A1d

A2: i(P(a))=V A2

A3: i(¬R(b))=V sii i(R(b))=F A3

A4: i(∀x (Q(x,a) → R(b)))=V sii {x/a} i(Q(a,a) → R(b))=V y {x/b} i(Q(b,a) → R(b)) sii

[i(Q(a,a))=F o i(R(b))=V] y [i(Q(b,a))=F o i(R(b))=V] [A4a o A4b] y [A4c o A4d]

B: i(∀ x (P(x) →R(x)))=F sii {x/a} i(P(a) →R(a))=F o {x/b} i(P(b) →R(b))=F sii

[i(P(a))=V y i(R(a))=F] o[i(P(b))=V y i(R(b))=F] [Ba y Bb] o [Bc y Bd]

Discusión: A2 entra en conflicto con A1a; A3 entra en conflicto con A4b y A4d, tenemos ahora:

A1: (A1b o A1c o A1d) con A4:(A4a y A4c) pero A4a entra en conflicto con A1b y A4c con A1d, entonces:

A1c, A2, A3, A4a, A4c: i(P(b))=F, i(P(a))=V, i(R(b))=F, i(Q(a,a))=F, i(Q(b,a))=F

Pero Bc entra en conflicto con A1c, entonces tenemos desde B: i(P(a))=V y i(R(a))=F

Ba es compatible con A2 y podemos definir en la interpretación de R que i(R(a))=F:

No es consecuencia lógica, un contraejemplo que lo demuestra es:

$i(P^1)=\{\langle 0\rangle \Rightarrow V, \langle 1\rangle \Rightarrow F\}$

$i(Q^2)=\{\langle 0,0\rangle \Rightarrow F, \langle 0,1\rangle \Rightarrow V, \langle 1,0\rangle \Rightarrow F, \langle 1,1\rangle \Rightarrow V\}$

$i(R^1)=\{\langle 0\rangle \Rightarrow F, \langle 1\rangle \Rightarrow F\}$